SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU.
THÉORIE DES NOMBRES

EVE HELSMOORTEL

Module de continuité des polynômes d'interpolation. Application à l'étude du comportement local des fonctions continues sur un compact régulier d'un corps local

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 10, nº 1 (1968-1969), exp. nº 10, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1968-1969__10_1_A10_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
10e année, 1968/69, n° 10
24 février 1969

MODULE DE CONTINUITÉ DES POLYNÔMES D'INTERPOLATION APPLICATION À L'ÉTUDE DU COMPORTEMENT LOCAL DES FONCTIONS CONTINUES SUR UN COMPACT RÉGULIER D'UN CORPS LOCAL

par Eve HELSMOORTEL

Sur un compact régulier M ([1]) contenu dans la boule unité A d'un corps local K où π est une uniformisante, on définit les polynômes d'interpolation Q_n relatifs à une suite u très bien répartie (TBR) dans M et bien ordonnée, et, pour tout entier naturel n, on évalue la quantité

$$\omega_{Q_n}(k) = \inf_{v(x-y)=kv(\pi)} v(Q_n(x) - Q_n(y)) \quad .$$

Puis, à toute fonction continue f de M dans A, on associe sa série d'interpolation sur la base normale (Q_n) de $C(M\ ,\ A)$:

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n\ Q_n(x) \quad ,$$

et on déduit de l'ordre de croissance des $v(a_n)$ une condition de Lipschitz d'un certain ordre pour f.

1. Notations.

K est un corps local, π une uniformisante, A l'anneau de la valuation, et M un compact régulier contenu dans A (cf. [1]),

$$M = \varprojlim M_k \ , \qquad \text{où} \quad M_k = M/\pi^k M \quad .$$

On note p_k la projection canonique de M sur M_k, et $N_k = q_1 q_2 \ldots q_k = \operatorname{Card} M_k$. La suite des entiers q_i étant ainsi définie, tout entier naturel n s'exprime de manière unique sous la forme

(1.1) $\quad n = n_0 + n_1\ N_1 + \ldots + n_{h-1}\ N_{h-1}\ , \qquad 0 \leqslant n_i < q_{i+1}$ et $n_{h-1} \neq 0$;

les n_i seront appelés : chiffres de n.

A partir de la suite $\tilde{q} = (q_i)$, on construit l'ensemble $\underset{\sim}{Z}_{\tilde{q}} = \varprojlim \underset{\sim}{Z}/N_k\,\underset{\sim}{Z}$ sur lequel est définie la valuation v_q : pour un élément z de $\underset{\sim}{Z}_{\tilde{q}}$,

$$z = z_0 + z_1\ N_1 + \ldots + z_k\ N_k + \ldots \quad ,$$

on a

$$v_q(z) = m \ , \qquad \text{lorsque} \quad z_i = 0 \quad \text{pour} \quad i = 0 \ , \ \dots \ , m-1 \quad \text{et} \quad z_m \neq 0 \ .$$

Soit une suite u TBR dans M , $\{u_0 , u_1 , \dots , u_{N_k - 1}\}$ est un système de représentants de M_k .

Pour tout entier naturel k et pour tout élément x de M , il existe un entier $r(k)$ et un seul, tel que

$$(1.2) \qquad 0 \leqslant r(k) < N_k \qquad \text{et} \qquad p_k(x) = p_k(u_{r(k)}) \ .$$

L'entier n étant fixé, pour tout élément x de M on définit les entiers naturels N' et ρ par

$$(1.3) \qquad N' = \sup_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \frac{v(x - u_i)}{v(\pi)}$$

et

$$\rho = \inf\{j \ ; \ v(x - u_j) = N'.v(\pi)\} \ .$$

Si $N' \geqslant h$, $\rho = r(h)$ et $v(x - u_\rho) = N'v(\pi)$, $v(x - u_i) \leqslant (h-1)\, v(\pi)$ si $i \neq \rho$.

Si $N' = h - 1$, $\rho = r(h-1)$ et $v(x - u_\rho) = (h-1)\, v(\pi)$, et il peut exister d'autres indices j tels que $v(x - u_j) = (h-1)\, v(\pi)$.

