

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

GÉRARD GARANDEL

## **Systemes déterminants dans les espaces de Banach ultramétriques**

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 9, n° 1 (1967-1968),  
exp. n° 5, p. 1-11

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1967-1968\\_\\_9\\_1\\_A5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1967-1968__9_1_A5_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SYSTÈMES DÉTERMINANTS DANS LES ESPACES DE BANACH ULTRAMÉTRIQUES

par Gérard GARANDEL

J.-P. SERRE [3] a suggéré d'appliquer les méthodes de SIKORSKI [4] à l'équation  $x + u(x) = x_0$  où  $u$  est un endomorphisme complètement continu d'un espace de Banach ultramétrique muni d'une base normale. Les définitions de GROTHENDIECK [1] quelque peu modifiées et généralisées sur les modules (voir aussi GRUSON [2]), apportent des simplifications à la théorie de Sikorski, et conduisent à la discussion et à la résolution d'une telle équation.

1. Préliminaires.

Soit  $A$  un anneau commutatif et unitaire. Soit  $E$  et  $F$  deux  $A$ -modules unitaires. Si  $u$  est un homomorphisme de  $E$  dans  $F$ , on peut lui associer l'homomorphisme de  $\bigwedge^n E$  dans  $\bigwedge^n F$  noté  $\bigwedge^n u$ , défini par

$$\bigwedge^n u(x_1 \wedge \dots \wedge x_n) = u(x_1) \wedge \dots \wedge u(x_n).$$

Si  $v_1, \dots, v_n$  sont des homomorphismes de  $E$  dans  $F$ , on peut définir l'homomorphisme de  $\bigwedge^n E$  dans  $\bigwedge^n F$  noté  $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$  par la formule

$$\begin{aligned} v_1 \wedge \dots \wedge v_n(x_1 \wedge \dots \wedge x_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma v_1(x_{\sigma(1)}) \wedge \dots \wedge v_n(x_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} v_{\sigma(1)}(x_1) \wedge \dots \wedge v_{\sigma(n)}(x_n), \end{aligned}$$

$S_n$  étant le  $n$ -ième groupe symétrique, et  $\varepsilon_\sigma$  la signature de la permutation  $\sigma$ .

Si  $v_1, \dots, v_p, u$  sont des homomorphismes de  $E$  dans  $F$ , définissons l'homomorphisme de  $\bigwedge^n E$  dans  $\bigwedge^n F$ ,  $v_1 \wedge \dots \wedge v_p \bigwedge^{n-p} u$ , par la formule

$$\begin{aligned} (v_1 \wedge \dots \wedge v_p \bigwedge^{n-p} u)(x_1 \wedge \dots \wedge x_n) \\ = \sum_H \sum_{\sigma \in S_p} u(x_1) \wedge \dots \wedge v_{\sigma(1)}(x_{h_1}) \wedge \dots \wedge v_{\sigma(p)}(x_{h_p}) \wedge \dots \wedge u(x_n), \end{aligned}$$

l'ordre des  $x_1, \dots, x_n$  étant respecté, la somme  $\sum_H$  étant étendue à toutes les parties  $H = \{h_1 < \dots < h_p\}$  à  $p$  éléments de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ .

On voit que

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_n = v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \overset{1}{\wedge} v_n$$

et

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_p \underbrace{\wedge u \wedge \dots \wedge u}_{(n-p) \text{ fois}} = (n-p)! v_1 \wedge \dots \wedge v_p \overset{n-p}{\wedge} u$$

en particulier  $\underbrace{u \wedge \dots \wedge u}_n = n! \overset{n}{\wedge} u$ .

Si  $u_1, \dots, u_k$  sont des homomorphismes de  $E$  dans  $F$ , pour tout  $k$ -uplet de nombres  $(i_1, \dots, i_k)$  tel que  $i_1 + \dots + i_k = n$ , on peut définir l'homomorphisme  $\overset{i_1}{\wedge} u_1 \wedge \dots \wedge \overset{i_k}{\wedge} u_k$  de  $\overset{n}{\wedge} E$  dans  $\overset{n}{\wedge} F$  pour la formule

$$\overset{i_1}{\wedge} u_1 \wedge \dots \wedge \overset{i_k}{\wedge} u_k (x_1 \wedge \dots \wedge x_n) = \sum_{\rho} u_{p(1)}(x_1) \wedge \dots \wedge u_{p(n)}(x_n),$$

la somme étant étendue à toutes les partitions  $\rho = \{H_1, \dots, H_k\}$  de  $\{1, \dots, n\}$  telles que  $\text{card } H_1 = i_1, \dots, \text{card } H_k = i_k$ ,  $p(q)$  étant l'indice tel que  $q \in H_{p(q)}$  ( $1 \leq q \leq n$ ) [2].

