Georges Rhin

Quelques résultats métriques dans un corps de séries formelles sur un corps fini

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 9, n° 2 (1967-1968), exp. n° 21, p. 1-22
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1967-1968__9_2_A6_0>

QUELQUES RÉSULTATS MÉTRIQUES DANS UN CORPS DE SÉRIES FORMELLES SUR UN CORPS FINI

par Georges RHIN

Nous étudierons dans une première partie la discrépance de certaines suites $(f_n(\theta))$. Rappelons tout d'abord les résultats obtenus dans le corps des réels.

1. Equirépartition dans les réels.

Soient α et β deux réels tels que $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$ et $S = (\theta_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres réels. Désignons par $F_N(\alpha , \beta ; S)$ le nombre d'indices n, compris entre 1 et N tels que la partie fractionnaire de θ_n soit dans l'intervalle $[\alpha , \beta[$.

Soit $R_N(\alpha , \beta ; S) = F_N(\alpha , \beta ; S) - (\beta - \alpha)N$ et $ND_N(S) = \sup_{(\alpha,\beta)} |R_N(\alpha , \beta ; S)|$. La suite S est équirépartie modulo 1, si, et seulement si, $D_N(S) = o(1)$. Si $S = (f_n(\theta))$, nous noterons $D_N(f_n(\theta))$ par $D_N(\theta)$.

Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions dérivables sur $[a , b]$ et posons, pour tout couple (m , n) d'entiers positifs, $F_{m,n} = f_m - f_n$. Nous avons alors le théorème suivant démontré par CASSELS [3] et indépendamment par ERDÖS et KOKSMA [5].

THÉORÈME 1. - *Si la suite* (f_n) *vérifie la condition*

(A_1) *Si* $m \neq n$, $F'_{m,n}$ *est monotone et il existe une constante* K *indépendante de* m, n *et* θ *telle que*

$$|F'_{m,n}(\theta)| \geqslant K > 0 ,$$

alors, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, *sauf quand* θ *appartient à un ensemble de mesure nulle*,

$$ND_N(\theta) < N^{1/2} \log^{5/2+\varepsilon} N$$

dès que $N > N_0(\theta , \varepsilon)$.

COROLLAIRE. - *Les suites*

(a) $f_n(\theta) = \theta\alpha^n$ ($|\alpha| > 1$, a, b *quelconques*) ;

(b) $f_n(\theta) = \lambda\theta^n$ $(\lambda \neq 0 , [a , b] \cap [-1 , +1] = \emptyset)$;

(c) $f_n(\theta) = u_n \theta$ ($u_n \in Z$ et $n \to u_n$ injective)

vérifient la condition A_1 .

Dans le cas (c), et sous certaines conditions, on peut améliorer le résultat du théorème 1. I. S. GÁL et P. ERDÖS ont démontré en 1954 le théorème suivant (non publié) :

THÉORÈME 2. - Si $f_\nu(\theta) = n_\nu \theta$ où $n_\nu \in \mathbb{N}$ et $n_{\nu+1}/n_\nu \geq q > 1$, pour tout $\nu \geq 1$

$$ND_N(\theta) = 0(N^{1/2}(\log \log N)^c) \quad ,$$

pour presque tout θ .

c est une constante réelle supérieure à 1/2 et dont la valeur n'est pas connue. I. S. GÁL et I. L. GÁL ont démontré en 1964 [6] le théorème suivant :

THÉORÈME 3. - Si $f_\nu(\theta) = 2^\nu \theta$ $(\nu \geq 1)$,

$$ND_N(\theta) = 0(N^{1/2} \sqrt{\log \log N}) \ ,$$

pour presque tout θ .

Ce résultat est le meilleur possible à cause du théorème suivant de KHINČIN [7] :

THÉORÈME 4. - Si l'on pose $R_N(\theta) = R_N(0 , \frac{1}{2} ; (2^\nu \theta))$, alors pour presque tout θ ,

$$\limsup_{N \to \infty} \frac{|R_N(\theta)|}{\sqrt{\frac{1}{2} N \log \log N}} = 1 \quad .$$

Enfin, I. S. GÁL et P. ERDÖS ont démontré en 1955 [4] le théorème suivant :

THÉORÈME 5. - Si $(n_\nu)_{\nu \geq 1}$ est une suite d'entiers lacunaire (i. e. $n_{\nu+1}/n_\nu \geq q > 1$)

$$\limsup_{N \to \infty} \frac{\left|\sum_{\nu=1}^{N} e^{2\pi i n_\nu \theta}\right|}{\sqrt{N \log \log N}} = 1$$

pour presque tout θ .

Nous allons généraliser quelques uns de ces résultats à un corps de séries formelles sur un corps fini F_q .

2. Equirépartition dans un corps de séries formelles sur F_q .

Soit F_q le corps fini à $q = p^s$ éléments. Soit w_∞ la valuation sur $F_q(x)$ définie par

$$w_\infty\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = - \text{degré}(f) + \text{degré}(g) \quad .$$

Soit $F_q\{x^{-1}\}$ le complété de $F_q(x)$ pour cette valuation. Tout élément s'écrit $\theta = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n x^{-n}$ où $a_n \in F_q$ et les a_n sont tous nuls pour $n < n_0$. Si $-h$ est le plus petit indice tel que $a_n \neq 0$, nous poserons $|x| = q^h$. Soit

$$\wp = x^{-1} F_q[[x^{-1}]]$$

l'idéal de valuation, $d\theta$ la mesure de Haar normalisée par $\int_\wp 1\, d\theta = 1$ et $\mathcal{H}$ l'homomorphisme continu du groupe additif de $F_q\{x^{-1}\}$ sur le groupe additif de l'idéal de valuation défini par

$$\mathcal{H}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n x^{-n}\right) = \sum_{1}^{+\infty} a_n x^{-n} \quad .$$

Soit χ_0 le caractère de $F_q\{x^{-1}\}$ défini par $\chi_0\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n x^{-n}\right) = \psi(a_1)$, où ψ est un caractère non trivial de F_q .

Alors, tous les caractères modulo les polynômes sont donnés par

$$\chi(\theta) = \chi(\mathcal{H}(\theta)) = \chi_0(g(x)\theta) \qquad \text{où } g(x) \in F_q[x] \quad .$$

Soit $\mathcal{B}$ une boule contenue dans $\wp$: $\mathcal{B} = \alpha + \wp^d$ et $\text{mes}\, \mathcal{B} = q^{1-d}$. Soit S une suite d'éléments θ_n de $F_q\{x^{-1}\}$. $F_N(\mathcal{B}\, ,\, S)$ désigne le nombre d'entiers n compris entre 1 et N tels que $\mathcal{H}(\theta_n) \in \mathcal{B}$.

$$R_N(\mathcal{B}\, ,\, S) = F_N(\mathcal{B}\, ,\, S) - Nq^{1-d} \qquad \text{et} \qquad ND_N(S) = \sup_{\mathcal{B} \subset \wp} |R_N(\mathcal{B}\, ,\, S)| \quad .$$

On définit de même $D_N(\theta) = D_N(f_n(\theta))$ pour une suite de fonctions f_n . Soient D un disque de rayon q^h et (f_n) $(n \geqslant 1)$ une suite de fonctions continues de D dans $F_q\{x^{-1}\}$. Posons $F_{m,n} = f_m - f_n$.

Soit $K \subset \underset{\sim}{N} \times \underset{\sim}{N}$ contenant les couples $(m\, ,\, n)$ tels que $m = n$ et soit K_N le nombre de couples $(m\, ,\, n) \in K$ tels que $\sup(m\, ,\, n) \leqslant N$.

