MARIE-CLAUDE DURIX

Inégalités de Cauchy et théorème d'unicité

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 9, nº 2 (1967-1968), exp. nº G9, p. G1-G7
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1967-1968__9_2_A15_0>

Groupes d'Études de
THÉORIE DES NOMBRES
Année 1967/68, n° 9

26 février 1968

INÉGALITÉS DE CAUCHY ET THÉORÈME D'UNICITÉ

par Marie-Claude DURIX

1. Rappel : Inégalités de Cauchy.

Soit K un corps valué ultramétrique complet algébriquement clos. On étudie la série de Taylor sur K :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i \quad .$$

Soit R le rayon de convergence de cette série. Si $r < R$, on pose :

$$M_f(r) = \sup_{i \geq 0} |a_i|_p r^i \quad .$$

THÉORÈME 1. - Inégalités de Cauchy ([1], p. 58) :

$$\sup_{|x|_p = r} |f(x)|_p = M_f(r) \quad .$$

THÉORÈME 2. - Principe du maximum ([1], p. 62) :

$$|x|_p < r \implies |f(x)|_p < M_f(r) \quad ,$$

sauf si $|f(x)|_p$ est constant pour $|x|_p < r$.

THÉORÈME 3. - Cas où $|x|_p = r$ ([2], p. 101) : Si $|x|_p = r$, $|f(x)|_p < M_f(r)$ a lieu si, et seulement si, il existe un zéro z de f dans k tel que

$$|x - z|_p < |x|_p \quad .$$

Démonstration.

(a) Si $f(z) = 0$, considérons la série $f(z + x)$: c'est une série en x, sans terme constant, qui converge pour $|x + z|_p \leq r$, donc pour $|x|_p \leq r$.

$$f(x + z) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i (x + z)^i$$

$$|f(x + z)|_p \leq \sup_i |a_i|_p |x + z|_p^i$$

$$|f(x+z)|_p \leqslant \sup_i |a_i|_p (\sup(|x|_p \, , \, |z|_p))^i \quad .$$

D'où, si $|x|_p \leqslant r$:

$$|f(x+z)|_p \leqslant \sup_i |a_i|_p \, r^i$$

$$\sup_{|x|_p \leqslant r} |f(x+z)|_p \leqslant \sup_i |a_i|_p \, r^i \quad .$$

Donc, d'après les inégalités de Cauchy appliquées à $f(x+z)$ et à $f(x)$:

$$M_{f(x+z)}(r) \leqslant M_{f(x)}(r) \quad .$$

Un raisonnement analogue conduit à

$$M_{f(x)}(r) \leqslant M_{f(x+z)}(r) \quad .$$

D'où

$$M_{f(x)}(r) = M_{f(x+z)}(r) \quad .$$

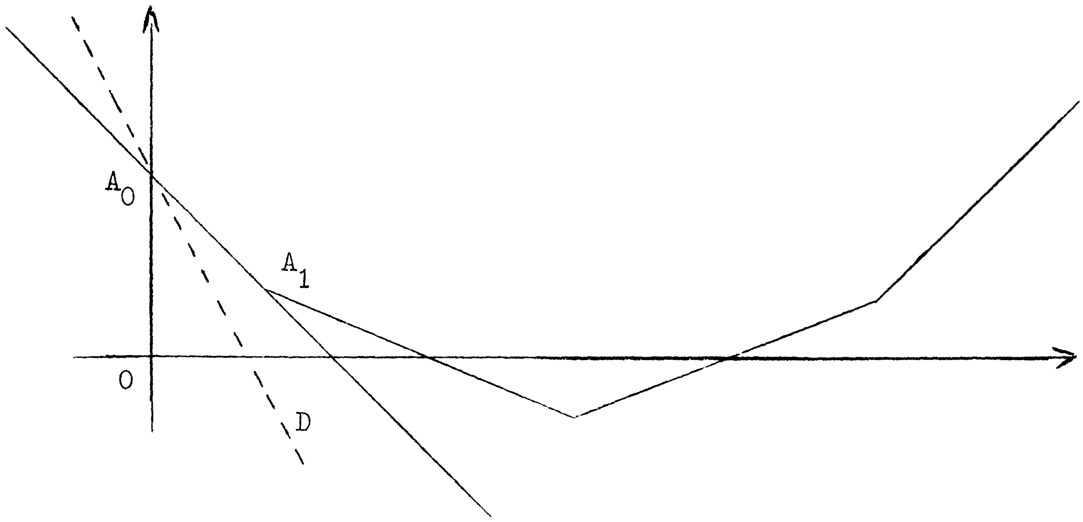
$f(z+x)$ n'a pas de terme constant ; donc $M_{f(z+x)}(r')$ est une fonction croissante de r' si $r' < r$:

