Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

BERNARD DE MATHAN

Théorème de Koksma dans un corps de séries formelles sur un corps fini

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 9, n° 1 (1967-1968), exp. n° 4, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1967-1968__9_1_A4_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
9e année, 1967/68, n° 4
20 novembre 1967

THÉORÈME DE KOKSMA
DANS UN CORPS DE SÉRIES FORMELLES SUR UN CORPS FINI

par Bernard de MATHAN

La notion d'équirépartition modulo 1 dans un corps de séries formelles sur un corps fini a été introduite par CARLITZ [3]. Le but de cet exposé est l'étude du théorème de Koksma dans ce cas. Nous commençons par une partie de cette étude qui peut se faire dans le cadre plus général suivant :

Soit G un groupe topologique abélien, localement compact, dans lequel il existe une base $\mathcal{B}$ du filtre des voisinages de 0 , formée de sous-groupes compacts (nécessairement ouverts). Soit $\hat{G}$ le dual de G , c'est-à-dire le groupe multiplicatif des caractères de G (homomorphismes continus de G dans le groupe multiplicatif des nombres complexes de valeur absolue 1). Remarquons d'abord que :

LEMME 1. - *Tout caractère χ de G est localement constant.*

Cela résulte du fait qu'un caractère non trivial d'un groupe prend au moins une valeur dans l'ensemble des nombres complexes : $|u| = 1$, $\mathcal{R}(u) \leqslant 0$, et qu'il satisfait donc à $|u - 1| \geqslant \sqrt{2}$. Alors, comme χ est continu, il existe $H \in \mathcal{B}$ tel que

$$x \in H \implies |\chi(x) - 1| < \sqrt{2} \quad ,$$

d'où

$$\chi(x) = 1 \ , \qquad \forall\ x \in H \quad .$$

Soit $\Gamma \in \mathcal{B}$, désignons par $\mathcal{B}_\Gamma$ la base du filtre des voisinages de 0 dans Γ (donc aussi dans G) formée des intersections avec Γ des éléments de $\mathcal{B}$. Soit D un translaté de Γ .

DÉFINITION 1. - *Une application Φ de D dans G est dite isométrique si, pour tout $H \in \mathcal{B}_\Gamma$, on a la double implication* :

$$x - y \in H \iff \Phi(x) - \Phi(y) \in H \quad .$$

Une telle application est nécessairement continue. Remarquons la propriété suivante :

LEMME 2. - *Soit* $x_0 \in D$. Φ *est une bijection de* D *sur* $\Delta = \Phi(x_0) + \Gamma$.

On a évidemment $\Phi(D) \subset \Delta$, et d'autre part Φ est injective (car G est séparé). Il y a seulement à démontrer que $\Phi(D) = \Delta$, et on peut se restreindre au cas où Φ est une application de Γ dans Γ . Pour tout $H \in \mathfrak{B}_\Gamma$, il existe une famille finie $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'éléments de Γ telle que l'on ait

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} D_i^H \ , \qquad \text{où } D_i^H = a_i + H \ ,$$

et

$$D_i^H \cap D_{i'}^H = \emptyset \ , \qquad \text{si } i \neq i' \ .$$

Soient $b_i = \Phi(a_i)$ et $j(i)$ tels que $b_i \in D_{j(i)}^H$. L'application $i \to j(i)$ de l'ensemble $\{1 , \ldots , n\}$ dans lui-même est injective, donc surjective, et par suite les ensembles $b_i + H$ forment une partition de Γ . $\Phi(\Gamma)$ est donc dense dans Γ , donc $\Phi(\Gamma) = \Gamma$ puisque Γ est compact.

DÉFINITION 2. - *Soit* Λ *un homomorphisme continu de* Γ *dans* G . *Une application* Ψ *de* D $(= x_0 + \Gamma)$ *dans* G *est dite* Λ*-homométrique, s'il existe une isométrie* Φ *de* D *dans* G *telle que l'on ait*

$$\Psi(x) - \Psi(x_0) = \Lambda(\Phi(x) - \Phi(x_0)) \ , \qquad \forall\, x \in D \ .$$

On a le résultat suivant sur l'intégration d'une telle application (par rapport à une mesure de Haar dx de G).