Par exemple, si  $u_1$  et  $u_2$  sont deux homomorphismes de  $E$  dans  $F$ , on pourra écrire

$$\begin{aligned} (\overset{q}{\wedge} u_1 \overset{n-q}{\wedge} u_2)(x_1 \wedge \dots \wedge x_n) \\ = \sum_H u_2(x_1) \wedge \dots \wedge u_1(x_{h_1}) \wedge \dots \wedge u_1(x_{h_q}) \wedge \dots \wedge u_2(x_n), \end{aligned}$$

la somme étant étendue à toutes les parties  $H = \{h_1 < \dots < h_q\}$  à  $q$  éléments de  $\{1, \dots, n\}$ . On a

$$\begin{aligned} \underbrace{u_1 \wedge \dots \wedge u_1}_q \wedge \underbrace{u_2 \wedge \dots \wedge u_2}_{(n-q) \text{ fois}} &= (n-q)! u_1 \wedge \dots \wedge u_1 \overset{n-q}{\wedge} u_2 \\ &= (n-q)! q! \overset{q}{\wedge} u_1 \overset{n-q}{\wedge} u_2. \end{aligned}$$

Remarque. -  $(v_1, \dots, v_p) \rightarrow v_1 \wedge \dots \wedge v_p \overset{n-p}{\wedge} u$  est symétrique.

## 2. Traces.

Si  $E$  est un  $A$ -module libre, un endomorphisme  $u$  de  $E$  est dit de rang fini, s'il existe un sous-module  $N$  de  $E$  de type fini tel que  $u(E) \subset N$ . Il existe

alors un sous-module  $M$  libre, de type fini, facteur direct dans  $E$  tel que  $u(E) \subset M$ . Un tel sous-module  $M$  de  $E$  sera appelé sous-module attaché à  $u$ . Le rang de  $u$  est le minimum des dimensions des sous-modules attachés à  $u$ . On sait que le  $A$ -module  $L_{\mathfrak{G}}(E)$  des endomorphismes de rang fini de  $E$  est isomorphe à  $E' \otimes E$ ,  $E'$  étant le dual algébrique de  $E$ . Si  $u_M$  désigne la restriction de  $u$  à un sous-module  $M$  attaché à  $u$ , si on désigne par  $\text{tr}(u_M)$  la trace de  $u_M$ ,  $\text{tr}(u_M)$  est indépendante du sous-module attaché  $M$  choisi. On pose alors

$$\text{tr}(u) = \text{tr}(u_M) .$$

Si  $M$  est attaché à  $u$ ,  $\bigwedge^n M$  est attaché à  $\bigwedge^n u$ , on pourra poser

$$\text{tr}(\bigwedge^n u) = \text{tr}(\bigwedge^n u \Big|_{\bigwedge^n M})$$

ce qui est d'ailleurs égal à  $\text{tr}(\bigwedge^n u_M)$ .

De même, si  $u_1, \dots, u_k$  sont des endomorphismes de rang fini de  $E$ , il existe un sous-module  $M$  attaché à  $u_1, \dots, u_k$ , on définira de la même façon

$$\text{tr}(\bigwedge^{i_1} u_1 \wedge \dots \wedge \bigwedge^{i_k} u_k) .$$

Remarque. - S'il existe  $q$  ( $1 \leq q \leq k$ ) tel que  $u_q$  soit de rang inférieur à  $i_q$  alors

$$\text{tr}(\bigwedge^{i_1} u_1 \wedge \dots \wedge \bigwedge^{i_k} u_k) = 0 .$$

Si  $v_i = a_i' \otimes b_i$ , où  $a_i' \in E'$ ,  $b_i \in E$  ( $1 \leq i \leq n$ ), alors

$$\text{tr}(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = \det(\langle a_i' b_j \rangle) ,$$

$(\langle a_i' b_j \rangle)$  étant la matrice des produits scalaires  $\langle a_i' b_j \rangle$ .