$$|x| = r' \implies |f(z+x)| \leqslant M_{f(z+x)}(r') < M_{f(z+x)}(r)$$

d'où $|f(z+x)| < M_{f(x)}(r)$ si $|x| < r$.

(b) Soit a tel que $f(x)$ ne s'annule pas pour $|x-a|_p < |a|_p = r$.

La série $f(a+x)$ ne s'annule pas pour $|x|_p < r$. Etudions le polygone de Newton de cette série. Son premier sommet est $A_0(0 \, , \, v[f(a)])$:



Le premier côté de ce polygone a pour pente $-\log_p \rho$, avec $\rho \geq r$, puisque ρ est la valeur absolue d'au moins un zéro de $f(a+x)$.

Soit D la droite passant par A_0 de pente $-\log_p r'$, tel que $r' < r \leqslant \rho$.

Puisque $r' < r$, l'un des termes de $f(x+a)$ a un module plus grand que ceux des autres : on voit sur la figure que c'est celui qui correspond à A_0 . Donc

$$|f(x+a)|_p = |f(a)|_p \qquad \text{si} \quad |x|_p = r' < r$$

et

$$|f(x+a)|_p = M_{f(x+a)}(r') \qquad \text{si} \quad |x|_p = r' < r \quad .$$

$M_{f(x+a)}(r') = |f(a)|_p$ est constant si $r' < r$. Pour $r' = r$, on aura encore $M_{f(x+a)}(r) = |f(a)|_p$. On a vu en (a) que $M_{f(x+a)}(r') = M_{f(x)}(r')$ si $r' \leqslant r$. Donc

$$|f(a)|_p = M_{f(x+a)}(r) = M_{f(x)}(r) \quad .$$

2. Cas des fonctions méromorphes ([2], p. 102).

Soient $g(x)$ et $h(x)$ deux séries de Taylor de rayon de convergence R . $f = \frac{g}{h}$ est une fonction méromorphe dans $C(0\ ,\ R)$. Posons

$$M_f(r) = \frac{M_g(r)}{M_h(r)} \quad .$$

On vérifie facilement que la fonction de r ainsi définie est la même quelle que soit la représentation $\frac{g}{h}$ de f . Cette fonction, définie sur l'intervalle $[0\ ,\ R]$ y possède les propriétés suivantes :

1° $M_f(r)$ est continue et monomiale par morceaux (c'est-à-dire que $[0\ ,\ R]$ peut être considéré comme une réunion d'intervalles où $M_f(r)$ est un monôme en r) ;

2° s'il n'existe aucun pôle q de f tel que $|q| = r \leqslant R$, on a :

$$M_f(r) = \sup_{|x|_p = r} |f(x)|_p \quad ;$$

3° s'il n'existe aucun pôle q de f tel que $|x-q| < |x|$, on a :

$$|f(x)| \leqslant M_f(|x|) \quad ;$$

4° s'il n'existe aucun pôle q de f sur le sous-intervalle $]r_1\ ,\ r_2[$ de $[0\ ,\ R]$, et si I est un sous-intervalle de $[r_1\ ,\ r_2]$ tel que $M_f(r) = cr^n$ si

$r \in I$, on a $M_f(r) \geqslant cr^n$ pour tout r tel que $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$.

Soit $\mathfrak{M}_r$ l'anneau des fonctions méromorphes dans le cercle $C(0 , r)$ et n'ayant aucun pôle de valeur absolue r .

