Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

François Dress

Théorie additive des nombres. Densité de Schnirelman

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 9, nº 2 (1967-1968), exp. nº G7, p. G1-G4

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1967-1968__9_2_A13_0>

Groupe d'Études de
THÉORIE DES NOMBRES
Année 1967/68, n° 7

29 janvier 1968

THÉORIE ADDITIVE DES NOMBRES
DENSITÉ DE SCHNIRELMAN

par François DRESS

1. Définitions.

On considère des suites d'entiers $1 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_k < \ldots$ et on pose $A(n) = \sum_{1 \leqslant a_k \leqslant n} 1 = \mathrm{Card}\{a_k \mid 1 \leqslant a_k \leqslant n\}$. On définit alors la densité de Schnirelman de la suite $A = (a_k)$,

$$d(A) = \inf_n \frac{A(n)}{n} \quad .$$

Cette définition appelle deux remarques. Primo, on a $1 \in A$ dès que $d(A) > 0$. Secundo, la notion de densité de Schnirelman est très différente de la notion de densité asymptotique d'une suite, définie par $\liminf \frac{A(n)}{n}$. En particulier, $d(A) = 1$ équivaut à $A = \underset{\sim}{N}$, alors que $d.\mathrm{asympt}.(A) = 1$ équivaut à "presque tous les entiers appartiennent à A" ; indiquons enfin une notion intermédiaire, "tous les entiers assez grands appartiennent à A", notion fréquemment utilisée (théorème de Vinogradov sur les entiers impairs sommes de trois nombres premiers, fonction $G(k)$ du problème de Warring).

On définit la somme de deux suites comme la réunion

$$A + B = A \cup B \cup \{a_i + b_j \mid a_i \in A\ ,\ b_j \in B\} \quad .$$

On pourrait aussi bien convenir que $a_0 = 0 \in A$ et $b_0 = 0 \in B$, et poser

$$A + B = \{a_i + b_j\} \ .$$

On utilisera les notations $2A = A + A$, $hA = A + A + \ldots + A$.

On dit qu'une suite A est une base d'ordre h si $hA = \underset{\sim}{N}$ (par exemple, la suite des carrés est une base d'ordre 4).

2. Théorèmes de Schnirelman.

THÉORÈME. - $d(A + B) \geqslant d(A) + d(B) - d(A)d(B)$ ([1]).

Ce théorème n'est pas très fort, mais il permet néanmoins la démonstration d'un résultat important.

LEMME. - $d(A) + d(B) \geq 1 \implies A + B = \underset{\sim}{N}$.

COROLLAIRE. - Toute suite de densité strictement positive est une base.

En effet, l'inégalité de Schnirelman peut s'écrire

$$(1 - d(A + B)) \leq (1 - d(A))(1 - d(B)) .$$

Il s'ensuit, en particulier, que $(1 - d(hA)) \leq (1 - d(A))^h \leq \frac{1}{2}$ si $d(A) > 0$ et $h \geq h_0$. Et le lemme précédent entraîne immédiatement que $2h_0\ A = \underset{\sim}{N}$.

THÉORÈME. - La suite $P = \{1\} \cup \{$nombres premiers$\}$ est une base ([1]).

La démonstration utilise simplement le résultat précédent après avoir montré par une méthode de crible que la somme $P + P$ possèdait une densité positive.

La méthode utilisée pour la démonstration permet de calculer effectivement des constantes numériques. Les résultats sont d'ailleurs assez catastrophiques ; les meilleur datent de 1956 et sont : Tout nombre entier est somme d'au plus 2.10^{10} nombres premiers, tout nombre entier supérieur à $\exp(\exp(16\ 038))$ est somme d'au plus 4 nombres premiers.

3. Théorème de Mann.

THÉORÈME. - $d(A + B) \geq \min(d(A) + d(B)\ ,\ 1)$ ([4]).

C'est en un sens le meilleur résultat possible. Si par exemple

$$A = B = (1\ ,\ \lambda + 1\ ,\ 2\lambda + 1\ ,\ \ldots)\ ,$$

alors $A + B = (1\ ,\ 2\ ,\ \lambda + 1\ ,\ \lambda + 2\ ,\ 2\lambda + 1\ ,\ 2\lambda + 2\ ,\ \ldots)$, tandis que l'on a $d(A) = d(B) = \frac{1}{\lambda}$ et $d(A + B) = \frac{2}{\lambda} = d(A) + d(B)$ donc.

4. Composantes essentielles.

Une conséquence des théorèmes de Schnirelman et de Mann est qu'une suite M de densité strictement positive augmente la densité de toute suite A telle que $0 < d(A) < 1$: $d(A + M) > d(A)$.

Mais il existe des suites de densité nulle qui possèdent également cette propriété (par exemple la suite des carrés des entiers : KHINČIN [2]). Toute suite possédant cette propriété s'appelle une composante essentielle.

ERDÖS a démontré que toute base était une composante essentielle ou, plus précisément, le résultat suivant :

THÉORÈME. - Si B est une base d'ordre h alors, pour toute suite A telle que $0 < d(A) < 1$, on a $d(A+B) \geqslant d(A) + \frac{d(A)(1-d(A))}{2h}$ ([3]) .