Suite très bien répartie bien ordonnée. - On dira qu'une suite u , très bien répartie dans M , est bien ordonnée (TBR BO), lorsque

$$v(u_i - u_j) = v_q(i - j).v(\pi) \ .$$

Si $r(k)$ et $r(k-1)$ sont associés au même élément x de M et à une suite TBR BO par la définition (1.2), alors :

$$v(u_{r(k)} - u_{r(k-1)}) \geqslant (k-1).v(\pi) \ ,$$

donc

$$v_q(r(k) - r(k-1)) \geqslant k - 1 \ ,$$

c'est-à-dire que

$$r(k) = r(k-1) + x_{k-1} N_{k-1} \ , \qquad \text{avec} \quad 0 \leqslant x_{k-1} < q_k \ .$$

On peut ainsi associer à tout élément x de M la suite des entiers x_i telle que

$$r(k) = x_0 + x_1 N_1 + \dots + x_{k-1} N_{k-1} \ ,$$

et faire correspondre à x l'élément $S(x)$ de $\underset{\sim}{Z}_q$:

(1.4) $$S(x) = x_0 + x_1 N_1 + \dots + x_{k-1} N_{k-1} + \dots \; .$$

On définit de cette manière une application S de M sur $\underset{\sim}{Z}_q$, qui est liée à la suite u TBR BO ; on a

$$S(u_m) = m \;, \qquad \text{pour tout entier naturel } m \;,$$

et d'autre part,

(1.5) $$v(x - y) = v(\pi) . v_q(S(x) - S(y)) \; .$$

S est une homométrie de M sur $\underset{\sim}{Z}_q$.

Les chiffres x_i de $S(x)$ dans $\underset{\sim}{Z}_q$ seront, par analogie, appelés : chiffres de x.

2. Préliminaires.

(a) Problème. - Etant donnés deux entiers k et n, et une suite u TBR BO dans M, on cherche à évaluer la quantité :

$$\omega_{Q_n}(k) = \inf_{v(x-y)=kv(\pi)} v(Q_n(x) - Q_n(y)) \;, \qquad \text{pour } x \text{ et } y \text{ dans } M \; .$$

$$Q_n(x) = \frac{(x - u_0)(x - u_1) \dots (x - u_{n-1})}{(u_n - u_0)(u_n - u_1) \dots (u_n - u_{n-1})} \; .$$

Si deux éléments x et y de M sont tels que $v(x - y) = kv(\pi)$, on leur associe par (1.2) le même entier $r(k) = r$, et on obtient les inégalités :

(2.1) $$\inf_{\substack{v(x-u_r) \geqslant kv(\pi) \\ 0 \leqslant r < N_k}} v(Q_n(x) - Q_n(u_r)) \leqslant \inf_{v(x-y)=kv(\pi)} v(Q_n(x) - Q_n(y))$$
$$\leqslant \inf_{\substack{v(x-u_r)=kv(\pi) \\ 0 \leqslant r < N_k}} v(Q_n(x) - Q_n(u_r)) \; .$$

(b) Calcul de $v(Q_n(x))$.

$$v(Q_n(x)) = v(x - u_\rho) + \sum_{i=0}^{\rho-1} v(x - u_i) + \sum_{i=\rho+1}^{n-1} v(x - u_i) - \sum_{i=0}^{n-1} v(u_n - u_i)$$
$$= v(x - u_\rho) + \sum_{i=0}^{\rho-1} v(u_\rho - u_i) - \sum_{i=0}^{n-1} v(u_n - u_i) + \sum_{i=\rho+1}^{n-1} v(u_\rho - u_i)$$
$$= v(x - u_\rho) + v(\pi) \sum_{m \geqslant 1} \left[\frac{\rho}{N_m}\right] - v(\pi) \sum_{m \geqslant 1} \left[\frac{n}{N_m}\right] + \sum_{i=\rho+1}^{n-1} v(u_\rho - u_i) \;,$$

car la suite u est TBR, et comme elle est de plus bien ordonnée :

(2.2) $$v(Q_n(x)) = v(x - u_\rho) + v(\pi) \sum_{m\geqslant 1} \left(\left[\frac{\rho}{N_m}\right] + \left[\frac{n-\rho-1}{N_m}\right] - \left[\frac{n}{N_m}\right]\right) .$$