THÉORÈME 1 [9]. - Si la suite (f_n) vérifie la condition :

(A_2) Si $(m\, ,\, n) \notin K$, $\forall\, \theta_1\, ,\, \theta_2 \in D$

$$|F_{m,n}(\theta_1) - F_{m,n}(\theta_2)| = q^{\Lambda_{m,n}} |\theta_1 - \theta_2| \qquad \text{où } \Lambda_{m,n} \in \underset{\sim}{Z} \text{ et } h + \Lambda_{m,n} + 1 \geqslant 0 \quad ,$$

alors $\forall\ \varepsilon > 0$

$$|R_N(\mathcal{B}\ ,\ \theta)| < \sqrt{K_{2N}}\ \log^{3/2+\varepsilon} N$$

pour presque tout θ de D et dès que $N > N_0(\mathcal{B}\ ,\ \theta\ ,\ \varepsilon)$, et

$$ND_N(\theta) < N^{1/4}\sqrt{K_{2N}}\ \log^{3/2+\varepsilon} N$$

pour presque tout θ de D et dès que $N > N_0(\theta\ ,\ \varepsilon)$.

COROLLAIRE. - Les suites

(a) $f_n(\theta) = \theta a^n$, $|a| > 1$ et D quelconque ;

(b) $f_n(\theta) = g_n(x)\theta$, $g_n \in F_q[x]^*$ et $n \to g_n$ injective, D quelconque ;

(c) $f_n(\theta) = \lambda\theta^{u_n}$, $\lambda \neq 0$, $u_n \in \underset{\sim}{N} - p\underset{\sim}{N}$, $n \to u_n$ injective, et $D \cap x\mathcal{P} = \emptyset$

vérifient $K_N = O(N)$, donc

$$ND_N(\theta) < N^{3/4}\ \log^{3/2+\varepsilon} N \quad ,$$

pour presque tout θ de D et dès que $N > N_0(\theta\ ,\ \varepsilon)$.

Dans les cas (a) et (c) ou dans le cas (b), en imposant des conditions de croissance sur les degrés des polynômes g_n , on peut améliorer la majoration du corollaire.

Cependant, cette majoration ne sera jamais meilleure que $O(\sqrt{N \log\log N})$, en raison du résultat suivant :

PROPOSITION. - Si $R_N(\theta) = R_N(\mathcal{P}^2\ ,\ (x^n\ \theta)_{n\geq 1})$, alors

$$\limsup_{N\to+\infty} \frac{|R_N(\theta)|}{\sqrt{2q^{-1}\ (1 - q^{-1})N \log\log N}} = 1 \quad ,$$

pour presque tout θ de $\mathcal{P}$.

Il suffit de remarquer que les fonctions définies sur $\mathcal{P}$ par

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(\theta) &= 1 \qquad \text{si } \mathcal{H}(x^n\ \theta) \in \mathcal{P}^2 \\ &= 0 \qquad \text{sinon} \end{aligned}$$

sont des variables aléatoires indépendantes qui sont telles que

$$\text{mes } \varepsilon_n^{-1}(1) = q^{-1} = 1 - \text{mes } \varepsilon_n^{-1}(0)$$

et d'utiliser la loi du logarithme itéré pour les variables de Bernoulli (voir par exemple RENYI, Calcul des probabilités, Dunod).

Nous démontrerons le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Soit $F_q\{x^{-1}\}$ de caractéristique différente de deux. Soit (f_n) une suite de fonctions d'un disque D de rayon q^d dans $F_q\{x^{-1}\}$ vérifiant la condition

(B) $\forall\, n \geqslant 1$, $\forall\, \theta_1 , \theta_2 \in D$

$$|f_n(\theta_1) - f_n(\theta_2)| = q^{\Lambda_n} |\theta_1 - \theta_2| \tag{1}$$

où $n \to \Lambda_n$ est injective et

$$\min_{n \geqslant 1} \Lambda_n + 1 + d \geqslant 0 \tag{2}$$

Alors

$$ND_N(\theta) \leqslant N^{1/2} \log N \quad , \tag{Di}$$

pour presque tout θ de D et dès que $N > N_0(\theta)$. Si de plus, la suite (Λ_n) est croissante

$$\limsup_{N \to \infty} \frac{\left|\sum_{n=1}^{N} \chi_0(f_n(\theta))\right|}{\sqrt{N \log \log N}} = 1 \tag{Li}$$

pour presque tout θ de D .

Les suites

$f_n(\theta) = \lambda\theta^{u_n}$ (avec $\lambda \neq 0$, $u_n \in \mathbb{N} - p\mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$ et $D \cap x\mathcal{P} = \emptyset$)

$f_n(\theta) = \lambda^n \theta$ (avec $|\lambda| > 1$ et mes $D \geqslant |\lambda|^{-1}$)

$f_n(\theta) = g_n(x)\theta$ (avec degré $g_{n+1} >$ degré g_n et mes $D \geqslant 1$)

vérifient les conditions du théorème 2.

Dans le paragraphe 3, nous démontrerons le théorème 1 bis, dont le théorème 1 sera un corollaire. Les paragraphes 4 et 5 conduiront à la démonstration de (Di) et les paragraphes 6 , 7 et 8 à celle de (Li).

3. Démonstration du théorème 1 bis.

THÉORÈME 1 bis. - Si la suite (f_n) vérifie la condition

(A_3) Si $(m, n) \notin K$, il existe une partition

$$D = \bigcup_{j=1}^{J(m,n)} D^j_{m,n}$$

du disque D en un nombre fini de disques disjoints $D^j_{m,n}$ de rayon $q^{h^j_{m,n}}$ tels que, quels que soient θ_1 et $\theta_2 \in D^j_{m,n}$:

$$|F_{m,n}(\theta_1) - F_{m,n}(\theta_2)| = q^{\Lambda^j_{m,n}} |\theta_1 - \theta_2|$$

où $\Lambda^j_{m,n} \in \underset{\sim}{Z}$ et $\Lambda_{m,n} + 1 \geqslant 0$, où $\Lambda_{m,n} = \inf\limits_{j=1,\dots,J(m,n)} (\Lambda^j_{m,n} + h^j_{m,n})$, alors les conclusions du théorème 1 sont vérifiées.

LEMME 1. - Soit g un polynôme non nul de $F_q[x]$, h un entier relatif et φ une application isométrique de $\wp$ sur $\wp$. Alors

$$I = \int_{\wp} \chi_0(g(x)x^h \varphi(\theta))\, d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } h \geqslant - d^\circ g \\ 1 & \text{si } h < - d^\circ g \end{cases} .$$

Preuve. - Le cas $h < - d^\circ g$ est évident, car alors $|g(x)x^h \varphi(\theta)| < q^{-1}$. Si $h = \ell - d^\circ g$ où $\ell \geqslant 0$, considérons le recouvrement de $\wp$ par les $q^{\ell+1}$ disques de rayon $q^{-\ell-2}$. Or

$$|\theta_1 - \theta_2| \leqslant q^{-\ell-2} \implies |\varphi(\theta_1) - \varphi(\theta_2)| \leqslant q^{-\ell-2} \implies \chi_0(g(x)x^h \varphi(\theta_1)) = \chi_0(g(x)x^h \varphi(\theta_2)) .$$

Soit $(\omega_1, \dots, \omega_{q^{\ell+1}})$ un système de représentants de $\wp/\wp^{\ell+2}$, alors

$$I = \sum_{n=1}^{q^{\ell+1}} \int_{\omega_n + \wp^{\ell+2}} \chi_0(g(x)x^h \varphi(\theta))\, d\theta \quad ,$$

$$I = q^{-\ell-1} \sum_{n=1}^{q^{\ell+1}} \chi_0(g(x)x^h \varphi(\omega_n)) \quad .$$