Cette inégalité a été améliorée, mais pas très sensiblement. De fait, on a montré que l'inégalité $d(A+B) \geqslant d(A) + \frac{d(A)(1-d(A))}{h}$ était fausse.

Après ce théorème d'Erdös, la question qui se pose naturellement est de savoir s'il existe des composantes essentielles qui ne soient pas des bases (ni, a fortiori, des suites de densité positive). Il en existe un exemple trivial :

$$M = (2, 3, 4, 5, \ldots) .$$

M n'est pas une base car $1 \notin M$ ni $1 \notin hM$ pour tout h, mais $d(A+M) = 1 > d(A)$ dès que $d(A) > 0$, car alors $1 \in A$ et $A + M = \underset{\sim}{N}$.

Le premier exemple "intéressant" de composante essentielle M qui ne soit pas une base est dû à LINNIK [5] . Cet exemple satisfait $M(n) = o(x^{\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$ mais il n'est pas constructible avec des méthodes "élémentaires".

STÖHR et WIRSING [9] ont donné un exemple élémentaire vérifiant seulement $M(n) = o(n)$. Leur construction est fondée sur un résultat précédent de STÖHR montrant qu'il est possible d'obtenir des bases B_h d'ordre h, vérifiant $B_h(n) = o(n)$ et augmentant uniformément la densité de toute suite de densité positive (i. e. $d(A) > 0 \Rightarrow d(A + B_h) \geqslant d(A) + \frac{d(A)(1-d(A))}{2}$ pour toute B_h).

5. Problème de Waring.

Le résultat que la suite $A^{(k)} = (1, 2^k, 3^k, \ldots, n^k, \ldots)$ est une base date de 1909 (HILBERT).

Une démonstration "élémentaire" en a été donnée par LINNIK [6], puis simplifiée par KHINČIN [7]. Le principe est le même que dans le cas de la suite P : montrer qu'il existe ℓ_k tel que $\ell_k A^{(k)}$ possède une densité positive.

6. Problèmes divers.

L'imagination des mathématiciens s'est donnée libre cours pour poser, et parfois résoudre, de nombreux problèmes en théorie additive des nombres.

On en donnera juste un exemple (LORENTZ, [8]) :

THÉORÈME. - A toute suite A on peut associer une suite B qui vérifie :

- tous les entiers assez grands appartiennent à $A + B$;
- $B(n) \leqslant c \sum_{k=1}^{n} \frac{\log A(k)}{A(k)}$.

Si $d(A) = \delta > 0$ par exemple, on en déduit $\frac{\log A(k)}{A(k)} \leqslant \frac{\log \delta k}{\delta k}$ (car $A(k) \geqslant \delta k$), et donc que la suite B est assez rare : $B(n) \leqslant c' \log^2 n$ (inégalité qui ne peut être améliorée, comme l'a montré ERDÖS par des arguments probabilistes, i. e. en mettant une mesure sur l'espace des suites).

BIBLIOGRAPHIE HISTORIQUE

[1] SCHNIRELMAN.(L.). - Sur les propriétés additives des nombres [en russe], Izv. Donetz polytech. in. ta., t. 14, 1930, p. 3-28.

[2] KHINČIN (A. Ja.). - Über ein metrisches Problem der additiven Zahlentheorie, Mat. Sbornik, N. S., t. 40, 1933, p. 180-189.

[3] ERDÖS (P.). - On the arithmetical density of the sum of two sequences, one of which forms a basis for the integers, Acta Arithm., Warszawa, t. 1, 1936, p. 197-200.

[4] MANN (Henry B.). - A proof of the fundamental theorem on the density of sums of sets of positive integers, Annals of Math., 2e série, t. 43, 1942, p. 523-527.

[5] LINNIK (U. V.). - On Erdös's theorem on the addition of numerical sequences, Mat. Sbornik, N. S., t. 52, 1942, p. 67-78.

[6] LINNIK (U. V.). - Solution élémentaire du problème de Waring d'après la méthode de Schnirelman [en russe], Mat. Sbornik, N. S., t, 54, 1943, p. 225-230.

[7] KHINČIN (A. Ja.). - Trois théories liées en théorie des nombres, Fizmatgiz, 1948.

[8] LORENTZ (G. G.). - On a problem of additive number theory, Proc. Amer. Math. Soc., t. 5, 1954, p. 838-841.

[9] STÖHR (Alfred) und WIRSING (Eduard). - Beispiele von wesentlichen Komponenten, die keine Basen sind, J. für reine und angew. Math., t. 196, 1956, p. 96-98.

OUVRAGES

[10] KHINČIN (A. Ja.). - Three pearls in the theory of numbers. - Rochester, Graylock Press, 1952.

[11] HALBERSTAM (H.). and ROTH (K. F.). - Sequences. Vol. 1. - Oxford, at the Clarendon Press, 1966.

[12] OSTMANN (Hans Heinrich). - Additive Zahlentheorie. - Berlin, Göttingen, Heidelber, Springer-Verlag, 1956 (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge. Heft 11).