(c) LEMME. - <u>Etant donnés deux entiers</u> n <u>et</u> s <u>tels que</u> $N_{h-1} \leqslant n < N_h$ <u>et</u> $0 \leqslant s < n$,

(2.3) $$\sum_{m\geqslant 1} \left(\left[\frac{s}{N_m}\right] + \left[\frac{n-s-1}{N_m}\right] - \left[\frac{n}{N_m}\right]\right) \geqslant 1 - h ,$$

<u>et l'égalité est réalisée si, et seulement si,</u> s <u>obéit à la définition</u> :

s <u>est "bon pour</u> n " <u>lorsque les chiffres</u> s_i <u>de</u> s <u>dans</u> Z_q <u>vérifient les inégalités suivantes</u> :

$$s_{h-1} < n_{h-1} \qquad \underline{\text{et,}} \qquad \underline{\text{si}}\ h \neq 1 ,\ s_i \geqslant n_i \quad \underline{\text{pour}}\ 0 \leqslant i \leqslant h-2 .$$

Pour démontrer ce lemme, on étudie la soustraction : $(n-1) - s$, dans le système de numération lié à la suite q_i , dans lequel n s'exprime selon (1.1) ; si on note b_i les chiffres de $n - 1 - s$, on obtient les relations :

$$s_m + b_m = n_m - e_m + e_{m+1}\, q_{m+1} , \qquad \text{pour } 0 \leqslant m \leqslant h-2 ,$$

$$\text{avec} \begin{cases} e_{m+1} = \begin{cases} 0 , & \text{si } e_m + s_m \leqslant n_m , \\ 1 , & \text{si } e_m + s_m > n_m , \end{cases} \\ e_0 = 1 , \end{cases}$$

et

$$s_{h-1} + b_{h-1} = n_{h-1} - e_{h-1} .$$

Avec ces notations,

$$\left[\frac{s}{N_m}\right] + \left[\frac{n-s-1}{N_m}\right] - \left[\frac{n}{N_m}\right] = - e_m ,$$

et par conséquent,

$$\sum_{m\geqslant 1} \left[\frac{s}{N_m}\right] + \left[\frac{n-s-1}{N_m}\right] - \left[\frac{n}{N_m}\right] = - \sum_{m=1}^{h-1} e_m \geqslant 1 - h .$$

L'égalité est donc réalisée si, et seulement si,

$$e_m = 1 , \qquad \text{pour } m = 1 , 2 , \dots , h-1 ,$$

c'est-à-dire si s est "bon pour n ".

3. Etude de $v(Q_n(x) - Q_n(u_r))$ et de $v(Q_n(x) - Q_n(y))$,

$\begin{cases} \text{pour une suite } u \text{ TBR BO ,} \\ \text{pour } n < N_k \text{ , } v(x - y) = kv(\pi) \text{ , } r = r(k) \text{ commun à } x \text{ et } y \text{ .} \end{cases}$

(a) Si $r < n$, u_r est racine de Q_n , et r est aussi la valeur ρ commune à x et y ; la relation (2.2) et le lemme impliquent que

$$v(Q_n(x) - Q_n(u_r)) \geqslant (k + 1 - h)\, v(\pi) \quad ; \tag{3.1}$$

l'égalité est réalisée si, et seulement si,

$$v(x - u_r) = kv(\pi) \quad \underline{\text{et}} \quad r \text{ "}\underline{\text{bon pour}}\ n\text{ " .}$$

(b) Si $r \geqslant n$, à x et u_r correspondent les mêmes entiers N' et ρ ; d'après (2.2),

$$v(Q_n(u_r)) = v(x - u_\rho) + v(\pi) \sum_{m \geqslant 1} \left(\left[\frac{\rho}{N_m}\right] + \left[\frac{n - \rho - 1}{N_m}\right] - \left[\frac{n}{N_m}\right]\right) \quad ;$$

d'autre part,

$$\frac{Q_n(x)}{Q_n(u_r)} - 1 = \pi^k . \alpha . \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{u_r - u_i} + \ldots + \pi^{mk} \alpha^m \sum_m + \ldots + \pi^{nk} \alpha^n \sum_n \ ,$$

avec $x = u_r + \pi^k . \alpha$, $v(\alpha) \geqslant 0$, et

$$\sum_m = \sum_{0 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n-1} \frac{1}{(u_r - u_{i_1}) \ldots (u_r - u_{i_m})} \quad ;$$

on en déduit alors que

$$v\left(\frac{Q_n(x)}{Q_n(u_r)} - 1\right) \geqslant v(\alpha) + (k - N')\, v(\pi) \quad .$$