Or $n \neq n' \implies |\varphi(\omega_n) - \varphi(\omega_{n'})| = |\omega_n - \omega_{n'}| > q^{-\ell-2}$. Les $\varphi(\omega_n)$ $(n = 1,\ldots,q^{\ell+1})$ sont donc incongrus modulo $\wp^{\ell+2}$. Comme ils sont au nombre de $q^{\ell+1}$, ils constituent un système complet de représentants de $\wp/\wp^{\ell+2}$. Il existe donc une permutation σ de $(1 , \ldots , q^{\ell+1})$ telle que

$$|\varphi(\omega_n) - \omega_{\sigma(n)}| \leqslant q^{-\ell-2} .$$

Alors

$$I = q^{-\ell-1} \sum_{n=1}^{q^{\ell+1}} \chi_0(g(x)x^h\ \omega_n)$$

$$= \int_{\wp} \chi_0(g(x)x^h\ \theta)\ d\theta = 0$$

car l'intégrale sur un groupe compact d'un caractère non trivial est nulle. Si $0 \leqslant N_1 < N_2$, soit $K(N_1 , N_2)$ le sous-ensemble de K tel que $N_1 < \min(m , n)$ et $\max(m , n) \leqslant N_2$.

LEMME 2. - Soit (f_n) une suite de fonctions satisfaisant (A_3) , alors

$$\int_D \Big| \sum_{N_1<n\leqslant N_2} \chi_0(g(x)\ f_n(\theta))\Big|^2\ d\theta \leqslant \text{mes } D \sum_{(m,n)\in K(N_1,N_2)} 1 ,$$

pour tout polynôme g non nul de $F_q[x]$.

Preuve. - L'intégrale du membre de gauche est égale à

$$\sum_{N_1<n\leqslant N_2} \int_D \chi_0(g(x)\ f_n(\theta))\ \overline{\chi}_0(g(x)\ f_n(\theta))\ d\theta$$

$$+ 2 \sum_{N_1<m<n\leqslant N_2} \text{Re} \int_D \chi_0(g(x)\ f_m(\theta))\ \overline{\chi}_0(g(x)\ f_n(\theta))\ d\theta$$

$$\leqslant (N_2 - N_1) \text{ mes } D + 2 \sum_{N_1<m<n\leqslant N_2} |I_{m,n}|$$

avec $I_{m,n} = \int_D \chi_0(g(x)\ F_{m,n}(\theta))\ d\theta$.

Si $(m , n) \in K$, $|I_{m,n}| \leqslant \text{mes } D$. Si $(m , n) \notin K$, on pose

$$I_{m,n} = \sum_{j=1}^{J(m,n)} I^j_{m,n} ,$$

avec $I^j_{m,n} = \int_{D^j_{m,n}} \chi_0(g(x)\ F_{m,n}(\theta))\ d\theta$.

Soit $\omega^j_{m,n}$ un centre du disque $D^j_{m,n}$:

$$D^j_{m,n} = \{\theta : \quad |\theta - \omega^j_{m,n}| \leqslant q^{h^j_{m,n}}\} \quad .$$

On pose $\theta = \omega^j_{m,n} + x^{1+h^j_{m,n}}\xi$, et $F_{m,n}(\theta)x^{-\Lambda^j_{m,n}-h^j_{m,n}-1} = \varphi^j_{m,n}(\xi)$.

La condition (A_3) entraîne, pour tout ξ , $\eta \in \mathcal{P}$:

$$|\varphi^j_{m,n}(\xi) - \varphi^j_{m,n}(\eta)| = |\xi - \eta| \; .$$

L'application $\varphi^j_{m,n}$ est donc isométrique de $\mathcal{P}$ dans une boule $\mu^j_{m,n} + \mathcal{P}$. Donc $\varphi^j_{m,n}(\xi) = \mu^j_{m,n} + \Phi^j_{m,n}(\xi)$, où $\Phi^j_{m,n}(\xi)$ est isométrique de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}$. Alors

$$I^j_{m,n} = q^{1+h^j_{m,n}} \chi_0(g(x)x^h \mu^j_{m,n}) \int_{\mathcal{P}} \chi_0(g(x)x^h \Phi^j_{m,n}(\xi))\, d\xi \quad ,$$

où $h = \Lambda^j_{m,n} + h^j_{m,n} + 1$.

D'après le lemme 1,

$$\begin{aligned} |I^j_{m,n}| &= q^{1+h^j_{m,n}} && \text{si} \quad h < -\, d^\circ g \\ &= 0 && \text{si} \quad h \geqslant -\, d^\circ g \end{aligned}$$

donc $|I_{m,n}| \leqslant \text{mes } D$, si $(m , n) \in K$, et $I_{m,n} = 0$, si $(m , n) \notin K$.

LEMME 3 [4]. - Soit $\mathcal{B} = \alpha + \mathcal{P}^d$ une boule contenue dans $\mathcal{P}$. Soit $\varepsilon_{\mathcal{B}}$ la fonction caractéristique du saturé de la boule $\mathcal{B}$ par rapport à $\mathcal{H}$, i. e.

$$\varepsilon_{\mathcal{B}}(\theta) = \begin{cases} 1 & \underline{\text{si}} \quad \mathcal{H}(\theta) \in \mathcal{B} \\ 0 & \underline{\text{sinon}} \end{cases}$$

Alors,

$$\varepsilon_{\mathcal{B}}(\theta) = q^{1-d}\Big(1 + \sum_{\substack{d^\circ g = 0 \\ g \neq 0}}^{d^\circ g = d-2} \overline{\chi_0}(g(x)\alpha)\, \chi_0(g(x)\theta)\Big) \quad .$$

Preuve. - Dans l'espace préhilbertien des fonctions complexes continues définies sur $\mathcal{P}$ muni du produit scalaire $\int_{\mathcal{P}} \varphi_1(\theta)\, \overline{\varphi_2}(\theta)\, d\theta = (\varphi_1|\varphi_2)$, le système $(\chi_0(g(x).))_{g\in F_q[x]}$ est orthonormal total d'après Stone-Weierstrass, et nous aurons de façon **unique** :

$$\varepsilon_{\mathcal{B}}(\theta) = \sum_{g\in F_q[x]} a_g\, \chi_0(g(x)\theta) \quad ,$$

avec

$$a_g = \int_{\wp} \varepsilon_{\mathcal{B}}(\theta)\ \overline{\chi_0}(g(x)\theta)\ d\theta$$

$$= q^{1-d}\ \overline{\chi_0}(g(x)\alpha) \int_{\wp} \chi_0(g(x)x^{1-d}\ \theta)\ d\theta$$

ce qui démontre le lemme 3 en utilisant le lemme 1.

Soit $r(\mathcal{B}, \theta)$ la fonction de $F_q\{x^{-1}\}$ dans $\underset{\approx}{R}$ définie par

$$r(\mathcal{B}, \theta) = \varepsilon_{\mathcal{B}}(\theta) - q^{1-d} \qquad \text{pour toute boule } \mathcal{B} \subseteq \wp .$$

Alors

$$R_N(\mathcal{B}, \theta) = \sum_{n=1}^{N} r(\mathcal{B}, f_n(\theta)) ,$$

et si $0 \leqslant N_1 < N_2$, posons

$${}_{N_1}R_{N_2}(\mathcal{B}, \theta) = \sum_{n=N_1+1}^{N_2} r(\mathcal{B}, f_n(\theta))$$

de sorte que ${}_0R_N = R_N$, et si $N_1 < N_2 < N_3$, ${}_{N_1}R_{N_2} + {}_{N_2}R_{N_3} = {}_{N_1}R_{N_3}$.