LEMME 3. - *Soit* $\chi \in \hat{G}$. *On a*

$$\int_D \chi(\Psi(x))\, dx = \begin{cases} \chi(\Psi(x_0)) \text{ mes } D \ , & \text{\underline{si} } \chi \circ \Lambda = 1 \quad (\text{\underline{sur} } \Gamma) \ , \\ 0 \ , & \text{\underline{sinon}} \ . \end{cases}$$

Comme

$$\int_D \chi(\Psi(x))\, dx = \chi(\Psi(x_0)) \int_\Gamma \chi \circ \Lambda(\Phi(x_0 + y) - \Phi(x_0))\, dy \ ,$$

il suffit de montrer que, si χ est un caractère non trivial de Γ , et Φ une isométrie de Γ sur lui-même, on a

$$\int_\Gamma \chi(\Phi(x))\, dx = 0 \ .$$

Soit $H \in \mathfrak{B}_\Gamma$ tel que $\chi(x) = 1$, $\forall\, x \in H$, et soit $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie d'éléments de Γ tels que les ensembles $a_i + H$ forment une partition de Γ .

Il en est alors de même pour les ensembles $b_i + H$ $(b_i = \Phi(a_i))$. On a

$$\int_\Gamma \chi(\Phi(x))\, dx = \text{mes } H \sum_{i=1}^{n} \chi(b_i) = \int_\Gamma \chi(x)\, dx = 0 \quad .$$

On peut alors démontrer le théorème suivant (les suites sont indexées sur l'ensemble $\underset{\sim}{N}^*$ des entiers positifs).

THÉORÈME 1. - Soit X une partie dénombrable de $\hat{G}$. Soit $(\Phi_n)_{n\in N^*}$ une suite d'applications continues de D $(= x_0 + \Gamma)$ dans G . Supposons qu'il existe un sous-ensemble K de $\underset{\sim}{N}^* \times \underset{\sim}{N}^*$ (contenant la diagonale, et symétrique), satisfaisant à la condition

(1) Si

$$K_N = \text{card}\{(m\,,\,n) \in K \mid \sup(m\,,\,n) \leqslant N\} \quad ,$$

on a

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_N}{N^3} < +\infty \quad ,$$

et tel que, pour tout $(m\,,\,n) \notin K$, l'application $\Psi_{m,n} = \Phi_n - \Phi_m$ possède la propriété suivante :

Il existe une famille finie de sous-ensembles de D , $(D^j_{m,n})_{j\in J(m,n)}$ disjoints, qui sont des translatés de sous-groupes $(\Gamma^j_{m,n})_{j\in J(m,n)}$, appartenant à la famille $\mathcal{B}_\Gamma$, et pour tout $j \in J(m\,,\,n)$, il existe un homomorphisme continu $\Lambda^j_{m,n}$ de $\Gamma^j_{m,n}$ dans G tel que la restriction de $\Psi_{m,n}$ à $D^j_{m,n}$ soit une $\Lambda^j_{m,n}$-homométrie, et l'on a, en outre, les propriétés suivantes :

(2) Si

$$\text{mes}(D - \bigcup_{j\in J(m,n)} D^j_{m,n}) = C_{m,n} \text{ mes } D \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{(m,n)\notin K \\ \sup(m,n)\leqslant N}} C_{m,n} = C_N \quad ,$$

on a

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{C_N}{N^3} < +\infty \quad .$$

(3) Pour tout $\chi \in X$, il existe un entier $\nu(\chi)$ tel que, pour $(m\,,\,n) \notin K$ et $\sup(m\,,\,n) \geqslant \nu(\chi)$, on ait

$$\chi \circ \Lambda^j_{m,n} \neq 1 \quad (\text{sur } \Gamma^j_{m,n}) \quad , \qquad \forall\, j \in J(m\,,\,n) \quad .$$

<u>Alors, pour presque tout</u> $x \in D$, <u>on a</u>

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi(\Phi_n(x)) = 0 , \qquad \forall \chi \in X .$$

La démonstration se fait de manière analogue à celle de [2]. Soit

$$\sigma_{N,\chi}(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi(\Phi_n(x)) ,$$

$$|\sigma_{N,\chi}(x)|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{\sup(m,n)\leqslant N} \chi(\Psi_{m,n}(x)) .$$