L'égalité est réalisée si, et seulement si,

$$v\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{u_r - u_i}\right) = - N'\, v(\pi) \quad ;$$

ceci se produit en particulier si ρ est le seul $j < n$, tel que

$$v(x - u_j) = N'\, v(\pi) \quad ,$$

et il en est certainement ainsi si $N' \geqslant h$. On obtient ainsi le résultat suivant :

(3.2) $$v(Q_n(x) - Q_n(u_r)) \geqslant (k + 1 - h)\, v(\pi) \quad ;$$

<u>l'égalité est réalisée si, et seulement si,</u>

$v(x - u_r) = kv(\pi)$, ρ <u>"bon pour</u> n " , <u>et</u> $v(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{u_r - u_i}) = - N'\, v(\pi)$.

En raison de la double inégalité (2.1), on peut conclure, d'après (3.1) et (3.2), que

(3.3) $$\omega_{Q_n}(k) = (k + 1 - h)\, v(\pi) \qquad \text{pour} \quad N_{h-1} \leqslant n < N_h \leqslant N_k \quad .$$

On démontre ainsi, à partir de (3.1) et (3.2), que

(3.4) Si $v(x - y) = kv(\pi)$ et si $1 \leqslant n < N_k$,

$$v(Q_n(x) - Q_n(y)) = (k + 1 - h)\, v(\pi)$$

est équivalent à :

(α) $$x_0 \geqslant n_0 \ , \ \dots \ , \ x_{h-2} \geqslant n_{h-2} \ , \qquad \text{pour} \quad h \neq 1 \quad ,$$

(β) $$x_{h-1} < n_{h-1} \quad ,$$

ou bien

$$x_{h-1} \geqslant n_{h-1} \qquad \text{et} \qquad v(\sum_{0 \leqslant d < n_{h-1}} \frac{1}{u_{r(h)} - u_{r(h-1)+dN_{h-1}}}) = (1 - h)\, v(\pi) \quad ;$$

et on en déduit le corollaire suivant :

(3.5) COROLLAIRE. - <u>Pour tout couple d'éléments</u> x , y <u>de</u> M <u>tels que</u>

$$v(x - y) \geqslant (h - 1)\, v(\pi) \quad ,$$

<u>on a</u>

$$v(Q_{N_{h-1}}(x) - Q_{N_{h-1}}(y)) = v(x - y) + (1 - h)\, v(\pi) \quad .$$

Dans le cas $v(x - y) = h - 1$, si $y_{h-1} \neq 0$, on évalue $v(\frac{Q_{N_{h-1}}(x)}{Q_{N_{h-1}}(y)} - 1)$.

4. Etude de $v(Q_n(x) - Q_n(y))$ pour $n \geqslant N_k$.

D'après (2.2) et le lemme,

$$v(Q_n(x)) \geqslant (N' + 1 - h)\, v(\pi) \geqslant 0 \quad ,$$

et on ne peut avoir $v(Q_n(x)) = 0$ que si $N' = h - 1$ et ρ "bon pour n " ; cette remarque entraîne que

(4.1) Les éléments x de M, tels que $v(Q_n(x)) = 0$, sont caractérisés par les inégalités

$$x_i \geqslant n_i \,, \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant i \leqslant h-1 \,,$$

et que

(4.2) $$\omega_{Q_n}(k) = 0 \,, \qquad \text{pour} \quad n \geqslant N_k \,.$$

Enfin, si pour un nombre réel λ on note $(\lambda)^+ = \sup(\lambda\,,\,0)$, on peut conclure par le théorème suivant.

