

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MONIQUE NONNOTTE

Approximations rationnelles des nombres algébriques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 9, n° 2 (1967-1968),
exp. n° G5, p. G1-G9

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1967-1968__9_2_A11_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

APPROXIMATIONS RATIONNELLES DES NOMBRES ALGÈBRIQUES

par Monique NONNOTTE

1. Introduction.

(A). - Le problème initial a été celui-ci : Soient $\alpha \in \underline{\mathbb{R}}$, algébrique de degré $n \geq 2$, et $f : \underline{\mathbb{N}} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}^+$ une application donnée ; peut-on étudier alors les rationnels $\frac{h}{q} \in \mathbb{Q}$ (avec $(h, q) = 1$ et $q > 0$), vérifiant $|\alpha - \frac{h}{q}| \leq f(q)$?

L'intérêt s'est porté plus particulièrement sur $f(q) = \frac{K}{q^\rho}$ (avec $\rho \in \underline{\mathbb{R}}^+$), et sur le nombre de solutions éventuelles.

La question a été posée ainsi :

Si $|\alpha - \frac{h}{q}| \leq \frac{K}{q^\rho}$ a une infinité de solutions, que peut-on dire de ρ ?

Or, dès que α est irrationnel, les réduites de son développement en fraction continue, sont en nombre infini et vérifient toutes

$$|\alpha - \frac{h_K}{q_K}| \leq \frac{1}{2q_K},$$

donc on ne pourra obtenir mieux que $\rho \leq 2$.

LIUVILLE, en 1844, prouve que

$$|\alpha - \frac{h}{q}| > \frac{A(\alpha)}{q^n}, \quad \forall \frac{h}{q} \in \mathbb{Q}, \quad \alpha \text{ algébrique de degré } n \geq 2,$$

donc $\rho \leq n$.

Puis les résultats, de plus en plus précis, ont été obtenus :

THUE (1908) : $\rho \leq \frac{1}{2}n + 1$;

SIEGEL (1921) : $\rho \leq s + \frac{n}{s+1}$ pour $s = 1, 2, \dots, n-1$, donc $\rho \leq 2\sqrt{n}$;

DYSON (1947) : $\rho \leq \sqrt{2n}$.

SIEGEL conjecture le premier : $\rho \leq 2$.

ROTH le démontre en 1955 ([4]).

(B). - De nombreuses généralisations ont été faites :

- soit en astreignant h , ou q , à une condition arithmétique supplémentaire,
- soit en recherchant les approximations rationnelles d'un nombre α algébrique p -adique, ou g -adique, ou g^* -adique.

Ainsi, RIDOUT [3], élève de ROTH, a suivi sa méthode et a démontré que :

Si $n \geq 2$, si $f(x) = a_0 x^n + \dots + a_n \in \mathbb{Z}[x]$ a un zéro $\zeta \in \mathbb{R}$, $\zeta_1 \in \mathbb{Q}_{p_1}$, $\zeta_r \in \mathbb{Q}_{p_r}$, et si

$$|\zeta - \frac{h}{q}|^* \prod_{j=1}^r (h - q\zeta_j)_{p_j}^* \leq [\max(|h|, q)]^{-\rho}$$

a une infinité de solutions, alors $\rho \leq 2$ [$M^* = \min(1, M)$].

Et MAHLER [2], par une méthode légèrement différente, donne une généralisation plus large :

Soit $(p_1, \dots, p_r, p_{r+1}, \dots, p_{r+r'}, p_{r+r'+1}, \dots, p_{r+r'+r''})$ un système fixé de $r + r' + r''$ nombres premiers distincts (r, r', r'' peuvent être nuls); soient ξ réel algébrique, ξ_1 p_1 -adique algébrique (tous $\neq 0$), ξ_r p_r -adique algébrique, alors, si

$$|\xi - \frac{h}{q}|^* \prod_{j=1}^r |\xi_j - \frac{h}{q}|_{p_j}^* \prod_{j=r+1}^{r+r'} |h|_{p_j} \prod_{j=r+r'+1}^{r+r'+r''} |q|_{p_j} \leq K[\max(|h|, q)]^{-\rho}$$

a une infinité de solutions, $\rho \leq 2$.