LEMME 4. - $\omega(N)$ <u>désigne un réel positif et</u> $H(N)$ <u>un entier positif. Si</u> θ <u>est tel que</u>

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \chi_0(g(x)\ f_n(\theta))\right| \leqslant \omega(N) \qquad \underline{\text{pour}}\ \ g \in F_q[x]^* \ \ \underline{\text{et}}\ \ 0 \leqslant d^\circ g \leqslant H(N) .$$

<u>alors</u>

$$ND_N(\theta) \leqslant Nq^{-H(N)} + \omega(N) .$$

<u>Preuve</u>. - D'après le lemme 3

$$|R_N(\mathcal{B}, \theta)| = q^{1-d} \Sigma_d^* \left|\sum_{n=1}^{N} \chi_0(g(x)\ f_n(\theta))\right| ,$$

où Σ_d^* est la sommation sur tous les polynômes non nuls tels que $d^\circ g \leqslant d - 2$.

Si $d \leqslant H(N) + 2 \implies |R_N(\mathcal{B}, \theta)| \leqslant q^{1-d} \Sigma_d^* \left|\sum_{n=1}^{N} \chi_0(g(x)\ f_n(\theta))\right| \leqslant \omega(N)$.

Si $d > H(N) + 2$, soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_0 = \alpha + \wp^{H(N)+2}$.

En utilisant $0 \leqslant F_N(\mathcal{B}, \theta) \leqslant F_N(\mathcal{B}_0, \theta) \leqslant N$ et $0 < \text{mes } \mathcal{B} < \text{mes } \mathcal{B}_0$, il vient

$$R_N^2(\mathcal{B}, \theta) \leqslant \omega^2(N) + 2N\omega(N)q^{-H(N)} + N^2\ q^{-2H(N)} .$$

Soit maintenant, pour tout entier $T \geqslant 1$, $\mathcal{N}_T$ l'ensemble des couples d'entiers (N_1, N_2) du type $0 \leqslant N_1 < N_2 \leqslant 2^T$, $N_1 = u2^t$, $N_2 = (u+1)2^t$, pour des entiers u et $t \geqslant 0$.

LEMME 5. - $\sum_{(N_1,N_2)\in\mathcal{N}_T} \int_D |\sum_{N_1<n\leqslant N_2} \chi_0(g(x)\, f_n(\theta))|^2 \, d\theta \leqslant (T+1) K_{2^T}$ mes D, pour <u>tout polynôme</u> $g \in F_q[x]^*$.

Il suffit d'utiliser le lemme 2 et d'estimer la somme

$$\sigma = \sum_{(N_1,N_2)\in\mathcal{N}_T} \sum_{(m,n)\in K(N_1,N_2)} 1 \leqslant (T+1) K_{2^T} .$$

De même

$$\sum_{(N_1,N_2)\in\mathcal{N}_T} \int_D {}_{N_1}R^2_{N_2}(\beta, \theta)\, d\theta < (T+1) K_{2^T} \text{ mes } D .$$

Soit $E_T(\beta)$ l'ensemble des $\theta \in D$ tels que

$$\sum_{(N_1,N_2)\in\mathcal{N}_T} {}_{N_1}R^2_{N_2}(\beta, \theta) \geqslant T^{2+\varepsilon} K_{2^T} .$$

Alors, mes $D\,(T+1) K_{2^T} \geqslant$ mes $E_T(\beta)\, T^{2+\varepsilon} K_{2^T}$, donc mes $E_T(\beta) \leqslant 2$ mes $D T^{-1-\varepsilon}$.
La série $\sum_{T\geqslant 1}$ mes $E_T(\beta)$ étant convergente, pour presque tout $\theta \in D$, il existe $T_0 = T_0(\theta)$ tel que $\theta \notin E_T(\beta)$, pour $T \geqslant T_0$. Supposons $N \geqslant N_0 = 2^{T_0}$. Alors, il existe un $T \geqslant T_0$ tel que $2^{T-1} < N \leqslant 2^T$. En exprimant N en base 2, on obtient

$$R_N(\beta, \theta) = \sum_{(1)} {}_{N_1}R_{N_2}(\beta, \theta) ,$$

où la somme (1) se fait sur au plus T couples $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}_T$, donc en utilisant l'inégalité de Cauchy

$$R^2_N(\beta, \theta) < T^{3+\varepsilon} K_{2^T} < K_{2N} \log^{3+2\varepsilon} N ,$$

pour N suffisamment grand, ce qui prouve la première assertion du théorème 1.

Pour démontrer la deuxième, considérons $E_T(g)$ l'ensemble des $\theta \in D$ tels que

$$\sum_{(N_1,N_2)\in\mathcal{N}_T} |\sum_{N_1<n\leqslant N_2} \chi_0(g(x)\, f_n(\theta))|^2 \geqslant \frac{1}{2}\, 2^{T/2}\, T^{2+\varepsilon} K_{2^T} .$$

Alors, mes $E_T(g) \leqslant 4$ mes $D\, 2^{-T/2}\, T^{-1-\varepsilon}$. Soit a_T un entier tel que

$$q^{a_T - 1} \leqslant 2^{T/2} < q^{a_T} ,$$

et soit

$$E_T = \bigcup_{0 \leqslant d^\circ g \leqslant a_T} E_T(g) \implies \text{mes } E_T = O(T^{-1-\varepsilon})$$

et $\sum_{T \geqslant 1} \text{mes } E_T$ est convergente. Il suffit alors d'utiliser le lemme 4 et un raisonnement analogue au précédent.

4. Etude des sommes de fonctions vérifiant la condition (B).

Soient N et r des entiers positifs. Avec les N entiers $n = 1 , 2 , \dots , N$ on peut former N^r r-uples distincts. Nous noterons un r-uple tel que $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \dots \leqslant n_r$ par $\{n_1 , \dots , n_r\}$ ou $\{n\}$, avec $n(i) = n_i$, et nous dirons que c'est un r-uple ordonné d'ordre N .

Il y a $B(N , r) = \binom{N + r - 1}{r}$ r-uples ordonnés distincts d'ordre N . En effet, r étant donné, il y a $B(N , r - 1)$ r-uples ordonnés d'ordre N tels que $n(r) = N$ et il y en a $B(N - 1 , r)$ tels que $n(r) < N$. Donc

$$B(N , r) = B(N , r - 1) + B(N - 1 , r) .$$

Le résultat s'obtient alors par récurrence sur N et r .

DÉFINITIONS.

1° Si $\{n\}$ et $\{m\}$ sont deux r-uples ordonnés, nous dirons que le premier est plus grand que le second

$$\{n\} > \{m\}$$

si pour un certain entier τ $(1 \leqslant \tau \leqslant r)$

$$n(\tau) > m(\tau) , \quad m(\nu) = n(\nu) \quad (\nu = \tau + 1 , \dots , r) .$$

2° Deux r-uples distincts seront dits p-complémentaires si, pour tout ν : $1 \leqslant \nu \leqslant r$

- ou bien $n(\nu) = m(\nu)$

- ou bien $n(\nu) \neq m(\nu)$, et il existe $k(\nu)$ $(1 \leqslant k(\nu) \leqslant \nu)$ et $h(\nu) \geqslant 1$ tels que

$$n(k(\nu)) = \dots = n(\nu) = \dots = n(k(\nu) + h(\nu) - 1)$$

$$m(k(\nu)) = \dots = m(\nu) = \dots = m(k(\nu) + h(\nu) - 1)$$

et $\sup_{k(\nu)} h(\nu) \equiv 0 \pmod p$.