(4.3) THÉORÈME. - Pour tout entier naturel n, et pour toute suite u TBR BO,

$$\omega_{Q_n}(k) = (k+1-h)^+ \, v(\pi) \quad .$$

5. Cas particulier : $M = \mathbb{Z}_p$ et $u_m = m$.

$M = \mathbb{Z}_p = \lim \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$, l'application S, définie par (1.4) et relative ici à la suite des entiers naturels, est l'application identique ; on suppose la valuation de $\mathbb{Q}_p$ normalisée de telle sorte que $v(p) = 1$ et $|p| = \frac{1}{p}$; dans ces conditions,

$$Q_n(x) = \frac{x(x-1)\ \dots\ (x-n+1)}{n!} \,,$$

et

(5.1) $$\omega_{Q_n}(k) = \inf_{v(x-y)=k} v(Q_n(x) - Q_n(y)) = (k+1-h)^+ \,, \qquad \text{pour} \quad p^{h-1} \leqslant n < p^h \,.$$

Les relations précédemment obtenues pour M se transposent aisément :

(5.2) $$v(Q_n(x)) = v(x-\rho) + v(\rho!) + v((n-\rho-1)!) - v(n!) \quad .$$

(5.3) LEMME. - Si $0 \leqslant s < n$, on a

$$v(s!) + v((n-s-1)!) - v(n!) \geqslant -\left[\frac{\log n}{\log p}\right] = 1-h \quad ,$$

ou encore

$$v(C^s_{n-1}) \leqslant -v(n) + \left[\frac{\log n}{\log p}\right] \quad ,$$

ou

$$v(C^s_n) \leqslant -v(n-s) + \left[\frac{\log n}{\log p}\right] \quad .$$

L'égalité est réalisée si, et seulement si, " s est bon pour n ", c'est-à-dire si

$$s_{h-1} < n_{h-1} \qquad \text{et,} \qquad \text{pour} \ \ h \neq 1 \,,\ \ s_i \geqslant n_i \,, \quad 0 \leqslant i \leqslant h-2 \quad ,$$

les s_i étant les chiffres de s dans le système de numération de base p.

Dans la propriété (3.4), la condition (β) s'exprime ici plus simplement, et porte sur les chiffres de x dans son développement de Hensel :

(β) $$x_{h-1} < n_{h-1} ,$$

ou bien

$$x_{h-1} \geqslant n_{h-1} \quad \text{et} \quad v\Big(\sum_{0 \leqslant d < n_{h-1}} \frac{1}{x_{h-1} - d}\Big) = 0 .$$

On obtient enfin les résultats analogues à (3.5) et (4.1).

Remarque. - Lorsque $M = A$, et u TBR BO dans A, on a encore quelques simplifications :

$$h - 1 = \left[\frac{\log n}{\log q}\right] , \qquad q = \operatorname{card} A/\pi A ,$$

et dans le lemme intervient $v_q(n!)$, et la valuation dans A correspond à l'expression de n dans le système de numération de base p.

6. Application aux fonctions continues de M dans A.

Pour une fonction continue f du compact régulier M dans A, on définit de même

$$\omega_f(k) = \inf_{v(x-y)=kv(\pi)} v(f(x) - f(y)) .$$

Les polynômes Q_n associés à la suite u TBR BO dans M, constituent une base normale de $C(M , A)$; soit alors la série d'interpolation de f,

$$f(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n Q_n(x) ,$$

on a

(6.1) $$\omega_f(k) \geqslant \rho_f(k)\, v(\pi) , \quad \text{avec} \quad \rho_f(k) = \inf_{\substack{n \geqslant 1 \\ v(x-y)=kv(\pi)}} \Big(\frac{v(a_n)}{v(\pi)} + \frac{v(Q_n(x) - Q_n(y))}{v(\pi)}\Big) .$$

Posons $\lambda_h = \inf \frac{v(a_n)}{v(\pi)}$ pour $N_{h-1} \leqslant n < N_h$, alors

$$\rho_f(k) = \inf_{h \geqslant 1} (\lambda_h + (k + 1 - h)^+) .$$

Pour étudier $\rho_f(k)$, on considère le polygone de Newton P de l'ensemble E des points (h , λ_h), à coordonnées entières ; l'ordonnée du point d'abscisse k sur P est notée $Nw(k)$.