Si  $u = \sum_{i=1}^m a_i' \otimes b_i$ , si  $m < n$ ,  $\text{tr}(\bigwedge^n u) = 0$ , si  $m \geq n$ , on a

$$\text{tr}(\bigwedge^n u) = \sum_H \text{tr}(a_{h_1}' \otimes b_{h_1} \wedge \dots \wedge a_{h_n}' \otimes b_{h_n})$$

la somme étant étendue à toutes les parties  $H = \{h_1 < \dots < h_n\}$  à  $n$  éléments de  $\{1, \dots, m\}$ .

On a, de même, si  $v_q = A_q' \otimes B_q$ , ( $1 \leq q \leq p$ ), et si  $u = \sum_{i=1}^m a_i' \otimes b_i$  ( $m \geq n-p$ )

$$\begin{aligned} \text{tr}(v_1 \wedge \dots \wedge v_p \wedge \bigwedge^{n-p} u) \\ = \sum_K \text{tr}(A_1' \otimes B_1 \wedge \dots \wedge A_p' \otimes B_p \wedge a_{k_1}' \otimes b_{k_1} \wedge \dots \wedge a_{k_{n-p}}' \otimes b_{k_{n-p}}) , \end{aligned}$$

la somme étant étendue à toutes les parties  $K = \{k_1 < \dots < k_{n-p}\}$  à  $(n-p)$  éléments de  $\{1, \dots, m\}$ .

Si  $(\beta_{ij})$  est la matrice de  $u$  dans une base de  $E$ , on peut se restreindre, pour calculer la trace, à la matrice  $(\beta_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq r}}$  de  $u$  dans un sous-module attaché. On obtient,

$$\text{tr}(\bigwedge^n u) = \sum_H \det(\beta_{h_i h_j}) = \sum_H \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma \beta_{h_1 h_{\sigma(1)}} \cdots \beta_{h_n h_{\sigma(n)}}, \quad \text{pour } n \leq r,$$

la somme étant étendue à toutes les parties  $H = \{h_1 < \dots < h_n\}$  à  $n$  éléments de  $\{1, \dots, r\}$ .

De même, si  $(\gamma_{ij}^q)$  est la matrice de  $v_q$  ( $1 \leq q \leq n$ ), dans un sous-module de dimension  $r$  attachée à  $v_q$ , pour tout  $q$ , on a

$$\text{tr}(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = \sum_H \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau \gamma_{h_{\tau(1)} h_{\sigma(1)}}^1 \cdots \gamma_{h_{\tau(n)} h_{\sigma(n)}}^n, \quad \text{pour } n \leq r,$$

la somme  $\sum_H$  étant étendue à toutes les parties  $H = \{h_1 < \dots < h_n\}$  à  $n$  éléments de  $\{1, \dots, r\}$ . Avec les mêmes notations, on a pour  $p \leq n \leq r$ ,

$$\text{tr}(v_1 \wedge \dots \wedge v_p \bigwedge^{n-p} u) = \sum_H \sum_{\sigma \in S_n} \sum_K \sum_{\tau \in S_p} \varepsilon_\tau \varepsilon_\sigma \beta_{h_1 h_{\sigma(1)}} \cdots \gamma_{k_{\tau(1)} h_{\sigma(k_1)}}^1 \cdots \gamma_{k_{\tau(p)} h_{\sigma(k_p)}}^p \cdots \beta_{h_n h_{\sigma(n)}},$$

la somme  $\sum_H$  étant étendue à toutes les parties  $H = \{h_1 < \dots < h_n\}$  à  $n$  éléments de  $\{1, \dots, r\}$ , la somme  $\sum_K$  étant étendue à toutes les parties  $K = \{k_1 < \dots < k_p\}$  à  $p$  éléments de  $\{h_1, \dots, h_n\}$ .

### 3. Les formes fondamentales.

On appellera  $n$ -ième forme fondamentale, sur  $(L_{\mathbb{F}}(E))^n$ , la forme  $n$ -linéaire symétrique  $\alpha_n$  définie par

$$\alpha_n(v_1, \dots, v_n) = \text{tr}(v_1 \wedge \dots \wedge v_n).$$

Si  $u$  est un endomorphisme de  $E$  ( $u \in L(E)$ ),  $u \circ v_q$  et  $v_q \circ u$  sont de rang fini ( $1 \leq q \leq n$ ), alors  $\alpha_n(v_1 \circ u, \dots, v_n \circ u) = \alpha_n(u \circ v_1, \dots, u \circ v_n)$ . Toute forme  $n$ -linéaire sur  $(L_{\mathbb{F}}(E))^n$  s'identifie avec une forme  $2n$ -linéaire sur  $E^{1^n} \times E^n$ .