Supposons $N \geqslant \nu(\chi)$,

$$\int_D |\sigma_{N,\chi}(x)|^2 \, dx \leqslant \frac{K_N + (\nu(\chi))^2}{N^2} \operatorname{mes} D + \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{\nu(\chi)\leqslant\sup(m,n)\leqslant N \\ (m,n)\notin K}} \int_D \chi(\Psi_{m,n}(x)) \, dx ,$$

donc

$$\int_D |\sigma_{N,\chi}(x)|^2 \, dx$$

$$\leqslant \frac{K_N + C_N + (\nu(\chi))^2}{N^2} \operatorname{mes} D + \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{\nu(\chi)\leqslant\sup(m,n)\leqslant N \\ (m,n)\notin K}} \sum_{j\in J(m,n)} \int_{D^j_{m,n}} \chi(\Psi_{m,n}(x)) \, dx .$$

Or, d'après le lemme 3, on a, pour $\sup(m , n) \geqslant \nu(\chi)$ et $(m , n) \notin K$,

$$\int_{D^j_{m,n}} \chi(\Psi_{m,n}(x)) \, dx = 0 .$$

Soit

$$\int_D |\sigma_{N,\chi}(x)|^2 \, dx \leqslant \frac{K_N + C_N + (\nu(\chi))^2}{N^2} \operatorname{mes} D ,$$

dont résulte l'énoncé, comme dans [2].

1. Définitions et notations.

Soit maintenant F_q le corps fini à q éléments, et soit p sa caractéristique. Désignons par $\mathfrak{Z}$ l'anneau $F_q[T]$ des polynômes à une indéterminée sur F_q , et par $\mathfrak{F}$ le corps des fractions $F_q(T)$.

La valuation " 0-adique" de $\mathfrak{F}$ est définie par

$$W_0(f) = - \deg f \quad ,$$

si f est un polynôme non nul dont $\deg f$ désigne le degré. La valeur-absolue ultramétrique associée est normalisée par

$$|f|_0 = q^{\deg f} \quad .$$

Le complété $\mathfrak{F}_0$ de $\mathfrak{F}$ pour cette valeur-absolue est le corps $F_q\{T^{-1}\}$ des séries de Laurent :

$$\mathfrak{F}_0 = \{\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n T^{-n} \ ; \quad a_n \in F_q \ ; \quad (a_n)_{n<0} \text{ presque tous nuls}\} \quad .$$

On désigne par $\mathfrak{Z}_0$ l'anneau de valuation de $\mathfrak{F}_0$, et par $\mathfrak{M}_0$ l'idéal maximal de $\mathfrak{Z}_0$.

On a la décomposition en somme directe (de groupes additifs), algébrique et topologique :

$$\mathfrak{F}_0^+ = \mathfrak{Z}^+ \oplus \mathfrak{M}_0^+ \quad .$$

Soient E et $\mathcal{H}_0$ les projections associées sur les facteurs $\mathfrak{Z}^+$ et $\mathfrak{M}_0^+$, respectivement (partie entière et partie fractionnaire) : Si

$$X = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n T^{-n} \quad ,$$

$$E(X) = \sum_{-\infty}^{0} a_n T^{-n}$$

est défini comme l'unique polynôme tel que $|X - E(X)|_0 < 1$, et

$$\mathcal{H}_0(X) = \sum_{1}^{+\infty} a_n T^{-n} \quad .$$

La locution "presque-partout" sera relative à une mesure de Haar du groupe localement compact $\mathfrak{F}_0^+$. On notera δ_0 la mesure de Haar du groupe compact $\mathfrak{M}_0^+$, normalisée par $\delta_0(\mathfrak{M}_0^+) = 1$.

2. μ-répartition.

Rappelons que, si G est un groupe topologique abélien, compact, et μ une <u>mesure</u> sur G (nécessairement positive et de masse totale 1), une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

d'éléments de G est dite μ-répartie (resp. équirépartie si μ est la mesure de Haar de G), si, pour toute fonction φ , continue, de G dans $\mathbb{C}$ (corps des complexes), on a

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \varphi(u_n) = \mu(\varphi) \quad .$$

Soit $\hat{\mu}$ la transformée de Fourier de μ : $(\hat{\mu}(\chi) = \int_G \chi(-x)\, d\mu(x))$.