LEMME 6. - <u>Soit</u> (f_n) <u>une suite de fonctions vérifiant</u> (B). <u>Soient</u> $\{n\}$ <u>et</u> $\{m\}$ <u>deux</u> <u>r-uples distincts. Alors la fonction</u>

$$F = F(\{n\} , \{m\}) = \sum_{\nu=1}^{r} f_{n(\nu)} - f_{m(\nu)}$$

<u>est identiquement nulle sur</u> D <u>si</u> $\{n\}$ <u>et</u> $\{m\}$ <u>sont</u> p-<u>complémentaires. Sinon, il existe</u> $\Lambda \in \underset{\sim}{Z}$ <u>tel que</u> $\forall\ \theta_1 , \theta_2 \in D$

$$(3) \qquad \begin{cases} |F(\theta_1) - F(\theta_2)| = q^{\Lambda}|\theta_1 - \theta_2| \\ \Lambda + 1 + d \geqslant 0 \end{cases}$$

<u>Preuve</u>. - Nous pouvons écrire en éliminant les termes nuls

$$(4) \qquad F = \sum_{k=1}^{h} (f_{n(\nu_k)} - f_{m(\nu_k)})$$

avec $1 \leqslant h \leqslant r$, $1 \leqslant \nu_k \leqslant 1$ $(k = 1 , \ldots , h)$ et $n(\nu_k) \neq m(\nu_k)$.

Si nous ajoutons les termes égaux dans (4), nous aurons

$$F = \sum_{i=1}^{\ell} \overline{a_i}(f_{n(\mu_i)} - f_{m(\mu_i)}) \quad ,$$

où $1 \leqslant \ell \leqslant h$, où la suite (μ_i) est une sous-suite de (ν_k) et où les $\overline{a_i}$ sont des entiers modulo p avec $a_i \geqslant 1$ et $\sum_{i=1}^{\ell} a_i = h$. Donc F est identiquement nulle sur D si, et seulement si, tous les $\overline{a_i}$ sont nuls, ce qui revient à dire que $\{n\}$ et $\{m\}$ sont p-complémentaires. S'ils ne le sont pas, soit j tel que le maximum des $\Lambda_{n(\mu_i)}$ (qui sont tous distincts) soit atteint en j , alors

$$\left|\frac{F(\theta_1) - F(\theta_2)}{\theta_1 - \theta_2}\right| = q^{\Lambda} \quad ,$$

où $\Lambda = \max(\Lambda_{n(\mu_j)} , \Lambda_{m(\mu_j)})$.

Un r-uple n'admet un r-uple p-complémentaire inférieur que si la fonction n est constante et supérieure à 1 sur p indices consécutifs. Soit alors $\{n\}$ un tel r-uple.

Il existe des entiers t , ν , ν_1 , ... , ν_t , ℓ tels que

$$1 \leqslant t \leqslant [\frac{r}{p}]$$

$$0 \leqslant \nu \leqslant r - pt$$

$$1 \leqslant \ell \leqslant r - pt - \nu$$

$$0 \leqslant \nu_i \ , \quad i = 1 \ , \ \dots \ , \ t$$

$$\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_t = \nu \quad .$$

On pose $\mu_i = \ell + (i - 1)p + \nu_1 + \dots + \nu_{i-1}$, pour $i = 1 , \dots , t + 1$. Alors, pour tout $i = 1 , \dots , t$, la fonction n vérifie

(5) $$n(\mu_i) = \dots = n(\mu_i + p - 1) \leqslant n(\mu_i + p) \leqslant \dots \leqslant n(\mu_{i+1}) \quad ,$$

et de plus, la fonction n'est pas constante sur p indices consécutifs parmi $(1 , \dots , \ell - 1)$, $(\mu_i + p , \dots , \mu_{i+1} - 1)$, pour $i = 1 , \dots , t$ et $(\mu_{t+1} , \dots , r)$. Nous dirons alors que $\{n\}$ est de type t .

LEMME 7. - Soit $\varphi(n)$ le nombre de $\{m\} < \{n\}$ tels que $\{m\}$ et $\{n\}$ soient p-complémentaires. Alors si $\{n\}$ est d'ordre N

(6) $$\varphi(n) \leqslant B(N , t) .$$

Preuve. - Si $t = 1$, alors $\varphi(n) = n(\ell) - n(\ell - 1)$ en posant $n(0) = 1$. Donc $\varphi(N) \leqslant N = B(N , 1)$. Supposons maintenant $t \geqslant 2$. Pour $i = 1 , \dots , t$ la fonction n vérifie l'un des trois cas suivants :

(a) $0 < \nu_i$ et $\exists\ \omega_i$ tel que $p - 1 \leqslant \omega_i < \min(2p - 1 , \nu_i + p - 1)$ et $n(\mu_i) = \dots = n(\mu_i + \omega_i) < n(\mu_i + \omega_i + 1) \leqslant \dots \leqslant n(\mu_i + p - 1 + \nu_i) < n(\mu_{i+1})$.

(b) $0 < \nu_i \leqslant p - 1$ et $n(\mu_i) = n(\mu_i + p - 1 + \nu_i) < n(\mu_{i+1})$.

(c) $\nu_i = 0$ et $n(\mu_i) = n(\mu_i + p - 1) \leqslant n(\mu_{i+1})$.

Remarquons que si n vérifie (a), pour i, et si $\{m\}$ et $\{n\}$ sont p-complémentaires, les fonctions m et n coïncident sur les indices $\mu_i + \omega_i + 1$, ... $\mu_i + p - 1 + \nu_i$. Nous ne changerons donc pas $\varphi(n)$ en supprimant les indices $\mu_i + \omega_i + 2$, ... , $\mu_i + p - 2 + \nu_i$. D'autre part, si nous supprimons les indices $\mu_i + p$, ... , $\mu_i + p - 1 + \nu_i$, nous ne diminuerons pas $\varphi(n)$. En raisonnant de même pour le cas (b), on se ramène à des r'-uples $(r' \leqslant r)$ d'ordre N , de type t et tels que la fonction n vérifie (c), pour $i = 1 , \dots , t$. Il est clair que le maximum des $\varphi(n)$ est atteint quand $n(\mu_1)$ est maximum, donc égal à N . Puisque la fonction m est alors constante sur p indices consécutifs $\varphi(n) \leqslant B(N , t) - 1$.

LEMME 8.- Soit un entier $r \geqslant 1$, alors

(7) $$r^r e^{-r+1} \leqslant r! \leqslant r^{r+1} e^{-r+1} .$$

Soient $\nu_1 , \nu_2 , \dots , \nu_t , \nu$ des entiers positifs ou nuls, alors

(8) $$\gamma(t , \nu) = \sum_{\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_t=\nu} 1 = \frac{(\nu + t - 1)!}{\nu! (t - 1)!} .$$

Soient N et r deux entiers positifs et $\varepsilon = \pm 1$, alors

(9) $$|N(N + \varepsilon) \dots (N + (r - 1)\varepsilon) - N^r| \leqslant (r - 1)r! N^{r-1} .$$

(7) se démontre en passant aux logarithmes. Pour (8), il suffit de remarquer que $\gamma(t , \nu) = \gamma(t - 1 , \nu) + \gamma(t , \nu - 1)$. (9) se démontre par récurrence sur r .

LEMME 9. - Soient N , r , p trois entiers tels que $N \geqslant r \geqslant 2$ et $p \geqslant 3$. Soit $\Phi_p(N , r)$ le nombre de couples r-uples d'ordre N égaux ou p-complémentaires. Alors

(10) $$|\Phi_p(N , r) - r! N^r| \leqslant e^{-2r/3} r^{2r+6} N^{r-1} .$$

Preuve. - Si $2 \leqslant r < p$, il n'y a pas de couples de r-uples p-complémentaires donc $\Phi_p(N , r)$ est égal au nombre de r-uples formés avec $1 , \dots , N$. Un r-uple ordonné admet au plus $r!$ permutations distinctes et si la fonction n est strictement croissante, il en admet exactement $r!$. Donc

$$r!\binom{N}{r} \leqslant \Phi_p(N , r) \leqslant r! B(N , r)$$

qui donne (10) en utilisant (9).