Définition. - Une forme  $n$ -linéaire sur  $(L_{\mathfrak{F}}(E))^n$  est bi-alternée si la forme  $2n$ -linéaire associée

$$(a'_1, \dots, a'_n, b_1, \dots, b_n) \rightarrow \ell(a'_1 \otimes b_1, \dots, a'_n \otimes b_n)$$

est alternée par rapport aux  $a'_i$  et alternée par rapport aux  $b_i$ .

PROPOSITION 1. - Si  $E$  est un  $A$ -module possédant une base finie, toute forme  $\ell$ ,  $n$ -linéaire bi-alternée sur  $(L(E))^n$  s'écrit

$$\ell(v_1, \dots, v_n) = \text{tr}(w \circ (v_1 \wedge \dots \wedge v_n)) \quad \text{où } w \in L(\bigwedge^n E) \quad [1].$$

PROPOSITION 2. - Si  $E$  est un  $A$ -module libre, toute forme  $n$ -linéaire, bi-alternée  $\ell$  sur  $(L_{\mathfrak{F}}(E))^n$  telle que

$$\ell(u \circ v_1, \dots, u \circ v_n) = \ell(v_1 \circ u, \dots, v_n \circ u)(v_1, \dots, v_n, u \in L_{\mathfrak{F}}(E))$$

s'écrit  $\ell = \rho \alpha_n$  ( $\rho \in A$ ).

#### 4. La théorie de Sikorski.

$K$  étant un corps commutatif, soient  $E$  et  $E'$  deux  $K$ -espaces vectoriels en dualité séparante. Soit  $(x', x) \rightarrow \langle x'x \rangle$  la forme bi-linéaire sur  $E' \times E$ . Un opérateur  $U$  sera une forme bi-linéaire sur  $E' \times E$  :  $(x', x) \rightarrow \langle x'Ux \rangle$ , vérifiant les deux axiomes :

$$(O_1) \quad (\forall x \in E, \exists y \in E \mid \langle x'Ux \rangle = \langle x'y \rangle, \forall x' \in E')$$

$$(O_2) \quad (\forall x' \in E', \exists y' \in E' \mid \langle x'Ux \rangle = \langle y'x \rangle, \forall x \in E),$$

alors  $x \rightarrow y = Ux$  est un endomorphisme  $u$  de  $E$  associé à  $U$  et  $x' \rightarrow y' = xU$  est un endomorphisme  $\tilde{u}$  de  $E'$  associé à  $U$ .

L'ensemble  $\mathcal{O}$  des opérateurs est une algèbre sur  $K$  en posant

$$\langle x'(U_1 U_2)x \rangle = \langle (x'U_1)U_2 x \rangle = \langle x'U_1(U_2 x) \rangle = \langle (x'U_1)(U_2 x) \rangle.$$

L'élément unité  $I$  est défini par  $\langle x'Ix \rangle = \langle x'x \rangle$ . Un opérateur  $P$  est un projecteur si  $P^2 = P$ . Un opérateur  $F$  est de rang fini si  $f$  et  $\tilde{f}$  sont de rang fini.

Opérateurs de Fredholm. - Un sous-espace  $E_1$  de  $E$  est de co-dimension  $r$  s'il est l'orthogonal d'un sous-espace de dimension  $r$ . Alors  $E_1$  admet un supplémentaire de dimension  $r$ .

Un opérateur  $U$  est de Fredholm d'ordre  $r$  si les deux conditions sont vérifiées simultanément :

- (f<sub>1</sub>)  $\text{Im}(u)$  est de co-dimension  $r$  ;
- (f<sub>2</sub>)  $\text{Im}(\tilde{u})$  est de co-dimension  $r$  .

Si  $U$  est de Fredholm d'ordre  $r$  , alors  $\ker(u)$  et  $\ker(\tilde{u})$  sont de dimension  $r$  .

PROPOSITION 3. - Tout opérateur  $U$  de Fredholm d'ordre  $r$  se met sous la forme  $U = U_0(I - P)$  où  $U_0$  est inversible et où  $P$  est un projecteur de rang  $r$  .

Si  $U$  est de Fredholm,  $U$  admet un quasi-inverse, c'est-à-dire un opérateur  $V$  tel que  $UVU = U$  et  $VUV = V$  .