2. Plan de la démonstration de MAHLER.

Dans le cas où $r' = r'' = 0$, c'est-à-dire dans les hypothèses mêmes du théorème de Roth :

$$|\alpha - \frac{h}{q}| \leq Kq^{-\rho}$$

a une infinité de solutions.

Principe général : A m solutions choisies grandes, ordonnées (et m bien sûr aussi grand que l'on veut), associer un polynôme à coefficients entiers, à m variables, vérifiant certaines conditions aux points rationnels qui nous intéressent. Puis faire une démonstration par l'absurde en supposant $\rho = 2 + 4\epsilon$ ($\epsilon > 0$).

(A) Théorème de l'index.

Définition. - Soit $A(X_1, \dots, X_m) \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$, $A \neq 0$. On note

$$A_{j_1, \dots, j_m} = \frac{1}{j_1! \dots j_m!} \frac{\partial^{j_1 + \dots + j_m}}{\partial X_1^{j_1} \dots \partial X_m^{j_m}} A .$$

Index de A au point $\left(\frac{P_i}{Q_i}\right)$, par rapport aux entiers > 0 (ρ_i) :

$$J(A ; \rho_i ; \frac{P_i}{Q_i}) = \min_{(j_h)} \left(\sum_{h=1}^m \frac{j_h}{r_h} \right)$$

pour les systèmes (j_h) tels que $A_{j_1, \dots, j_m} \left(\frac{P_1}{Q_1}, \dots, \frac{P_m}{Q_m}\right) \neq 0$.

On voit facilement que :

$$J(A) = 0 \iff A\left(\frac{P_1}{Q_1}, \dots, \frac{P_m}{Q_m}\right) \neq 0 ,$$

$$J(A \pm B) \geq \min(J(A), J(B)) ,$$

$$J(AB) = J(A) + J(B) ,$$

$$J(A_{\ell_1, \dots, \ell_m}) \geq \max(0, J(A) - \sum_{h=1}^m \frac{\ell_h}{\rho_h}) .$$

A l'aide de deux lemmes, le théorème de l'index prouvera que, pour des polynômes à coefficients bornés, en des points bien choisis, l'index pris par rapport aux $\rho_i = r_i = (\text{degré } A)/X_i$ n'est pas trop grand.

Un opérateur $\frac{1}{i_1! \dots i_m!} \left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right)^{i_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial X_m}\right)^{i_m}$ sera dit d'ordre μ , et noté Δ_μ , si $i_1 + i_2 + \dots + i_m = \mu$.

Si $\varphi_0, \dots, \varphi_{\ell-1} \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$, soit $\Delta_0, \dots, \Delta_{\ell-1}$ un choix quelconque de ℓ opérateurs d'ordre $\leq 0, \dots, \ell-1$,

$$G(X_1, \dots, X_m) = \det[\Delta_\mu \varphi_\nu(X_1, \dots, X_m)] , \quad \mu, \nu = 0, \dots, \ell-1 ,$$

s'appelle un wronskien généralisé.

LEMME 1. - Si les φ_i sont linéairement indépendants, sur \mathbb{Z} , alors il existe un wronskien généralisé non identiquement nul.

Le lemme est vrai pour des polynômes d'une variable, on s'y ramènera.

LEMME 2. - $A \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$, $m \geq 2$, $A \neq 0$, $(\deg A)/X_i = r_i$.

(a) Alors il existe un ℓ , $1 \leq \ell \leq r_m + 1$, et des opérateurs $\Delta_0, \dots, \Delta_{\ell-1}$ des variables X_1, \dots, X_{m-1} , tels que, si

$$F(X_1, \dots, X_m) = \det(\Delta_{\mu} \frac{1}{\nu!} (\frac{\partial}{\partial X_m})^{\nu} A) ,$$

alors :

(1) $F \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$, $F \neq 0$;

(2) $F = U(X_1, \dots, X_{m-1}) V(X_m)$, avec $U \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_{m-1}]$, $V \in \mathbb{Z}[X_m]$, $(\deg U)/X_i \leq \ell r_i$ et $(\deg V)/X_m \leq \ell r_m$.