Si $p \leqslant r$, soit $\varphi_p(t)$ $(t = 1 , \dots , [\frac{r}{p}])$ le nombre de couples de r-uples ordonnés de type t et p-complémentaires. Le nombre de permutations distinctes d'un r-uple ordonné de type t est au plus $r! (p!)^{-t}$. Donc

$$\Phi_p(N , r) \leqslant (r!)^2 B(N , r) + \sum_{1\leqslant t\leqslant[\frac{r}{p}]} (r!)^2 (p!)^{-2t} \varphi_p(t) ,$$

où

$$\varphi_p(t) \leqslant 2 \sum_{0\leqslant\nu\leqslant r-pt} \sum_{1\leqslant\ell\leqslant r-pt-\nu} \sum_{\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_t=\nu} \sum_{\{n\}} \varphi(n) .$$

D'après le lemme 7, si $\{n\}$ est de type t , $\varphi(n) \leqslant B(N , t)$, et quand $t , \nu , \ell , \nu_1 , \dots , \nu_t$ sont fixés, il existe au plus $B(N , r - (p - 1)t)$ r-uples ordonnés d'ordre N, de type t vérifiant (5). Nous aurons alors en utilisant (8)

$$\varphi_p(t) \leqslant 2 \sum_{0 \leqslant \nu \leqslant r-pt} (r - pt - \nu)\,\gamma(t\,,\,\nu)\; B(N\,,\, r - (p-1)t)\; B(N\,,\,t)$$

et

$$\sum_{0 \leqslant \nu \leqslant r-pt} (r - pt - \nu)\,\gamma(t\,,\,\nu) \leqslant (r - pt) \sum_{0 \leqslant \nu \leqslant r-pt-1} \frac{(\nu + t - 1)!}{\nu!\,(t-1)!}$$

$$\leqslant (r - pt)\,\frac{(r - (p-1)t - 1)!}{(r - pt - 1)!\;t!} \quad .$$

En utilisant (7) et (9) il vient

$$(r!)^2\, B(N\,,\,r) \leqslant r!\; N^r + r^{2r+3}\, e^{-2r+2}\, N^{r-1}$$

et

$$B(N\,,\, r - (p-1)t)\; B(N\,,\,t) \leqslant (r - (p-1)t)t\; N^{r-(p-1)t+t} \quad ,$$

donc pour $t \geqslant 1$, le terme général de $\Phi_p(N\,,\,r)$ est majoré par

$$2(r!)^2\,(p!)^{-2t}\,(r - pt)\,\frac{(r - (p-1)t)!}{(r - pt - 1)!\;(t-1)!}\; N^{r-(p-2)t} \quad ,$$

d'où en remarquant que $p \geqslant 3 \implies r - (p-2)t \leqslant r - 1$ et en utilisant (7), il vient, en regroupant

$$\Phi_p(N\,,\,r) \leqslant r!\; N^r + \left(r^{2r+3}\, e^{-2r+2} + \frac{2r}{p^2}\,\frac{r^{2r+5}}{(p!)^2}\, e^{-(1-1/p)r+1}\right) N^{r-1}$$

soit

$$\Phi_p(N\,,\,r) \leqslant r!\; N^r + e^{-2r/3}\, r^{2r+6}\, N^{r-1} \quad .$$

Pour minorer $\Phi_p(N\,,\,r)$, il suffit de remarquer qu'il y a $\binom{N}{r}$ r-uples ordonnés strictement croissants qui admettent $r!$ permutations distinctes, donc

$$\Phi_p(N\,,\,r) \geqslant (r!)^2 \binom{N}{r} \geqslant r!\; N^r - e^{-2r/3}\, r^{2r+3}\, N^{r-1} \quad .$$

5. Démonstration de la relation (Di).

La démonstration repose sur le lemme ci-après :

LEMME 10.

(11) $$\int_D \Big| \sum_{n=1}^{N} \chi_0(g(x)\, f_n(\theta)) \Big|^{2r} d\theta = \text{mes}\, D\; \Phi_p(N\,,\,r) \quad ,$$

pour tout polynôme g non nul de $F_q[x]$.

Preuve. - Soit $A\{n_1, \dots, n_r\} = A\{n\}$ le nombre de permutations distinctes du r-uple ordonné $\{n_1, \dots, n_r\} = \{n\}$. Alors

$$|\sum_{n=1}^{N} \chi_0(g(x)\ f_n(\theta))|^{2r} = \{\sum_{n=1}^{N} \chi_0(g(x)\ f_n(\theta))\}^r \{\sum_{n=1}^{N} \chi_0(-\ g(x)\ f_n(\theta))\}^r$$

$$= \{\sum_{\{n\}} A\{n\}\ \chi_0(g(x)[f_{n_1}(\theta) + \dots + f_{n_r}(\theta)])\}$$

$$\times \{\sum_{\{m\}} A\{m\}\ \chi_0(-\ g(x)[f_{m_1}(\theta) + \dots + f_{m_r}(\theta)])\}$$

$$= \sum_{\{n\}} \sum_{\{m\}} A\{n\}\ A\{m\}\ \chi_0(g(x) \sum_{\nu=1}^{r} f_{n_\nu}(\theta) - f_{m_\nu}(\theta)) \quad .$$

Si $\{n\} = \{m\}$ ou si $\{n\}$ et $\{m\}$ sont p-complémentaires

$$\int_D \chi_0(g(x)\ F(\theta))\ d\theta = \text{mes } D \quad ,$$

où $F = \sum_{\nu=1}^{r} f_{n_\nu} - f_{m_\nu}$. Sinon F vérifie (3) d'après le lemme 6, et en utilisant les lemmes 1 et 2

$$\int_D \chi_0(g(x)\ F(\theta))\ d\theta = 0$$

ce qui démontre (11).

LEMME 11. - S'il existe une suite non décroissante d'entiers positifs $H(N)$ et une suite non décroissante $\psi(N)$ telles que la série

$$\sum_{N\geq 1} q^{H(N)}(r! + e^{-2r/3}\ r^{2r+6}\ N^{-1})\ \psi^{-2r}(N) \tag{12}$$

soit convergente alors, pour presque tout θ de D, pour tout polynôme $g \in F_q[x]^*$ de degré inférieur ou égal à $H(N)$ et dès que $N \geqslant N_0(\theta)$, l'inégalité suivante est vérifiée

$$|\sum_{n=1}^{N} \chi_0(g(x)\ f_n(\theta))| \leqslant N^{1/2}\ \psi(N) \quad . \tag{13}$$

Preuve. - Soit $E_g(N)$ l'ensemble des θ de D tels que

$$|\sum_{n=1}^{N} \chi_0(g(x)\ f_n(\theta))| \geqslant N^{1/2}\ \psi(N) \ ,$$

alors d'après le lemme 10

$$\text{mes } E_g(N) \leqslant \text{mes } D\ (r!\ N^r + e^{-2r/3}\ r^{2r+6}\ N^{r-1})\ N^{-r}\ \psi^{-2r}(N)) \quad .$$

Soit $E(N)$ la réunion des $E_g(N)$, pour tous les polynômes g de $F_q[x]^*$ de degré inférieur ou égal à $H(N)$, alors

$$\text{mes } E(N) \leqslant \text{mes } D\, q^{H(N)+1}(r! + e^{-2r/3}\, r^{2r+6}\, N^{-1})\, \psi^{-2r}(N)) \quad .$$

Si la série (12) est convergente, sauf pour un ensemble de mesure nulle, il existe $N_0(\theta)$ tel que, pour $N \geqslant N_0(\theta)$, $\theta \notin E(N) \implies \theta \notin E_g(N)$, pour $0 \leqslant d^o g \leqslant H(N)$ ce qui entraîne (13).

