GILLES CHRISTOL

Formes modulaires et nombres de Ramanujan

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 9, n° 2 (1967-1968), exp. n° G8, p. G1-G4
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1967-1968__9_2_A14_0>

Groupe d'Etudes de
THÉORIE DES NOMBRES
Année 1967/68, n° 8

12 février 1968

FORMES MODULAIRES ET NOMBRES DE RAMANUJAN

par Gilles CHRISTOL

DÉFINITION. - On appelle groupe modulaire, et on note Γ , le groupe $SL(2 , \mathbb{Z})$, c'est-à-dire le groupe des matrices $(2 , 2)$, à coefficients entiers et de déterminant 1 .

Γ opère sur le demi-plan H (défini par $\mathrm{Im}(z) > 0$) suivant :

(1) $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . z = \frac{az + b}{cz + d} .$$

DÉFINITION. - Un domaine fondamental D de Γ est un ouvert de H maximal parmi les ouverts contenant un point au plus dans chaque orbite $\Gamma . z$. Par exemple, l'ensemble défini par $|z| > 1$, $|\mathrm{Re}(z)| < 1/2$, est domaine fondamental de Γ .

<u>Remarque</u>. - Cette définition n'est pas universelle, on en rencontre de nombreuses autres, toutes aussi peu satisfaisantes, car les systèmes de représentant de $\Gamma \setminus H$ ont une nature topologique compliquée.

DÉFINITION. - Une forme modulaire de poids k est une fonction méromorphe dans $\{H + i\infty\}$ [1], et qui vérifie, pour tout T de Γ ,

(2) $$f(T . z) = (cz + d)^k f(z) , \qquad \text{où} \quad T = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ c & d \end{pmatrix} .$$

<u>Remarques</u>. - Puisque T et $(- T)$ représentent la même transformation, $f(z) = 0$ si k est impaire. Ceci explique que l'on trouve comme définition du poids, au lieu de k , $2k$ (textes français) ou $(- k)$ (textes allemands).

Puisque les translations $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ font partie de Γ , une forme modulaire est périodique de période 1 ; elle peut donc se développer en série de Fourier :

$$f(z) = \sum_{n \geq N} a(n)\, x^n , \qquad \text{avec} \quad x = e^{2\pi i z} .$$

Les $a(n)$ sont appelés les coefficients de Fourier de f ; l'existence du N est équivalente à f méromorphe en $(i\infty)$.

---

[1] $(i\infty)$ désigne le point à l'infini de l'axe imaginaire.

DÉFINITION. - Une forme est dite <u>entière</u>, si elle est régulière (sans pôle) dans H . Sa série de Fourier converge alors dans H .

Une forme est dite <u>régulière</u>, si elle est entière et si $N \geqslant 0$ (régularité en $(i\infty)$).

Une forme est dite <u>parabolique</u> (spizenform, cuspform), si $N \geqslant 1$ (nulle en $(i\infty)$).

Les formes entières, régulières, paraboliques, de poids k , forment des espaces respectivement notés : C_k , C_k^+ , C_k^0 .

THÉORÈME 1. - <u>L'espace C_k^+ est de dimension finie, et on a</u> :

$$\dim(C_k^+) = \dim(C_k^0) + 1 = \varkappa \ .$$

K <u>est nul si</u> $k < 0$, <u>si</u> $k \geqslant 0$ <u>on a les formules</u> (k <u>est un entier pair</u>) :

$$\varkappa = [\tfrac{k}{12}] , \qquad \text{si } k = 2 \pmod{12} ,$$

$$\varkappa = [\tfrac{k}{12}] + 1 , \qquad \text{si } k \neq 2 \pmod{12} .$$

<u>Les seules formes régulières de poids inférieur à 4 sont donc les constantes</u> $(k = 0)$.

<u>Les séries d'Eisenstein</u> : La série $\sum'_{c,d} \frac{1}{(cz + d)^k}$ (où le ' indique que le couple $(0 , 0)$ est à omettre) converge pour $k \geqslant 4$, et définit ainsi une forme régulière G_k de poids k . On peut établir les relations suivantes :

$$G_k(z) = 2\zeta(k)\ E_k(z) = 2\zeta(k)(1 + \alpha_k \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n)\ x^n) \quad ,$$

$$\alpha_k = \frac{2(-1)^{k/2}\ k}{B_{k/2}} ; \qquad \sigma_k = \sum_{d|n} d^k \qquad (B \text{ , nombres de Bernoulli}) \ .$$

G_k est la série d'Eisenstein de poids k , et E_k la série d'Eisenstein normalisée. Il est évident que, sous la deuxième forme, les séries d'Eisenstein sont régulières mais non paraboliques.