PROPOSITION 4. - Tout opérateur de la forme  $U_0(I - F)$  où  $U_0$  est inversible et  $F$  de rang fini est de Fredholm.

Exemple fondamental. - Si  $x'_1, \dots, x'_p$  appartiennent à  $E'$  , si  $x_1, \dots, x_p$  appartiennent à  $E$  , si  $u, v_1, \dots, v_p$  appartiennent à  $L_{\mathcal{F}}(E)$  , l'application partielle

$$(x'_1, x_1) \rightarrow \text{tr}(x'_1 \otimes v_1(x_1) \wedge \dots \wedge x'_p \otimes v_p(x_p) \wedge^{n-p} u)$$

est un opérateur.

Systemes determinants. - Si  $U$  est un opérateur, on appelle système déterminant associé à  $U$  , une suite  $D_0, \dots, D_n$  vérifiant :

( $\delta_1$ )  $D_0$  est un élément de  $K$  , pour  $n \geq 1$  ,  $D_n$  est une forme  $2n$ -linéaire sur  $E'^n \times E^n$  dont la valeur au point  $(x'_1, \dots, x'_n, x_1, \dots, x_n)$  sera notée

$$D_n \begin{pmatrix} x'_1, \dots, x'_n \\ x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} ;$$

( $\delta_2$ ) pour  $n \geq 2$  ,  $D_n$  est bi-alternée ;

( $\delta_3$ ) pour  $n \geq 1$  , l'application partielle  $(x'_1, x_1) \rightarrow D_n \begin{pmatrix} x'_1, \dots, x'_n \\ x_1, \dots, x_n \end{pmatrix}$  est un opérateur ;

( $\delta_4$ ) il existe un entier  $r \geq 0$  tel que  $D_r$  ne soit pas identiquement nul ;

( $\delta_5$ ) on a, pour tout  $n$

$$D_{n+1} \begin{pmatrix} x'_0 U, x'_1, \dots, x'_n \\ x_0, x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \langle x'_0, x_i \rangle D_n \begin{pmatrix} x'_1, \dots, x'_n \\ x_0, \dots, x_i, \dots, x_n \end{pmatrix}$$

et

$$D_{n+1} \begin{pmatrix} x'_0 & , & x'_1 & , & \dots & , & x'_n \\ Ux_0 & , & x_1 & , & \dots & , & x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \langle x'_i \ x_0 \rangle D_n \begin{pmatrix} x'_0 & , & \dots & , & \hat{x}_i & , & \dots & , & x'_n \\ x_1 & , & \dots & , & & , & & , & x_n \end{pmatrix}$$

le rang du système déterminant est le plus petit  $r$  tel que  $D_r$  ne soit pas identiquement nul.

Exemple 1. -  $D_0 = 1$  et  $D_n \begin{pmatrix} x'_1 & , & \dots & , & x'_n \\ x_1 & , & \dots & , & x_n \end{pmatrix} = \text{tr}(x'_1 \otimes x_1 \wedge \dots \wedge x'_n \otimes x_n)$  est un système déterminant pour  $I$ .

Exemple 2. -  $D_0 = 1$  et  $D_n \begin{pmatrix} x'_1 & , & \dots & , & x'_n \\ x_1 & , & \dots & , & x_n \end{pmatrix} = \text{tr}(\bigwedge u^{-1} \circ (x'_1 \otimes x_1 \wedge \dots \wedge x'_n \otimes x_n))$  est un système déterminant pour un opérateur  $U$  inversible.

Exemple 3. - Si  $E$  est de dimension  $n$ ,  $E'$  est isomorphe au dual de  $E$  et tout opérateur  $U$  est de Fredholm. Soit  $(\beta_{ij})$  la matrice de  $u$  dans une base de  $E$ ; on construit un système déterminant associé à  $U$  en posant

$$D_0 = \det(\beta_{ij}),$$

$D_1$  sera construit à l'aide des sous-déterminants d'ordre 1,  $\beta_{ij}$ , ...  $D_p$  à l'aide des sous-déterminants d'ordre  $(n-p)$  [4].