(b) Si $|\overline{A}| = \sup |\text{coefficients}| \leq a$, alors

$$|\overline{F}|, |\overline{U}|, |\overline{V}| \leq \left[\prod_1^m (r_i + 1) \right]^{\ell} \ell! a^{\ell} 2^{\ell(r_1 + \dots + r_m)} .$$

On choisit, parmi les décompositions de A de la forme :

$$A(X_1, \dots, X_m) \equiv \varphi_0(X_m) \psi_0(X_1, \dots, X_{m-1}) + \dots + \varphi_{\ell-1}(X_m) \psi_{\ell-1}(X_1, \dots, X_{m-1}) ,$$

celle pour laquelle ℓ est le plus petit. Alors les (φ_{μ}) et les (ψ_{ν}) sont deux familles de polynômes indépendants, et on utilise le lemme 1 en prenant deux wronskiens leur correspondant. $F(X_1, \dots, X_m)$ sera leur produit.

Le (b) résulte d'un calcul.

THÉORÈME de l'index. - Soient $0 < t \leq 1$, $a \geq 1$, r_i et $H_i > 0$, vérifiant

$$r_{h+1} \leq t r_h, \quad r_h \log H_h \geq r_1 \log H_1 ,$$

$$H_1 \geq 2^{(1/t)m(2m+1)(m-1)}, \quad a \leq H_1^{r_1 t} .$$

Soient

$$A(X_1, \dots, X_m) = \sum_{i_1=0}^{r_1} \dots \sum_{i_m=0}^{r_m} a_{i_1, \dots, i_m} X_1^{i_1} \dots X_m^{i_m}, \quad \text{avec } |a_{i_1, \dots, i_m}| \leq a ,$$

$$\frac{P_i}{Q_i} = \text{des rationnels tels que } \max(|P_i|, Q_i) \leq H_i .$$

Alors il existe (j_1, \dots, j_m) ($j_h \in \mathbb{N}$) tels que

$$\sum_{h=1}^m \frac{j_h}{r_h} \leq 2^{m+1} t^{-(m-1)} \quad \text{et} \quad A_{j_1, \dots, j_m} \left(\frac{P_1}{Q_1}, \dots, \frac{P_m}{Q_m} \right) \neq 0 .$$

Il s'agit de majorer $J(A ; r_i ; \frac{P_i}{Q_i})$ pour $A, (r_i), (\frac{P_i}{Q_i})$ vérifiant toutes les hypothèses. On construit $F(X_1, \dots, X_m)$, introduit au lemme 2, et on étudie $J(F ; \ell r_i ; \frac{P_i}{Q_i})$. Puis on montre

$$J(F) \geq \sum_{v=1}^{\ell} \max(0, J(A) - t - \frac{v-1}{r_m}) .$$

B. Polynôme d'approximation : Première utilisation de l'algèbricité de α .

LEMME 3. - $P(X) = c_0 X^n + c_1 X^{n-1} + \dots + c_n$, $c_0 c_n \neq 0$, $c_i \in \mathbb{Z}$; $P(X)$ sans facteur multiple.

Soient $c = 2 \max |c_i|$, $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$ tel que $s \geq 4n \sqrt{2m}$.

Alors il existe $A(X_1, \dots, X_m) \neq 0$, à coefficients a_{i_1, \dots, i_m} entiers, vérifiant :

$$(1) \quad |a_{i_1, \dots, i_m}| \leq 5(4c)^{r_1 + \dots + r_m}, \quad \text{et} \quad a_{i_1, \dots, i_m} = 0 \quad \text{dès que}$$

$$\frac{1}{2} (m - s) \leq \sum_{h=1}^m \frac{i_h}{r_h} < \frac{1}{2} (m + s) ;$$

$$(2) \quad A_{j_1, \dots, j_m}(X, \dots, X) \quad \text{est divisible par} \quad P(X) \quad \text{dès que}$$

$$\sum_{h=1}^m \frac{j_h}{r_h} < \frac{1}{2} (m - s) ;$$

$$(3) \quad |A_{j_1, \dots, j_m}| \leq 5(8c)^{r_1 + \dots + r_m} .$$

Principe de la démonstration. - On montre que le nombre de polynômes "admissibles" B , qui vérifient la 2e condition de (1), est supérieur à :