Définition. - Si $f_1 , f_2 \in \mathfrak{M}_r$, on appellera distance de f_1 et f_2 dans $\mathfrak{M}_r$:

$$d_r(f_1 , f_2) = M_{f_1-f_2}(r) = \sup_{|x|=r} |f_1(x) - f_2(x)|_p = \sup_{|x|=r} d(f_1(x) , f_2(x)) .$$

$d_r(f_1 , f_2)$ est une distance ultramétrique. Si $f_1 , f_2 \in \mathfrak{M}_r$, elles vérifient les relations :

$$(\alpha) \begin{cases} M_{f_2}(r) \leqslant \max[M_{f_1}(r) , M_{f_2-f_1}(r)] \\ |M_{f_1}(r) - M_{f_2}(r)| \leqslant M_{f_2-f_1}(r) \\ M_{f_2-f_1}(r) < M_{f_1}(r) \implies M_{f_1}(r) = M_{f_2}(r) \end{cases}$$

THÉORÈME. - Les inégalités (α) sont vraies pour tout $r \in (0 , R)$ si f_1 et f_2 sont méromorphes dans le cercle $C(0 , R)$.

Démonstration. - Les valeurs $r \in (0 , R)$ telles que f_1 ou f_2 a des pôles de valeur absolue r forment une suite discrète, donc sont limites des valeurs $r' \in (0 , R)$ telles que $f_1 , f_2 \in \mathfrak{M}_{r'}$. Comme $M_f(r)$ est, pour f fixé, une fonction continue de r , les inégalités (α) ont lieu aussi pour ces valeurs.

3. Eléments analytiques et théorème d'unicité [2].

Soit $k' = k \cup \{\infty\}$ le "projectivisé" de k .

DÉFINITION 1. - Soit D un sous-ensemble de k' de diamètre R , et soit $a \in D$, $a \neq \infty$. D est dit ultra-ouvert en a si, quel que soit $r \leqslant R$, il n'y a qu'un nombre fini de distances $d(a , y) \leqslant r$ telles que $y \notin D$.

DÉFINITION 2. - Le sous-ensemble D de k' est dit quasi-connexe s'il contient au moins deux points et s'il est ultra-ouvert en chacun de ses points distincts de ∞ .

PROPRIÉTÉS [3].

1° Le transformé d'un ensemble quasi-connexe par une homographie non singulière est quasi-connexe.

2° <u>L'intersection d'un nombre fini d'ensembles quasi-connexes est quasi-connexe ou vide</u>.

3° <u>La réunion d'une famille enchaînée d'ensembles quasi-connexes est quasi-connexe</u>.

DÉFINITION 3. - D étant un ensemble quasi-connexe contenu dans un corps complet algébriquement clos k, la fonction $f : D \to k$ est dite <u>élément analytique de support</u> D s'il existe une suite $f_1 , f_2 , \ldots , f_n , \ldots$ de fractions rationelles appartenant à $k(x)$ et sans pôle sur D, qui converge uniformément vers $f(x)$ sur D.

THÉORÈME d'unicité ([2], p. 101). - <u>Soient</u> f <u>et</u> f' <u>deux éléments analytiques de supports</u> D, D' <u>non disjoints, et soit</u> $\Delta \subseteq D \cap D'$ <u>un ensemble de points, ayant un point limite</u> $a \in D \cap D'$, <u>et tel que, pour tout</u> $x \in \Delta$, <u>on ait</u> $f(x) = f'(x)$. <u>Alors</u>, f <u>et</u> f' <u>coïncident partout sur</u> $D \cap D'$.

Ce théorème est équivalent à la proposition suivante :

<u>Si</u> f <u>est un élément analytique de support</u> D, <u>qui est nul sur un ensemble</u> $\Delta \subseteq D$, <u>ayant un point limite</u> $a \in D$, f <u>est nul partout sur</u> D.

<u>Plan de la démonstration</u>. - Soient f un élément analytique de support D contenant 0, et $f_1 , f_2 , \ldots , f_n$ une suite approximante de f.

<u>Définition</u>. - R étant le diamètre de D, $r \leqslant R$ sera dit valeur exceptionnelle s'il existe $y \notin D$ tel que $|y| = r$.

<u>Remarque</u>. - D étant ultra-ouvert en 0, les valeurs exceptionnelles forment une suite finie.

LEMME 1. - <u>La suite</u> $M_{f_n}(r)$ <u>converge uniformément, et sa limite est une fonction continue de</u> r.

LEMME 2. - <u>La limite de</u> $M_{f_n}(r)$ <u>ne dépend que de</u> f <u>et non de la suite approximante</u> $f_1 , f_2 , \ldots , f_n , \ldots$

LEMME 3. - <u>Les</u> M_{f_i} <u>sont tous égaux à partir d'un certain rang</u>.