Par densité, une condition nécessaire et suffisante de μ-répartition est le critère de Weyl :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi(-u_n) = \hat{\mu}(\chi) \ , \qquad \forall\, \chi \in \hat{G} \quad .$$

De façon plus précise, si, pour tout caractère χ , il existe

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi(-u_n) = \nu(\chi) \quad ,$$

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une mesure de répartition μ , telle que $\hat{\mu} = \nu$.

Rappelons aussi qu'une définition équivalente de la μ-répartition est : Pour tout sous-ensemble E de G , de frontière μ-négligeable, on a

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \operatorname{card}\{n \mid 1 \leqslant n \leqslant N \ ; \ u_n \in E\} = \mu(E) \quad .$$

3. Répartition modulo 1 dans $\mathfrak{F}_0$.

DÉFINITION. - Soit μ une mesure sur le groupe $\mathfrak{M}_0^+$. Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathfrak{F}_0$ est dite μ-répartie mod 1 , si la suite $(\mathcal{H}_0(U_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est μ-répartie dans le groupe compact $\mathfrak{M}_0^+$.

Il revient au même de dire que, pour tout disque $D \subset \mathfrak{M}_0$, on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \operatorname{card}\{n \mid 1 \leqslant n \leqslant N \ ; \ \mathcal{H}_0(U_n) \in D\} = \mu(D) \quad .$$

On peut aussi considérer la notion suivante :

DÉFINITION. - Soient f un polynôme non constant, λ une mesure sur le groupe fini $(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^+$. Une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de polynômes est dite λ-répartie modulo f , si la suite des images par la surjection canonique $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$ est λ-répartie.

On a le lien suivant entre les deux notions.

THÉORÈME 2. - *Soit* μ *une mesure sur* $\mathfrak{M}_0$, *et pour tout polynôme non constant* f , *soit* μ_f *la mesure définie sur* $\mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$ *en attribuant à un élément* $\bar{g}$ $(|g|_0 < |f|_0)$ *de* $\mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$ *la masse*

$$\mu_f\{\bar{g}\} = \mu(D_g) \qquad (D_g = \{X : \ |X - \frac{f}{g}|_0 < \frac{1}{|f|_0}\}) \quad .$$

Pour qu'une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *d'éléments de* $\mathfrak{F}_0$ *soit* μ*-répartie* mod 1 (*resp. équirépartie* mod 1), *il faut et il suffit que, pour tout* f , *la suite de polynômes* $E(fU_n)$ *soit* μ_f*-répartie* mod f (*resp. équirépartie* mod f). *Il suffit d'ailleurs qu'il en soit ainsi pour une infinité de polynômes* f .

La démonstration résulte de façon évidente du fait que les disques $(D_g)_{|g|_0<|f|_0}$ forment une partition de $\mathfrak{M}_0$, et

$$\mathcal{K}_0(U) \in D_g \iff E(fU) \equiv g \mod f \quad .$$

Désignons par $\hat{\mathfrak{F}}_0$ et $\hat{\mathfrak{M}}_0$ les groupes duaux des groupes $\mathfrak{F}_0^+$ et $\mathfrak{M}_0^+$. Soit $\tilde{\chi}$ un caractère différent de 1 du groupe F_q^+ , et soit χ_0 le caractère de $\mathfrak{F}_0^+$ défini par

$$\chi_0(\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n\, T^{-n}) = \tilde{\chi}(a_1) \quad .$$

L'application τ : $U \to \chi_U$: $\chi_U(X) = \chi(UX)$ est un *isomorphisme* (d'ailleurs topologique) de $\mathfrak{F}_0^+$ sur $\hat{\mathfrak{F}}_0$. La décomposition en somme directe

$$\mathfrak{F}_0^+ = \mathbb{Z}^+ \oplus \mathfrak{M}_0^+$$

permet d'identifier $\hat{\mathfrak{M}}_0$ à $(\mathbb{Z}^+)^\perp = \tau(\mathbb{Z}^+)$. D'où l'*isomorphisme* de $\mathbb{Z}^+$ sur $\hat{\mathfrak{M}}_0$:

$$f \to \chi_f \ : \ \chi_f(X) = \chi_0(fX) \quad .$$

Le critère de Weyl s'exprime alors par le lemme suivant.