Prenons $\psi(N) = e^{-0,01 \log N}$, $r = r(N) = [\log N]$, pour $N \geqslant e^{p+1}$ et $H(N) = [\frac{\log \sqrt{N}}{\log q} + 1]$. Le terme général de la série (12) est alors majoré par

$$q \log^2 N(N^{0,52-\log\log N} + eN^{-1,1} \log^6 N)$$

qui est le terme général d'une série convergente. Alors, sauf pour un ensemble de mesure nulle,

$$\begin{aligned} ND_N(\theta) &\leqslant N^{1/2}(1 + e^{-0,01} \log N) \\ &\leqslant N^{1/2} \log N \qquad \text{dès que } N \text{ est assez grand.} \end{aligned}$$

6. Etude de $\Phi(t) = \text{mes}\{\theta \in \Delta \;;\; F(N, \theta) = |\sum_{n=1}^{N} \chi_0(f_n(\theta))| \geqslant \sqrt{tN \log \log N}\}$

LEMME 12. - Soit Δ un disque de rayon q^δ contenu dans D . Si la suite (f_n) vérifie (B) sur Δ , alors

$$(14) \qquad \Phi(t) \leqslant \begin{cases} 54 \text{ mes } \Delta \dfrac{\log\log N}{(\log N)^t} & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant 3 \\[2ex] 18 \text{ mes } \Delta \dfrac{\log\log N}{t^{2\log\log N}} & \text{pour } 3 \leqslant t \leqslant N \end{cases}$$

pour tout $N \geqslant N_0$, où N_0 est indépendant de Δ et de la suite (f_n) .

Posons $I = \int_\Delta |\sum_{n=1}^{N} \chi_0(f_n(\theta))|^{2r} d\theta$, alors, pour $N \geqslant N_0$, si $2 \leqslant r \leqslant 3 \log\log N$

$$|I - \text{mes } \Delta\, r!\, N^r| \leqslant r^{2r+6}\, N^{r-1} \text{ mes } \Delta \quad .$$

La démonstration de (14) se fait alors comme celle du lemme 7, page 74 de [4].

LEMME 13. - Soit ε , $0 < \varepsilon < 1/2$ arbitraire. Alors, si (f_n) satisfait (B) sur Δ

$$(15) \qquad \Phi(1 - \varepsilon) > \frac{\text{mes } \Delta}{(\log N)^{1-\varepsilon^4/16}}$$

dès que $N \geq N_0(\varepsilon)$, où $N_0(\varepsilon)$ est indépendant de Δ et de la suite (f_n).

(Pour une démonstration analogue, voir [10], pages 57-60.)

7. Démonstration de la relation " $\leqslant 1$ " de (Li).

La suite (f_n) vérifie (B) sur D . Posons

$$\psi(N) = \sqrt{N \log \log N} \qquad \text{pour} \quad N > N_0$$

$$F(M , N ; \theta) = \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} \chi_0(f_n(\theta)) \right| \qquad \text{pour} \quad M \geqslant 0 , \quad N \geqslant 1 .$$

Posons, par convention, $F(M , 0 ; \theta) = 0$ pour $M \geqslant 0$. Nous voulons démontrer que

(16)
$$\limsup_{N \to \infty} \frac{F(0 , N ; \theta)}{\psi(N)} \leqslant 1 ,$$

pour presque tout θ de D . Il est suffisant de prouver le lemme suivant :

LEMME 14. - Soient $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ des nombres arbitraires, alors il existe un $N_0 = N_0(\varepsilon , \eta)$ tel que

(17)
$$F(0 , N ; \theta) \leqslant (1 + \varepsilon) \psi(N) ,$$

pour tout $N \geqslant N_0$ et pour tout $\theta \in D$, sauf peut-être sur un ensemble de mesure au plus égale à η mes D .

La démonstration est identique à celle du lemme 11 de [4], pages 80-84.

8. Démonstration de la relation " $\geqslant 1$ " de (Li).

Nous supposerons maintenant que la suite (Λ_n) est croissante. Nous voulons démontrer que

(18)
$$\limsup_{N \to \infty} \frac{F(0 , N ; \theta)}{\psi(N)} \geqslant 1 ,$$

pour presque tout θ de D . Il est suffisant de prouver le lemme suivant :

LEMME 15. - Soient $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ arbitrairement petits, et soit N un entier arbitrairement grand. Alors, il existe une suite finie d'entiers $N < N_1 < N_2 < \dots < N_k$ tels que

(19)
$$\max_{1 \leqslant \nu \leqslant k} \frac{F(0 , N_\nu ; \theta)}{\psi(N_\nu)} \geqslant 1 - \varepsilon ,$$

pour tout θ n'appartenant pas à un ensemble de mesure au plus égale à η mes D .

Soit $\varepsilon > 0$ donné, $a \geqslant a_0(\varepsilon)$ et $u \geqslant 1$ des entiers arbitraires dont nous fixerons la valeur à la fin de la démonstration. Posons

$$F_k(\theta) = F(a^u + a^{u+1} + \ldots + a^{u+k-1} , a^{u+k} ; \theta)$$

$$\psi_k = \psi(a^{u+k})$$

$$E_0 = \emptyset$$

(20) $$E_k = \{\theta \in D - (E_1 + E_2 + \ldots + E_{k-1}) ; \; F_k(\theta) \geqslant (1 - \tfrac{\varepsilon}{2}) \psi_k\}$$

pour $k = 1 , 2 , \ldots$ Nous nous proposons de majorer

$$\text{mes}(D - (E_1 + \ldots + E_k)) \quad .$$

Soit $\Omega_k = \Lambda_{a^u + a^{u+1} + \cdots + a^{u+k}}$. Puisque $\chi_0(f_n(\theta))$ est constante sur les q^{Λ_n+2+d} boules de rayon $q^{-2-\Lambda_n}$ contenues dans D, l'ensemble

$$\{\theta \in D ; \; F_k(\theta) < (1 - \tfrac{\varepsilon}{2}) \psi_k\}$$

est une réunion de boules de rayon $q^{-2-\Omega_k}$ en nombre au plus égal à $q^{1+\Omega_k}$ mes D. En particulier, $D - E_1$ est constitué par un nombre de boules $\alpha_1 \leqslant$ mes $D \, q^{\Omega_1+1}$. D'après (20)

$$D - (E_1 + \ldots + E_k) = (D - (E_1 + \ldots + E_{k-1})) \cap \{\theta \in D ; \; F_k(\theta) < (1 - \tfrac{\varepsilon}{2}) \psi_k\}$$

et puisque $\Omega_k > \Omega_{k-1}$ (car la suite (Λ_n) est croissante), $D - (E_1 + \ldots + E_k)$ est constitué par au plus $q^{1+\Omega_k}$ mes D boules de rayon $q^{-2-\Omega_k}$. Puisque

$$- 2 - \Omega_k + 1 + \Lambda_{1+a^u+\cdots+a^{u+k}} \geqslant 0 \quad ,$$

nous pouvons utiliser le lemme 13

$$\text{mes } E_{k+1} \geqslant \frac{\text{mes}(D - (E_1 + \ldots + E_k))}{(u + k + 1) \log a}$$

et

$$\text{mes } E_1 \geqslant \frac{\text{mes } D}{(u + 1) \log a} \quad .$$

De ces inégalités, nous obtenons par récurrence sur k

$$\text{mes}(D - (E_1 + \ldots + E_k)) \leqslant \left[\prod_{\nu=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{(u + \nu) \log a}\right) \right] \text{mes } D \; .$$