PROPOSITION 5. - Si un opérateur admet un système déterminant d'ordre  $r$ , il est de Fredholm d'ordre  $r$ . De façon précise, si  $y'_1, \dots, y'_r$  et  $y_1, \dots, y_r$

sont tels que  $D_r \begin{pmatrix} y'_1 & , & \dots & , & y'_r \\ y_1 & , & \dots & , & y_r \end{pmatrix} \neq 0$  :

1° Il existe dans  $E'$ ,  $r$  éléments  $x'_1, \dots, x'_r$  engendrant  $\ker(\tilde{u})$  et, dans  $E$ ,  $r$  éléments  $x_1, \dots, x_r$  engendrant  $\ker(u)$  tels que l'équation  $X'U = x'_0$  admette une solution, si, et seulement si,  $\langle x'_0 \ x_i \rangle = 0$  ( $1 \leq i \leq r$ ) et l'équation  $UX = x_0$  admette une solution, si, et seulement si,  $\langle x'_i \ x_0 \rangle = 0$  ( $1 \leq i \leq r$ ).

2° L'opérateur  $V$  défini par

$$x'Vx = D_{r+1} \begin{pmatrix} x' & , & y'_1 & , & \dots & , & y'_r \\ x & , & y_1 & , & \dots & , & y_r \end{pmatrix} / D_r \begin{pmatrix} y'_1 & , & \dots & , & y'_r \\ y_1 & , & \dots & , & y_r \end{pmatrix}$$

est un quasi-inverse de  $U$ .



3° Si  $x'_0$  est orthogonal à  $x_1, \dots, x_r$ ,  $x'_0 V$  est l'unique solution de  $X'U = x'_0$  orthogonale à  $y_1, \dots, y_r$ .

Si  $x_0$  est orthogonal à  $x'_1, \dots, x'_r$ ,  $Vx_0$  est l'unique solution de  $UX = x_0$  orthogonale à  $y'_1, \dots, y'_r$ .

PROPOSITION 5. - Si  $U$  est un opérateur de Fredholm d'ordre  $r$ , alors  $U$  possède un système déterminant d'ordre  $r$ , défini à une constante multiplicative près.

Pour le voir, on décompose  $U$  sous la forme  $U_0(I - P)$  alors

$$D_0 = D_1 = \dots = D_{r-1} = 0, \dots, D_{r+k}$$

défini par

$$D_{r+k} \begin{pmatrix} x'_1, \dots, x'_{r+k} \\ x_1, \dots, x_{r+k} \end{pmatrix} = \text{tr} \left( \left( \bigwedge^r P \bigwedge^k \underline{1} \right) \circ (x'_1 \otimes x_1 \wedge \dots \wedge x'_{r+k} \otimes x_{r+k}) \right),$$

où  $\underline{1}$  est l'endomorphisme identité de  $E$ , constitue un système déterminant pour  $I - P$ .  $D_0 = D_1 = \dots = D_{r-1} = 0, \dots, D_{r+k}$ , défini par

$$D_{r+k} \begin{pmatrix} x'_1, \dots, x'_{r+k} \\ x_1, \dots, x_{r+k} \end{pmatrix} = \text{tr} \left( \left( \bigwedge^r P \bigwedge^k \underline{1} \right) \circ \left( \bigwedge^{r+k} u_0^{-1} \right) \circ (x'_1 \otimes x_1 \wedge \dots \wedge x'_{r+k} \otimes x_{r+k}) \right),$$

est un système déterminant pour  $U$ .

## 5. Applications aux espaces de Banach ultramétriques.

Soit  $K$  un corps muni d'une valeur absolue ultramétrique pour laquelle, il est complet. Soit  $A$  l'anneau de valuation,  $\mathfrak{m}$  l'idéal de valuation. Soit  $E$  un espace de Banach ultramétrique sur  $K$ ,  $E_0$  le cercle circonferencié de rayon 1. Si  $\mathfrak{A}$  désigne la famille des idéaux  $\mathfrak{a}$  de  $A$ , on sait que  $E_0$  est homéomorphe à  $\varprojlim (E_0/\mathfrak{a}E_0, \mathfrak{a} \in \mathfrak{A})$  les  $(A/\mathfrak{a})$ -modules  $E_0/\mathfrak{a}E_0$  libres étant munis de la topologie discrète. (De même  $A = \varprojlim A/\mathfrak{a}$ .)