LEMME 4. - <u>Si</u> $M_f(r)$ <u>n'est pas identiquement nulle sur</u> $(0 , R)$, $M_f(r) \neq 0$ <u>quel que soit</u> r <u>tel que</u> $0 < r \leqslant R$ <u>et</u> $r \neq + \infty$.

<u>Cas où $a = 0$</u>. - $f(x) = 0$ pour tout x appartenant à Δ qui a pour point limite 0.

Soit $r_1 > 0$ la première valeur exceptionnelle. Aucune f_n n'a des pôles de valeur absolue inférieure à r_1 (puisqu'elles n'ont pas de pôles dans D). Par suite, toute f_n peut se représenter par une série de Taylor convergeant pour $|x| < r_1$ et il en est de même pour f , en vertu du théorème de Weierstrass.

S'il existe un ensemble $\Delta \subseteq D$ ayant 0 comme point limite, où f s'annule, la série de Taylor, qui représente f pour $|x| < r_1$, est identiquement nulle : $f(x) = 0$ si $|x| < r_1$, f est limite des f_n :

$$\forall\ \varepsilon\ ,\quad \exists\ N \text{ tel que } n > N \implies |f_n(x)| < \varepsilon \qquad \text{si } |x| < r_1$$

donc $M_{f_n}(r) < \varepsilon$ si $r < r_1$.

Si $r < r_1$, on a :

$$M_f(r) = \lim M_{f_n}(r) = 0\ .$$

D'après le lemme 4, ceci entraîne que $M_f(r) = 0$ pour tout $r \in (0\ ,\ R)$.

Si $x \in D$ est tel qu'il n'existe aucun $y \notin D$ tel que $d(x\ ,\ y) < |x|$, aucune f_n ne possède dans D de pôle q tel que $|x - q| < |x|$, et l'on a pour tout n :

$$|f_n(x)| \leqslant M_{f_n}(|x|)$$

d'où

$$|f(x)| = \lim |f_n(x)| \leqslant \lim M_{f_n}(|x|) = M_f(|x|) = 0\ ,$$

et $f(x) = 0$.

Si $a \neq 0$, on en déduit que si $x \in D$ est tel qu'il n'existe aucun $y \notin D$ tel que $d(x\ ,\ y) < d(x\ ,\ a)$, on a $f(x) = 0$.

Conclusion. - Soit $x_0 \in D$ quelconque. Puisque D est ouvert, il existe un cercle $C \subset D$ de centre x_0 , de rayon non nul, et on peut supposer que $a \notin C$. Soit α un élément arbitraire de C , autre que x_0 . On démontre qu'on se ramène au cas précédent en faisant l'homographie $x' = \dfrac{1}{x - \alpha}$, et on en déduit que $f(x_0) = 0$.

4. Conséquences ([2], p. 110).

Définition. - E étant un sous-ensemble de k' , une fonction

$$F\ :\ E \to k$$

sera appelée <u>fonction analytique localement uniforme sur</u> E , s'il existe une famille enchaînée I d'éléments analytiques f de k telle que :

1° D_f désignant le support d'un élément analytique f , les D_f (où f parcourt I) forment un recouvrement de E ;

2° Si f , $f' \in I$ sont tels que $D_f \cap D_{f'} \neq \emptyset$, f et f' se prolongent ;

3° Pour tout $a \in E$, $F(a)$ est la valeur commune que prennent, en a , tous les $f \in I$ tels que $a \in D_f$.

On démontre que toute fonction localement uniforme est globalement uniforme, et que l'analycité est préservée par les opérations rationnelles : addition, dérivation, inversion, substitution.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLOCH (Simon). - Analyse p-adique et ensembles remarquables d'adèles algébriques, Faculté des Sciences de Paris, 1967.

[2] KRASNER (Marc). - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, Colloques internationaux du CNRS : Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres [143. 1964. Clermont-Ferrand], p. 97-141. - Paris, Centre National de la Recherche Scientifique, 1966.

[3] KRASNER (Marc). - Prolongement analytique dans les corps valués complets..., C. R. Acad. Sc. Paris, t. 238, 1954, p. 2385-2387, t. 239, 1954, p. 468-470 et p. 745-747.