LEMME 4. - *Pour que la suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *d'éléments de* $\mathfrak{F}_0$ *soit* μ*-répartie* modulo 1 , *il faut et il suffit que, pour tout polynôme* f , *on ait*

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_0(-\,fU_n) = \hat{\mu}(f) \quad .$$

On peut voir aussi que $(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^+$ s'identifie à son dual par

$$g \to \Theta_g : \Theta_g(\overline{h}) = \chi_0(\frac{gh}{f}) \quad ,$$

et le critère de Weyl pour qu'une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de polynômes soit λ-répartie modulo f est donc :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_0(-\frac{gh_n}{f}) = \hat{\lambda}(\overline{g}) \quad , \qquad \forall\ \overline{g} \in \mathbb{Z}/f\mathbb{Z} \quad .$$

4. Le théorème de Koksma.

En appliquant le théorème 1 (puisque $\mathbb{Z}$ est dénombrable), on peut écrire un premier énoncé (simplifié).

THÉORÈME 3. - Soit D un disque compact de $\mathfrak{F}_0$, de rayon q^k , et soit $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'applications continues de D dans $\mathfrak{F}_0$. Posons $\Psi_{m,n} = \Phi_m - \Phi_n$. Supposons qu'il existe un sous-ensemble K de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ (symétrique et contenant la diagonale), satisfaisant à la condition :

(1) Si

$$K_N = \operatorname{card}\{(m , n) \mid (m , n) \in K ; \sup(m , n) \leqslant N\} \quad ,$$

on a

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_N}{N^3} < +\infty \quad ;$$

et tel que, pour tout $(m , n) \notin K$, on ait

$$|\Psi_{m,n}(X) - \Psi_{m,n}(Y)|_0 = q^{\lambda_{m,n}}|X - Y|_0 \ , \qquad \forall\ X , Y \in D \ , \qquad \text{avec } \lambda_{m,n} + k \geqslant -1 \quad .$$

Alors la suite $(\Phi_n(X))_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathfrak{F}_0$ est équirépartie modulo 1 pour presque tout X de D .

Soit J une partie infinie de $\mathbb{N}^*$, et soit φ la bijection croissante de $\mathbb{N}^*$ sur J . Lorsqu'on parlera de répartition pour une suite $(u_n)_{n\in J}$ indexée sur J , il s'agira en réalité de la suite $(u_{\varphi(m)})_{m\in\mathbb{N}^*}$.

On déduit immédiatement du théorème précédent les corollaires **ci-après.**

COROLLAIRE 1. - Soit $X \in \mathfrak{F}_0 - \mathbb{Z}_0$. La suite $(\Lambda X^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie mod 1 pour presque tout $\Lambda \in \mathfrak{F}_0$.

COROLLAIRE 2. - <u>Soit</u> $\Lambda \in \mathfrak{F}_0^*$ $(= \mathfrak{F}_0 - \{0\})$. <u>La suite</u> $(\Lambda X^n)_{n\in\underset{\sim}{N}^*,(n,p)=1}$ <u>est équirépartie</u> mod 1 <u>pour presque tout</u> $X \in \mathfrak{F}_0 - \mathfrak{Z}_0$.

Ce corollaire se démontre en se plaçant dans un disque D de rayon 1 , disjoint de $\mathfrak{Z}_0$. Les éléments de D ont tous la même valeur-absolue $\rho > 1$, et on a

$$|X^n - Y^n|_0 = \rho^{n-1}|X - Y|_0 , \qquad \text{si} \quad (n , p) = 1 ,$$

d'où, avec $\Phi_n(X) = \Lambda X^n$ $((n , p) = 1)$,

$$|\Psi_{m,n}(X) - \Psi_{m,n}(Y)|_0 = |\Lambda(X^n - Y^n - X^m + Y^m)|_0 = |\Lambda|_0 \, \rho^{\sup(m,n)-1}|X - Y|_0$$

$((mn , p) = 1)$.