$$M = ([a] + 1)^{1/2(r_1+1) \dots (r_m+1)} .$$

Pour un tel B , on évalue le nombre de $B_{j_1, \dots, j_m}(\xi_\psi, \dots, \xi_\psi)$, pour toutes

les racines ξ_{j_h} de $P(X)$, et pour tous les (j_h) tels que

$$\sum_1^m \frac{j_h}{r_h} < \frac{1}{2} (m - s) ;$$

ce nombre est inférieur à

$$M^* = [5a(4c)^{r_1+\dots+r_m}]^{1/4(r_1+1)\dots(r_m+1)} .$$

Alors, en choisissant $a = 5(4c)^{r_1+\dots+r_m}$, on obtient $M > M^*$.

Le "principe des tiroirs" permet de conclure :

Il existe \bar{B} et $\overline{\bar{B}}$, avec le même système de dérivées : $A = \bar{B} - \overline{\bar{B}}$ est un polynôme convenable.

C. Le théorème. - On a donc une suite infinie $(\frac{P_i}{Q_i})$ [$(P_i, Q_i) = 1$, $Q_i > 0$, $\max(|P_i|, Q_i) = H_i$], avec

$$|\alpha - \frac{P_i}{Q_i}| \leq KH_i^{-\rho} ,$$

et

$$P(X) = 0 = c_0 \alpha^n + c_1 \alpha^{n-1} + \dots + c_n , \quad c = 2\max|c_i| .$$

On pose

$$\rho = 2 + 4\varepsilon , \quad m = [2(\frac{24n}{\varepsilon})^2] + 1 , \quad s = \frac{\varepsilon m}{6} .$$

On a ainsi bien assuré $s \geq 4n \sqrt{2m}$. Soit t vérifiant

$$0 < t \leq 1 , \quad 2^{m+1} t^{2^{-(m-1)}} \leq \frac{\varepsilon m}{6} .$$

Préliminaires : On se restreint à une sous-suite de solutions vérifiant :

$$\log H_{h+1} \geq \frac{2}{t} \log H_h ,$$

$$H_1 \geq \max[(20c)^{m^2/t} , 2^{(1/t)m(m-1)(2m+1)} , T] ,$$

où T reste à déterminer, et c'est ce qui permettra de conclure.

Choisissons les r_i de telle manière qu'on obtienne immédiatement :

$$r_1 \log H_1 \leq r_h \log H_h \leq (1 + \varepsilon)r_1 \log H_1 , \quad r_{h+1} \leq r_h t , \quad r_1 > r_2 > \dots > r_m .$$

Etapas de la preuve.

1° Il existe $A \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$, d'après le lemme 3.

2° De plus,

$$5(4c)^{\sum r_i} \leq (20c)^{mr_1} \leq_{H_1} (1/m)r_1 t.$$

On a donc les hypothèses du théorème de l'index :

$$\exists \ell_1, \dots, \ell_m, \quad \sum_{h=1}^m \frac{\rho_h}{r_h} \leq 2^{m+1} t^{2^{-(m-1)}} \leq \frac{\varepsilon m}{6}, \quad A_{\ell_1, \dots, \ell_m} \left(\frac{P_1}{Q_1}, \dots, \frac{P_m}{Q_m} \right) \neq 0.$$

On pose

$$A_{\ell_1, \dots, \ell_m} \left(\frac{P_1}{Q_1}, \dots, \frac{P_m}{Q_m} \right) = A_{(\ell)}.$$

3° Dernière étape : Majorer et minorer $|A_{(\ell)}|$ en fonction de H_1 , en déduire une minoration de H_1 , ce qui est absurde.