Soit  $\mathcal{C}(E)$  l'espace de Banach des endomorphismes complètement continus de  $E$ . Soit  $\mathcal{C}_0(E)$  le cercle circonferencié de rayon 1 de  $\mathcal{C}(E)$ . On sait que  $\mathcal{C}_0(E)$  est homéomorphe à  $\varprojlim (L_{\mathfrak{F}}(E_0/\mathfrak{a}E_0), \mathfrak{a} \in \mathfrak{A})$ , si  $u \in \mathcal{C}_0(E)$ ,  $u$  définit par passage au quotient un endomorphisme de rang fini  $u_{\mathfrak{a}}$  de  $E_0/\mathfrak{a}E_0$ .

Si  $i_1, \dots, i_k$  sont  $k$  nombres tels que  $i_1 + \dots + i_k = n$ , si  $u_1, \dots, u_k$  sont des éléments de  $\mathcal{C}_0(E)$ , pour tout  $\mathfrak{a}$  soit  $f_{\mathfrak{a}}$  l'application de  $(L_{\mathfrak{F}}(E_0/\mathfrak{a}E_0))^k$  dans  $A/\mathfrak{a}$  définie par

$$f_{\mathfrak{a}}(u_{1\mathfrak{a}}, \dots, u_{k\mathfrak{a}}) = \text{tr} \left( \bigwedge^{i_1} u_{1\mathfrak{a}} \wedge \dots \wedge \bigwedge^{i_k} u_{k\mathfrak{a}} \right).$$

$f_a$  définit par passage à la limite projective une application  $f$  de  $(C_0(E))^k$  dans  $A$  notée  $\text{tr}(\bigwedge^{i_1} u_1 \wedge \dots \wedge^{i_k} u_k)$  qui est continue.

Si  $u_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) sont des éléments de  $C(E)$ , il existe des éléments  $\varepsilon_i \in K$  ( $1 \leq i \leq k$ ) tels que  $u_i/\varepsilon_i \in C_0(E)$ , on pose alors

$$\text{tr}(\bigwedge^{i_1} u_1 \wedge \dots \wedge^{i_k} u_k) = \varepsilon_1^{i_1} \dots \varepsilon_k^{i_k} \text{tr}(\bigwedge^{i_1} u_1/\varepsilon_1 \wedge \dots \wedge^{i_k} u_k/\varepsilon_k).$$

Si  $u_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) sont des endomorphismes de rang fini, on retrouve alors les définitions algébriques.

Les formes fondamentales continues sur  $(C(E))^n$ . - On appellera  $n$ -ième forme fondamentale continue sur  $(C(E))^n$ , la forme  $n$ -linéaire symétrique  $\alpha_n$  définie par

$$\alpha_n(v_1, \dots, v_n) = \text{tr}(v_1 \wedge \dots \wedge v_n).$$

On peut alors démontrer des propriétés analogues aux propriétés exposées au paragraphe 3 en remarquant que  $C(E)$  est isomorphe à  $E' \hat{\otimes} E$  [3],  $E'$  étant le dual topologique de  $E$ . Puisque  $E' \otimes E$  est injecté dans  $E' \hat{\otimes} E$  [2], tout élément  $u$  de  $C(E)$  peut s'écrire  $u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i' \otimes b_i$  où  $a_i' \in E'$ ,  $b_i \in E$  avec  $\gamma(a_i' \otimes b_i) \rightarrow 0$  (si  $i \rightarrow \infty$ ),  $\gamma$  étant la norme sur  $E' \hat{\otimes} E$ . Alors, il est aisé de voir que

$$\text{tr}(\bigwedge^n u) = \sum_H \text{tr}(a_{h_1}' \otimes b_{h_1} \wedge \dots \wedge a_{h_n}' \otimes b_{h_n}),$$

la somme étant étendue à toutes les parties  $H = \{h_1 < \dots < h_n\}$  de  $N^*$ . Si  $v_q = A_q' \otimes B_q$  ( $1 \leq q \leq p$ ) et  $u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i' \otimes b_i$

$$\begin{aligned} \text{tr}(v_1 \wedge \dots \wedge v_p \wedge^{n-p} u) \\ = \sum_K \text{tr}(A_1' \otimes B_1 \wedge \dots \wedge A_p' \otimes B_p \wedge a_{k_1}' \otimes b_{k_1} \wedge \dots \wedge a_{k_{n-p}}' \otimes b_{k_{n-p}}), \end{aligned}$$

la somme étant étendue à toutes les parties  $K = \{k_1 < \dots < k_{n-p}\}$  à  $(n-p)$  éléments de  $N^*$ .

On a, de même, des expressions à l'aide des matrices des endomorphismes dans la base normale de  $E$ .