Introduisons la notation

$$N_k = a^u + a^{u+1} + \ldots + a^{u+k} \qquad (k \geqslant 0) \quad ,$$

et définissons les ensembles E'_k $(k \geq 1)$

(21) $$E'_k = \{\theta \in D \; ; \; F(0 , N_{k-1} ; \theta) \geq \sqrt{2}\, \psi(N_{k-1})\} \; .$$

La mesure de E'_k est estimée à l'aide du lemme 12

$$\text{mes } E'_k \leq \frac{54 \text{ mes } D \log \log N_{k-1}}{(\log N_{k-1})^2} \leq \frac{\text{mes } D}{2(u + k - 1)^{3/2}}$$

en tenant compte du fait que $a \geq a_0$. D'où

$$\frac{1}{\text{mes } D} \sum_{\nu=1}^{k} \text{mes } E'_\nu \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u^{3/2}} + \frac{1}{(u + 1)^{3/2}} + \ldots\right) < \frac{1}{\sqrt{u - 1}} \; .$$

Alors

(22) $$\text{mes}(D - (E_1 + \ldots + E_k)) + \text{mes}(E'_1 \cup \ldots \cup E'_k)$$
$$< \left[\prod_{\nu=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{(u + \nu) \log a}\right) + \frac{1}{\sqrt{u - 1}} \right] \text{mes } D$$

Démontrons maintenant le lemme 15. Puisque $F(M , N ; \theta) \geq 0$,

$$\frac{F(0 , N_\nu ; \theta)}{\psi(N_\nu)} \geq \frac{F_\nu(\theta)}{\psi_\nu} \frac{\psi_\nu}{\psi(N_\nu)} - \frac{F(0 , N_{\nu-1} ; \theta)}{\sqrt{2}\, \psi(N_{\nu-1})} \frac{\sqrt{2}\, \psi(N_{\nu-1})}{\psi(N_\nu)} \; .$$

Il est facile de voir que

$$\frac{\psi_\nu}{\psi(N_\nu)} \geq \frac{\log u}{(1 + \frac{2}{a}) \log(u + 1)} > \frac{1}{(1 + \frac{2}{a})(1 + \frac{1}{u})} \; ,$$

pour $\nu = 1 , 2 , \ldots \; ; a \geq 2$ et $u \geq 3$. De même on montre que

$$\psi(N_{\nu-1})/\psi(N_\nu) < \sqrt{\frac{2}{a - 1}} \qquad \text{pour } \nu = 1 , 2 , \ldots \; ; a \geq 2 \text{ et } u \geq 0 \; .$$

D'où nous tirons

$$\frac{F(0 , N_\nu ; \theta)}{\psi(N_\nu)} \geq \frac{F_\nu(\theta)}{\psi_\nu} \frac{1}{(1 + \frac{2}{a})(1 + \frac{1}{u})} - \frac{F(0 , N_{\nu-1} ; \theta)}{\sqrt{2}\, \psi(N_{\nu-1})} \sqrt{\frac{4}{a - 1}} \; ,$$

pour tout $\nu = 1 , 2 , \ldots \; ; \; a \geq 2$ et $u \geq 3$. Si nous nous restreignons aux θ appartenant à l'ensemble

$$E = (E_1 + \ldots + E_k) \cap (D - (E'_1 \cup \ldots \cup E'_k)) \; ,$$

alors d'après (22), $F(0 , N_{\nu-1} ; \theta) < \sqrt{2}\, \psi(N_{\nu-1})$ pour tout $\nu = 1 , 2 , \ldots , k$

et d'après (20), $\frac{F_\nu(\theta)}{\psi_\nu} \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, pour un certain $\nu = \nu(\theta) \leqslant k$. Donc pour les θ de E , nous aurons

$$\max_{1 \leqslant \nu \leqslant k} \frac{F(0\ ,\ N_\nu\ ;\ \theta)}{\psi(N_\nu)} \geqslant (1 - \frac{\varepsilon}{2}) \frac{1}{(1 + \frac{2}{a})(1 + \frac{1}{u})} - \sqrt{\frac{4}{a - 1}} \quad .$$

De plus, d'après (22) nous avons

$$\frac{\text{mes } E}{\text{mes } D} \geqslant 1 - \prod_{\nu=1}^{k} (1 - \frac{1}{(u + \nu) \log a}) - \frac{1}{\sqrt{u - 1}} \quad .$$

Il est maintenant facile de démontrer le lemme 15. Soient $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ et N donnés. Choisissons $a = a(\varepsilon)$ tel que $a \geqslant a_0(\varepsilon)$, $a > N$

$$\sqrt{\frac{4}{a - 1}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{1 + \frac{2}{a}} \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{4} \quad .$$

Alors $N_\nu > N$ $(\nu \geqslant 1)$ est satisfait. Puis choisissons $u = u(\varepsilon\ ,\ \eta) \geqslant 3$ tel que $\frac{1}{1 + 1/u} \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{4}$ et que $\frac{1}{\sqrt{u - 1}} < \frac{\eta}{2}$. Enfin nous choisissons $k = k(\varepsilon\ ,\ \eta)$ tel que

$$\prod_{\nu=1}^{k} (1 - \frac{1}{(u + \nu) \log a}) \leqslant \frac{\eta}{2} \quad .$$

Alors (19) est vérifié pour l'ensemble E et $\text{mes } E \geqslant (1 - \eta) \text{ mes } D$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERTRANDIAS (Françoise). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques, Bull. Soc. math. France, Mémoire n° 4, 1965, VI + 98 p. (Thèse Sc. math. Paris, 1965).

[2] CARLITZ (L.). - Diophantine approximations in fields of characteristic p , Trans. Amer. math. Soc., t. 72, 1952, p. 187-208.

[3] CASSELS (J. W. S.). - Some metrical theorems in diophantine approximation, Part III, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 46, 1950, p. 219-225.

[4] ERDÖS (P.) and GÁL (I. S.). - On the law of the iterated logarithm, Koninkl. nederl. Akad. Wetensch., Proc., Series A, t. 58, 1955, p. 65-84.

[5] ERDÖS (P.) and KOKSMA (J. F.). - On the uniform distribution modulo 1 of sequences $(f(n\ ,\ \theta))$, Koninkl. nederl. Akad. Wetensch., Proc., Series A, t. 52, 1949, p. 851-854.

[6] GÁL (I. L.) and GÁL (I. S.). - The discrepancy of the sequence $\{(2^n x)\}$, Koninkl. nederl. Akad. Wetensch., Proc., Series A, t. 67, 1964, p. 129-143.

[7] KHINČIN (A. Ja.). - Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Fund. Math., Warszawa, t. 6, 1924, p. 9-20.

[8] MATHAN (Bernard de). - Sur un théorème métrique d'équirépartition modulo 1 dans un corps de séries formelles sur un corps fini, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, t. 265, 1967, p. 289-291.

[9] RHIN (Georges). - Deux théorèmes métriques sur l'équirépartion modulo 1 dans un corps de séries formelles sur un corps fini, Thèse de 3e cycle, Faculté des Sciences de Caen, 1967.

[10] STACKELBERG (Olaf P.). - On the law of the iterated logarithm, I et II, Koninkl. nederl. Akad. Wetensch., Proc., Series A, t. 67, 1964, p. 48-67.