Pour étudier la répartition de la suite $(\Lambda X^n)_{n\in\underset{\sim}{N}^*}$ pour Λ fixé, sans supprimer les multiples de p , il faut revenir au théorème $\underset{\sim}{1}$.

Pour s entier non négatif, on étudie la répartition mod 1 de la suite $(\Lambda X^{np^s})_{n\in\underset{\sim}{N}^*,(n,p)=1}$, en utilisant l'homomorphisme de $\mathfrak{F}_0^+$ dans lui-même, $X \to X^{p^s}$.

Désignons par $L_s(\Lambda)$ le sous-groupe de $\mathfrak{Z}^+$, formé des polynômes f tels que

$$\chi_0(f\Lambda X^{p^s}) = 1 , \qquad \forall\, X \in \mathfrak{F}_0 ,$$

c'est-à-dire tels que, si $f\Lambda = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n\, T^{-n}$, on ait

$$n \equiv 1 \mod p^s \implies c_n = 0 .$$

LEMME 5. - <u>Pour</u> Λ fixé, <u>la suite</u> $(\Lambda X^{np^s})_{n\in\underset{\sim}{N}^*,(n,p)=1}$ <u>admet, pour presque tout</u> $X \in \mathfrak{F}_0 - \mathfrak{Z}_0$, <u>la mesure de répartition</u> μ_s <u>telle que</u>

$$\hat{\mu}_s(f) = 1 , \qquad \underline{\text{si}} \quad f \in L_s(\Lambda) ,$$

$$\hat{\mu}_s(f) = 0 , \qquad \underline{\text{si}} \quad f \notin L_s(\Lambda) .$$

En effet, pour $f \in L_s(\Lambda)$, on a, pour les sommes de Weyl,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N - [N/p]} \sum_{\substack{n=1 \\ (n,p)=1}}^{N} \chi_0(- f\Lambda X^{np^s}) = 1 , \qquad \forall\, X \in \mathfrak{F}_0 .$$

D'autre part, d'après le théorème 1, et comme pour le corollaire 2, on voit que, pour presque tout $X \in \mathfrak{F}_0 - \mathfrak{Z}_0$, on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{n=1 \\ (n,p)=1}}^{N} \chi_0(-f\Lambda X^{np^s}) = 0 , \qquad \forall f \notin L_s(\Lambda) .$$

Soit $\Gamma_s(\Lambda)$ l'orthogonal (dans la dualité entre $\mathfrak{M}_0^+$ et $\mathcal{Z}^+$) de $L_s(\Lambda)$, c'est-à-dire l'adhérence de l'image de $\mathcal{F}_0^+$ par l'homomorphisme de $\mathcal{F}_0^+$ dans $\mathfrak{M}_0^+$: $X \to \mathcal{H}_0(\Lambda X^{p^s})$. Le quotient $\mathcal{Z}^+/L_s(\Lambda)$ s'identifie canoniquement au dual du groupe $\Gamma_s(\Lambda)$, et on voit alors que μ_s est la mesure de Haar de $\Gamma_s(\Lambda)$ (c'est-à-dire, plus précisément, la mesure sur $\mathfrak{M}_0$ dont le support est $\Gamma_s(\Lambda)$ et dont la trace sur $\Gamma_s(\Lambda)$ est la mesure de Haar de $\Gamma_s(\Lambda)$). On a

$$L_s \subset L_{s+1} \qquad \text{et} \qquad \Gamma_{s+1}(\Lambda) \subset \Gamma_s(\Lambda) .$$

En regroupant les suites $(\Lambda X^{np^i})_{n\in\mathbb{N}^*,(n,p)=1}$ pour $0 \leqslant i \leqslant s$, on obtient le lemme suivant.

LEMME 6. - <u>Pour</u> Λ <u>fixé, la suite</u> $(\Lambda X^n)_{n\in\mathbb{N}^*,p^{s+1}\nmid n}$ <u>admet, pour presque tout</u> $X \in \mathcal{F}_0 - \mathcal{Z}_0$, <u>la mesure de répartition</u>

$$\nu_s = \frac{1 - 1/p}{1 - 1/p^{s+1}} \sum_{i=0}^{s} \frac{1}{p^i} \mu_i .$$

On vérifie aisément qu'on peut "passer à la limite", et on obtient donc le théorème suivant.