Si  $u$  est complètement continu,  $u$  définit un opérateur  $U$  sur  $E' \times E$ .

Construction d'un système déterminant pour l'opérateur  $I + U$  . - On pose

$$D_0 = \det(\underline{1} + u) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{tr}(\bigwedge^n u) \quad [3]$$

et

$$D_p \begin{pmatrix} x'_1, \dots, x'_p \\ x_1, \dots, x_p \end{pmatrix} = \sum_{n=p}^{\infty} \text{tr}(x'_1 \otimes x_1 \wedge \dots \wedge x'_p \otimes x_p \bigwedge^{n-p} u)$$

ce qui a bien un sens puisque, pour tout  $a$ ,  $\text{tr}(x'_1 \otimes x_1 \wedge \dots \wedge x'_p \otimes x_p \bigwedge^{n-p} u)$  est nul modulo  $a$  à partir d'un certain  $n$ .

$(\delta_1)$  et  $(\delta_2)$  sont vérifiés.  $(\delta_3)$  se vérifie en utilisant l'exemple fondamental du paragraphe 4 et en munissant l'esp ce des opérateurs de la norme canonique.

$(\delta_5)$  se démontre en utilisant la proposition suivante :

PROPOSITION 7. -  $w, v_1, \dots, v_p$  étant des endomorphismes complètement continus, on a

$$\begin{aligned} \text{tr}(w \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_p \bigwedge^{n-p} u) &= - \text{tr}(u \circ w \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_p \bigwedge^{n-p-1} u) \\ &- \sum_{i=1}^p \text{tr}(v_1 \wedge \dots \wedge v_i \circ u \wedge \dots \wedge v_p \bigwedge^{n-p} u) + \text{tr } w \text{ tr}(v_1 \wedge \dots \wedge v_p \bigwedge^{n-p} u) \\ &= - \text{tr}(w \circ u \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_p \bigwedge^{n-p-1} u) - \sum_{i=1}^p \text{tr}(v_1 \wedge \dots \\ &\wedge w \circ v_i \wedge \dots \wedge v_p \bigwedge^{n-p} u) + \text{tr } w \text{ tr } v_1 \wedge \dots \wedge v_p \bigwedge^{n-p} u) . \end{aligned}$$

$(\delta_4)$ , enfin, se démontre en remarquant que dans le  $(A/m)$ -espace vectoriel  $E_0/mE_0$ ,  $\underline{1} + u$  définit, par passage au quotient, un opérateur de Fredholm dont le système déterminant est constitué par la suite  $D_{0m}, \dots, D_{pm}, \dots$ , définie par  $D_0, \dots, D_p, \dots$ , par passage au quotient. Si  $n$  est le rang de  $u_m$ , alors  $D_{nm} \neq 0$  donc  $D_n \neq 0$ . Pour un opérateur  $U$  de la forme  $U_0(I + U)$  où  $U$  est tel que  $u$  soit complètement continu et  $U_0$  inversible,

$$D_0 = \det(\underline{1} + u), \dots, D_p \begin{pmatrix} x'_1, \dots, x'_p \\ x_1, \dots, x_p \end{pmatrix} = \sum_{n=p}^{\infty} \text{tr}(x'_1 \otimes u_0^{-1}(x_1) \wedge \dots \wedge x'_p \otimes u_0^{-1}(x_p) \bigwedge^{n-p} u)$$

définissent un système déterminant.

L'opérateur définit par  $U_0(\underline{1} + u)$  où  $U_0$  est inversible et  $u$  complètement continu est de Fredholm. En particulier, on retrouve l'alternative de Fredholm [3]

c'est-à-dire  $\ker(\underline{1} + u)$  est de dimension finie. Si  $D_0 \neq 0$ , on a

$$\langle x'(I + U)^{-1} x \rangle = \frac{1}{D_0} \sum_{n=1}^{\infty} \text{tr}(x' \otimes x \wedge^{n-1} u) .$$

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] GROTHENDIECK (Alexander). - La théorie de Fredholm, Bull. Soc. math. France, t. 84, 1956, p. 319-384.
  - [2] GRUSON (Laurent). - Théorie de Fredholm p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 94, 1966, p. 67-95.
  - [3] SERRE (Jean-Pierre). - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 12, p. 69-85).
  - [4] SIKORSKI (R.). - Determinant systems, Studia mathematica, t. 18, 1959, p. 161-186.
-