Majoration de $|A_{(\ell)}|$:

$$A_{(\ell)} = \sum_{j_1=0}^{r_1} \dots \sum_{j_m=0}^{r_m} A_{j_1, \dots, j_m}(\alpha, \alpha, \dots, \alpha) \binom{j_1}{\ell_1} \dots \binom{j_m}{\ell_m} \left(\frac{P_1}{Q_1} - \alpha \right)^{j_1 - \ell_1} \dots \left(\frac{P_m}{Q_m} - \alpha \right)^{j_m - \ell_m},$$

avec la sommation pour (j_h) vérifiant $\sum \frac{j_h}{r} > \frac{1}{2}(m-s)$, et

$$|A_{j_1, \dots, j_m}(\alpha, \dots, \alpha)| \leq K_1^{mr_1}, \quad \left| \frac{P_h}{Q_h} - \alpha \right| \leq KH_1^{-\rho};$$

on obtient

$$|A_{(\ell)}| \leq K_2^{mr_1} H_1^{-\rho r_1 S_1(m,s,t)}.$$

Minoration de $|A_{(\ell)}|$: $A_{(\ell)} = \frac{N_{(\ell)}}{D_{(\ell)}}.$

$|N_{(\ell)}| \geq 1$: c'est très grossier. (Dans les cas g -adique ou g^* -adique, c'est ici que MAHLER fait une distinction dans sa démonstration, par rapport au cas réel, et utilise $|\alpha_i - \frac{P}{Q}|_{P_i}$.)

$D_{(\ell)}$: chaque terme de $A_{(\ell)}$ a un dénominateur $Q_1^{i_1 - \ell_1}, \dots, Q_m^{i_m - \ell_m}$, sans oublier que

$$a_{i_1, \dots, i_m} = 0, \quad \text{si } \frac{1}{2}(m-s) \leq \sum_{h=1}^m \frac{i_h}{r_h} < \frac{1}{2}(m+s),$$

d'où

$$|D(\ell)| \leq p \cdot p \cdot g \cdot m \cdot Q_1^{i_1 - \ell_1} \dots Q_m^{i_m - \ell_m} \leq \max H_1^{(1+\varepsilon)r_1 \left(\frac{i_1 - \ell_1}{r_1} + \dots + \frac{i_m - \ell_m}{r_m} \right)},$$

d'où

$$|A(\ell)| \geq H_1^{-(1+\varepsilon)r_1 S_2(m, s, t)}.$$

4° Conclusion : Alors, on voit facilement que $\rho S_1(m, s, t) - (1 - \varepsilon) S_2(m, s, t) > 0$, et même $> \frac{3\varepsilon m}{2}$, par exemple, donc

$$H_1^{3\varepsilon m/2} < K_2^m,$$

$$H_1 < K_2^{2/3\varepsilon},$$

ce qui est absurde, d'où

$$\rho \leq 2.$$

3. Quelques applications.

Si $f(x, y) = g(x, y)$, avec f homogène, $f \in \mathbb{Z}[X, Y]$, $\deg f = n$, et $g \in \mathbb{Z}[X, Y]$, $\deg g = n - K$, a un nombre infini de solutions en entiers (x, y) , alors

$$K \leq 2.$$

Si $|P_h - \alpha|_p \leq K P_h^{-\rho}$, avec α algébrique, $\alpha \in \mathbb{Z}_p$, $P_h \in \mathbb{N}$, a un nombre infini de solutions, alors

$$\rho \leq 1.$$

Si $\rho > 2$, ROTH [1] se sert de sa propre démonstration pour obtenir une majoration du nombre, fini, de solutions de $|\alpha - \frac{h}{q}| < \frac{K}{2+\zeta}$. Cela peut se faire aussi dans le cas des entiers algébriques approchés par des entiers rationnels.

Problème posé : Ces majorations sont grossières, peut-on les obtenir plus directement ?

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DAVENPORT (H.) and ROTH (K. F.). - Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika*, London, t. 2, 1955, p. 160-167.
 - [2] MAHLER (Kurt). - Lectures on diophantine approximations, Part 1 : p -adic numbers and Roth's theorem. - Notre Dame (Indiana), University of Notre Dame, 1961.
 - [3] RIDOUT (D.). - The p -adic generalization of the Thue-Siegel-Roth theorem, *Mathematika*, London, t. 5, 1958, p. 40-48.
 - [4] ROTH (K. F.). - Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika*, London, t. 2, 1955, p. 1-20.
-