$\lambda_h - h$ est l'ordonnée à l'origine de la droite de pente 1 passant par le point (h , λ_h) ; deux cas se présentent :

(a) P <u>admet une droite d'appui de pente</u> 1 , D . - Ceci se produit lorsque

$$\inf_{h \geq 1} (\lambda_h - h) = C_0 \quad \text{est fini} \quad ,$$

c'est-à-dire lorsqu'il existe C , tel que

(6.2) $\qquad v(a_n) \geq (C + h)\ v(\pi)$, $\qquad$ pour $N_{h-1} \leq n < N_h$ et $h \geq 1$,

soit

$$|a_n| \leq |\pi|^C . |\pi|^h \quad .$$

Pour $h > k$,

$$\lambda_h \geq h + C \geq k + 1 + C \quad ,$$

et pour $1 \leq h \leq k$,

$$\lambda_h + k + 1 - h \geq k + 1 + C \quad ,$$

donc

$$\rho_f(k) \geq k + 1 + C \ , \qquad \text{pour tout } k \quad .$$

<u>Remarque</u>. - Si h_0 est l'abscisse minima des points de P situés sur D , c'est-à-dire le plus petit h tel que

$$\lambda_h - h = C_0 = \inf_{h \geq 1} (\lambda_h - h) \quad ,$$

alors,

$$\text{pour } k \geq h_0 \ , \qquad \rho_f(k) = k + 1 + C_0 \quad .$$

En revenant à la fonction f ,

$$v(f(x) - f(y)) \geq k + (1 + C)\ v(\pi) \quad ,$$

et on en déduit le résultat.

(6.3) THÉORÈME. - <u>S'il existe</u> $K > 0$ <u>tel que</u>

$$|a_n| \leq K|\pi|^h \ , \qquad \underline{\text{avec}}\ N_{h-1} \leq n < N_h \ \underline{\text{et}}\ h \geq 1 \quad ,$$

<u>alors, pour tout couple</u> (x , y) <u>d'éléments de</u> M ,

$$|f(x) - f(y)| \leq |\pi|\ K|x - y| \quad .$$

(b) P <u>n'admet pas de droite d'appui de pente</u> 1 . - Soient (h_i) la suite des abscisses des sommets de P , rangées par ordre croissant, et m_i la pente du côté de P qui se projette selon (h_i , h_{i+1}) ; la suite m_i est croissante, majorée par 1 d'après l'hypothèse (b), on note $\mu = \lim m_i$, $0 < \mu \leqslant 1$. Soit i_0 , tel que pour $i \geqslant i_0$, $m_i > 0$; prenons $k \geqslant h_{i_0}$,

Pour $h > k$, $\lambda_h \geqslant Nw(h) > Nw(k)$,

Pour $1 \leqslant h \leqslant k$, les points correspondants de P sont au-dessus de la droite de pente 1 passant par le point $(k , Nw(k))$, $\lambda_h - h + k + 1 \geqslant Nw(k) + 1$.

On en déduit donc que

$$\rho_f(k) \geqslant 1 + [Nw(k)] > Nw(k) , \qquad \text{pour } k \geqslant h_{i_0} ,$$

et, en un sommet de P ,

$$\rho_f(h_i) = 1 + Nw(h_i) .$$

Pour tout nombre réel β , $0 < \beta < \mu$, P admet une droite d'appui de pente β , et

$Nw(k) \geqslant \beta k + C$ ou $v(a_n) \geqslant (\beta h + C)\, v(\pi)$, pour $N_{h-1} \leqslant n < N_h$ et $h \geqslant 1$,

donc

$$\rho_f(k) > \beta k + C , \qquad \text{pour } k \geqslant h_{i_0} ,$$

d'où le résultat suivant.