THÉORÈME 4. - <u>Soit</u> $\Lambda \in \mathcal{F}_0^*$. <u>Pour presque tout</u> $X \in \mathcal{F}_0 - \mathcal{Z}_0$, <u>la suite</u> $(\Lambda X^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ <u>admet la mesure de répartition</u>

$$\nu = (1 - \frac{1}{p}) \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\mu_i}{p^i} ,$$

<u>c'est-à-dire la mesure dont la transformée de Fourier est</u>

$$\hat{\nu}(f) = \frac{1}{p^{s_0(f)}} ,$$

<u>où</u> $s_0(f)$ <u>désigne le premier indice tel que</u> $f \in L_{s_0}(\Lambda)$ ($\hat{\nu}(f) = 0$, <u>si</u> $\forall s$, $f \notin L_s(\Lambda)$) .

COROLLAIRE 1. - <u>Une condition nécessaire et suffisante (sur</u> Λ) <u>pour que la suite</u> $(\Lambda X^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ <u>soit équirépartie</u> modulo 1 <u>pour presque tout</u> $X \in \mathcal{F}_0 - \mathcal{Z}_0$ <u>est que,</u>

<u>pour tout</u> s , <u>on ait</u> $L_s(\Lambda) = \{0\}$, <u>c'est-à-dire que, pour tout polynôme non nul</u> f , <u>si</u>

$$f\Lambda = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n T^{-n} ,$$

<u>il existe, pour tout entier</u> $s \geqslant 0$, $n \in Z$ <u>tel que l'on ait</u>

$$n \equiv 0 \pmod{p^s} \quad \underline{\text{et}} \quad c_n \neq 0 .$$

On peut alors vérifier directement que l'ensemble des Λ pour lesquels, pour presque tout $X \in \mathfrak{F}_0 - \mathfrak{Z}_0$, la suite $(\Lambda X^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie mod 1 , est presque tout $\mathfrak{F}_0$. Ceci est évidemment une conséquence immédiate du corollaire 1 du théorème.

Il est intéressant d'examiner ce qui se passe dans le cas où $\Lambda = 1$. On voit que, dans ce cas, $\Gamma_s(1) = \mathfrak{M}_0^{p^s}$ (c'est-à-dire l'image de $\mathfrak{M}_0$ par $X \to X^{p^s}$), d'où le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2. - <u>Pour presque tout</u> $X \in \mathfrak{F}_0 - \mathfrak{Z}_0$, <u>la suite</u> $(X^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ <u>a la mesure de répartition</u>

$$\nu = (1 - \frac{1}{p}) \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{\delta_s}{p^s} ,$$

<u>où</u> δ_s <u>est la mesure de Haar de</u> $\mathfrak{M}_0^{p^s}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BATEMAN (Paul T.) and DUQUETTE (Alfred L.). - The analogue of the Pisot-Vijayaraghavan numbers in fields of formal power series, Illinois J. of Math., t. 6, 1962, p. 594-606.

[2] BERTRANDIAS (Françoise). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques, Bull. Soc. math. France, Mémoire n° 4, 1965, VI + 98 p. (Thèse Sc. math. Paris, 1965).

[3] CARLITZ (L.). - Diophantine approximation in fields of characteristic p , Trans. Amer. math. Soc., t. 72, 1952, p. 187-208.

[4] CIGLER (Johann) und HELMBERG (Gilbert). - Neuere Entwicklungen der Theorie der Gleichverteilung, Jahresber. Deutschen Math. Verein., t. 64, 1962, p. 1-50.

[5] CHAUVINEAU (Jean). - Théorème de Koksma pour les parties entières dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{Q}_p$, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 8e année, 1966/67, n° 7, 12 p.

[6] GRANDET-HUGOT (Marthe). - Nombre de Pisot dans un corps de séries formelles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 8e année, 1966/67, n° 4, 12 p.

[7] de MATHAN (Bernard). - Sur un théorème métrique d'équirépartition mod 1 dans un corps de séries formelles sur un corps fini, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 265, 1967, Série A, p. 289-291.