THÉORÈME 2. - <u>Toute forme régulière est un polynôme en E_4 et E_6 (notons au passage que</u> $\alpha_4 = 240$, $\alpha_6 = -504$, <u>et</u> $\alpha_{12} = \frac{54600}{691}$).

Le théorème 1 montre que $\varkappa = 1$ pour $k = 4 , 6 , 8 , 10$; donc la forme parabolique de poids minimum sera obtenue pour $k = 12$; d'après le théorème 2, elle sera une combinaison linéaire des formes E_4^3 et E_6^2 (les seuls monômes en E_4 et E_6

qui soient de poids 12), il suffit donc d'assurer $N \geqslant 1$, on trouve donc (après normalisation) :

$$E_4^3 - E_6^2 = (3\alpha_4 - 2\alpha_6)(x - 24x^2 + 252x^3 + \dots) = 1728\Delta \quad .$$

Les coefficients de Fourier de Δ s'appellent nombres de Ramanujan, et sont notés $\tau(n)$; HURWITZ (1881) a démontré dans sa thèse que

$$\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\, x^n = x \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^m)^{24} \quad ,$$

ce qui démontre, en particulier, que les $\tau(n)$ sont entiers. La connaissance des E_k et l'unicité de Δ (à une constante près) en tant que forme parabolique de poids 12 permet de trouver des relations entre les $\tau(n)$ et les $\sigma_k(n)$ (voir RAMANUJAN).

Nous définirons (PETERSON) le produit suivant :

$$\langle f \, , \, g\rangle = \iint_D f(z)\, \overline{g(z)}\, y^k \frac{dx\, dy}{y^2} \qquad (\text{ici} \quad z = x + iy) \quad ,$$

c'est un produit hermitien indépendant du domaine D , fondamental, choisi, ce produit a un sens du moment qu'une fonction appartient à C_k^+ et l'autre à C_k^0 ; en particulier, E_K est orthogonale aux formes de C_k^0 ; sur C_k^0 , ce produit permet de trouver des bases orthonormées.

THÉORÈME 3. - <u>Il existe $\varkappa$ fonctions de C_k^+ dont les coefficients de Fourier vérifient</u> :

$$(3) \qquad \begin{cases} a(mn) = a(m)\, a(n) \quad \text{pour} \quad (m \, , \, n) = 1 \, , \quad \underline{\text{ce qui entraîne}} \quad a(1) = 1 \quad , \\ a(p^{m+1}) = a(p^m)\, a(p) - p^{k-1}\, a(p^{m-1}) \quad \underline{\text{pour}} \quad p \quad \underline{\text{premier}} \quad , \end{cases}$$

<u>et qui forment une base orthonormée de C_k^+ : ce système est unique.</u>

<u>Remarques</u>. - Nous savons, d'après ce qui précède, que E_k/α_k fait partie de cette base (comme fonction de $C_k^+ - C_k^0$ orthogonale à C_k^0 et ayant son premier coefficient de Fourier égal à 1 , comme (3) l'impose).

La condition (3) est équivalente à :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = \prod_p (1 - a(p)\, p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1} \qquad (\ p \quad \text{premier}) \quad .$$

(Il serait intéressant d'étudier le prolongement de cette fonction.) Par ce procédé (attacher une série de Dirichlet à une forme de C_k^+), on transforme $(E_k - 1)/\alpha_k$ en $\zeta(s)\ \zeta(s - k + 1)$.

Dans le cas $k = 12$, la deuxième fonction de la base ne peut évidemment être que Δ ; le théorème 3 a donc pour conséquence que les $\tau(n)$ vérifient les conditions (3).

La bibliographie sur ce sujet est très importante, on pourra consulter comme ouvrages élémentaires :

GUNNING (R. C.). - Lectures on modular forms. - Princeton, Princeton University Press, 1962 (Annals of Mathematics Studies, 48).

LEHNER (Joseph). - A short course in automorphic function. - New York, Holt, Rinehart and Winston, 1966 (Selected Topics in Mathematics).

Voir aussi la dernière partie de l'ouvrage suivant :

SERRE (J.-P.). - Compléments d'arithmétique. Cours aux "Carrés", rédigé par J.-P. Ramis et G. Ruget. - Paris, Ecole Normale Supérieure, 1964.