(6.4) <u>S'il existe</u> $K > 0$ <u>et</u> β <u>dans</u> $]0 , 1[$ <u>tels que</u>

$$|a_n| \leqslant K|\pi|^{\beta h} , \qquad \underline{\text{pour}}\ N_{h-1} \leqslant n < N_h \ \underline{\text{et}}\ h \geqslant 1 ,$$

<u>alors il existe</u> $K' > 0$ <u>et</u> $\delta > 0$ <u>tels que, pour</u> $|x - y| \leqslant \delta$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K'|x - y|^{\beta} .$$

En réunissant les deux résultats (6.3) et (6.4), on peut conclure par le théorème suivant.

(6.5) THÉORÈME. - <u>S'il existe</u> $K > 0$ <u>et</u> $\gamma > 0$ <u>tels que</u>

$$|a_n| \leqslant K|\pi|^{h\gamma} , \qquad \underline{\text{pour}}\ N_{h-1} \leqslant n < N_h \ \underline{\text{et}}\ h \geqslant 1 ,$$

<u>alors il existe</u> $K' > 0$ <u>et</u> $\delta > 0$ <u>tels que, pour</u> $|x - y| \leqslant \delta$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K'|x - y|^{\inf(\gamma, 1)} .$$

Applications.

1° Isométries. - A partir du corollaire (3.5) et de la remarque du paragraphe (6.(a)), on obtient le résultat suivant :

(6.6) S'il existe un indice $h_0 \leqslant 1$ tel que
$$v(a_{N_{h_0-1}}) = (h_0 - 1)\, v(\pi)$$

et
$$v(a_n) > (h-1)\, v(\pi) , \qquad \text{pour } n \neq N_{h_0-1} \text{ et } N_{h-1} \leqslant n < N_h , \quad h \geqslant 1 ,$$

alors, pour $v(x-y) \geqslant (h_0 - 1)\, v(\pi)$, on a
$$v(f(x) - f(y)) = v(x-y) \quad .$$

Si $h_0 = 1$, ceci fournit une classe d'isométries de M avec la condition :
$$\begin{cases} v(a_1) = 0 , \\ v(a_n) > (h-1)\, v(\pi) , \qquad \text{pour } n \geqslant 2 . \end{cases}$$

2° Si tous les termes de la suite (q_i), définie par le compact régulier M, sont égaux à un même entier q (ce qui est le cas lorsque $M = A$), alors
$$h - 1 = \left[\frac{\log n}{\log q}\right] ,$$

et le théorème (6.5) s'exprime plus simplement sous la forme :

(6.7) S'il existe $K > 0$ et $\gamma > 0$ tels que
$$|a_n| \leqslant K\left(\frac{1}{n^{\gamma D}}\right) , \quad n \geqslant 1 , \qquad \text{où } D = \frac{-\log|\pi|}{\log q} ,$$

alors il existe $K' > 0$ et $\delta > 0$ tels que, pour $|x-y| \leqslant \delta$,
$$|f(x) - f(y)| \leqslant K' |x-y|^{\inf(\gamma, 1)} \quad .$$

Exemples :
$$\text{Si } M = \underset{\sim}{Z}_p \quad \text{et} \quad u_n = n ,$$

la constante D est égale à 1, et on a, en particulier :

(6.8) S'il existe $K > 0$ tel que, pour $n \geqslant 1$, $|a_n| \leqslant \frac{K}{n}$, alors
$$|f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y| \quad \text{dans } \underset{\sim}{Z}_p ,$$

et (6.6) fournit une classe d'isométries de $\underset{\sim}{Z}_p$.

(6.9) <u>Si</u> $f \in C(\underset{\sim}{Z}_p)$, <u>et si sa série d'interpolation par les polynômes binômiaux a pour coefficients</u> a_n :

<u>Si</u> $|a_1| = 1$,

<u>Si</u> $|a_n| < \frac{1}{p^{[(\log n)/(\log p)]_h}}$ (<u>ce qui est réalisé si</u> $|a_n| < \frac{1}{n}$),

<u>alors</u> f <u>est une isométrie de</u> $\underset{\sim}{Z}_p$.

Si K est une extension algébrique de $\underset{\sim}{Q}_p$ de degré s , et si M = A , la constante D est alors égale à $\frac{1}{s}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Yvette). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math. Paris, 1963).

(Texte reçu le 24 février 1969)

Mlle Eve HELSMOORTEL
26 rue du Maréchal Joffre
33 - BORDEAUX