Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Pierre Wassef

Une classe d'ensembles d'unicité des séries trigonométriques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 9, nº 1 (1967-1968), exp. nº 3, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1967-1968__9_1_A3_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
9e année, 1967/68, n° 3

13 novembre 1967

UNE CLASSE D'ENSEMBLES D'UNICITÉ DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

par Pierre WASSEF

Tous les résultats ici exposés se trouvent dans le très bon livre de J.-P. KAHANE et R. SALEM [3].

Nous considèrerons des séries trigonométriques de la forme

$$(1) \qquad S \sim \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) , \qquad a_n , b_n \in \mathbb{R} .$$

On sait, depuis les travaux de CANTOR, que si une telle série converge vers zéro partout, alors elle est identiquement nulle (i. e. $a_n = b_n = 0$).

CANTOR lui-même a généralisé ce résultat en montrant que si la série (1) converge vers zéro partout, sauf peut-être en les points d'un ensemble fini E , le résultat est le même. Il a par la suite montré que ce théorème reste vrai si l'ensemble E est infini, mais tel que l'un de ses ensembles dérivés (d'ordre fini ou transfini) soit vide ; autrement dit, si E est dénombrable <u>réductible</u>. Ces travaux datent de 1870 ; il fallut attendre jusqu'en 1908 pour que YOUNG montre qu'il en est de même si E est un ensemble dénombrable <u>quelconque</u>.

Ces considérations nous conduisent à poser la définition suivante :

<u>Ensembles d'unicité</u>. - Un ensemble $E \subset [0 , 2\pi)$ est dit <u>ensemble d'unicité</u>, s'il n'existe aucune série trigonométrique (1) qui converge partout vers zéro, sauf peut-être pour $t \in E$, exceptée la série identiquement nulle. Si E n'est pas d'unicité, on dit que c'est un <u>ensemble de multiplicité</u>.

Dans tout ce qui suit, les ensembles notés E seront inclus dans l'intervalle $[0 , 2\pi)$, et nous désignerons par $E \pmod{2\pi}$ l'ensemble des réels congrus modulo 2π à des points de E .

On voit donc que tout ensemble dénombrable est un ensemble d'unicité (du type U).

D'autre part, il est facile de voir (cf. appendice I) que tout ensemble E , de mesure $|E| > 0$, est un ensemble de multiplicité (du type M). Par conséquent, le problème est de classer tous les ensembles de mesure nulle en ensembles du type U et ensembles du type M .

En ce qui concerne les ensembles parfaits symétriques $E(\xi)$ de rapport constant ξ (cf. [3]), le problème a été résolu récemment, en 1955, par R. SALEM ; on lui doit le résultat suivant :

THÉORÈME (SALEM). - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble parfait symétrique, de rapport constant $E(\xi)$, soit du type U , est que $1/\xi \in S$, S étant l'ensemble des nombres de Pisot-Vijayaraghavan.

C'est ce résultat que nous nous proposons d'établir.

On rappelle que S est l'ensemble des entiers algébriques θ , dont tous les conjugués (sauf θ lui-même) sont de modules strictement inférieurs à 1 .

On doit à C. PISOT (cf. [5], [6]) le résultat suivant :

THÉORÈME 1. - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre réel $\theta > 1$ appartienne à l'ensemble S , est qu'il existe un nombre réel $\lambda \neq 0$, tel que la série

$$\sum_0^\infty \sin^2 \pi\lambda\theta^n$$

converge.

Pour établir le théorème de Salem, nous allons utiliser les deux critères fondamentaux suivants :

THÉORÈME 2 [3]. - Pour qu'un ensemble compact $E \subset (0 , 2\pi)$ soit du type M , il faut et il suffit qu'il existe une pseudo-fonction $S \neq 0$ portée par E (mod 2π).

Démonstration. - (En ce qui concerne la théorie des pseudo-fonctions, cf. appendice II ou [3].)

(a) On va d'abord montrer qu'étant donnée une pseudo-fonction

$$S \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} ,$$

on a, en tout point où elle est "nulle",

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{-N}^{+N} c_n e^{int} = 0 .$$

Par translation, on se ramène au cas où $t = 0$, en notant D_n le noyau de Dirichlet, soit

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \dots + \cos nt$$

$$= \frac{1}{2} \sin nt \cot g \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cos nt \quad .$$

Il est clair que l'on a

(2) $$\int S\, D_n = \pi \sum_{-n}^{+n} c_i \quad .$$

La pseudo-fonction S étant nulle au voisinage de 0, on peut modifier D_n dans ce voisinage, sans modifier le "produit scalaire" (2) ; soit donc ω une fonction de la classe A, égale à $\cot g \frac{t}{2}$ hors d'un voisinage suffisamment petit de zéro ; on a alors

$$2 \int S D_n = \int S\omega \sin nt + \int S \cos nt \quad ;$$

les deux termes du deuxième membre, représentant des coefficients de pseudo-fonctions, tendent vers zéro pour n tendant vers l'infini, et par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{-n}^{+n} c_j = 0 \quad .$$

(b) Pour établir la réciproque, il nous suffira de montrer que, <u>si la série trigonométrique</u> $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$ <u>converge vers zéro</u> (au sens de $\lim_{n\to+\infty} \sum_{-n}^{+n}$) <u>en tout point</u> t <u>d'un intervalle ouvert</u> I, <u>alors elle représente une pseudo-fonction</u> S <u>qui est nulle sur</u> I.

Tout d'abord, il est clair que les hypothèses impliquent que $c_n = o(1)$ quand $n \to \pm\infty$.

On va ensuite montrer que, sous ces hypothèses, la fonction continue

$$F(t) = c_0 \frac{t^2}{2} - \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{c_n}{n^2} e^{int}$$

(l'accent indiquant que l'on somme pour $n \neq 0$) est linéaire sur I et que, par conséquent (cf. appendice II), la pseudo-fonction S est nulle sur I ; cette démonstration repose sur ce que l'on appelle la "théorie de Riemann" des séries trigonométriques.

Soit

$$\Delta_2 F(t\,,\,h) = F(t+h) + F(t-h) - 2F(t) \quad ;$$

un calcul simple montre que

$$(3) \qquad \frac{\Delta_2 F(t\ ,\ 2h)}{4h^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n\ \omega(nh)\ e^{int}\ , \qquad \text{avec}\quad \omega(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\ .$$

En posant $S_n(t) = \sum_{-n}^{+n} c_j\ e^{ijt}$, la série (3) s'écrit encore :

$$S_0(t) + \sum_{1}^{+\infty} (S_n(t) - S_{n-1}(t))\ \omega(nh)\ ,$$

donc

$$\frac{\Delta_2 F(t\ ,\ 2h)}{4h^2} = \sum_{0}^{+\infty} (\omega(nh) - \omega[(n+1)h])\ S_n(t)\ .$$

Soient Σ_1 la somme des N premiers termes de cette série, et Σ_2 le reste ; on a

$$\sum_{0}^{+\infty} |\omega(nh) - \omega[(n+1)h]| = \sum_{0}^{+\infty} \left|\int_{nh}^{(n+1)h} \omega'(x)\ dx\right| \leqslant \int_0^{\infty} |\omega'(x)|\ dx = C < +\infty\ ,$$

C étant fini et indépendant de h ; on a, pour tout $h \geqslant 0$;

$$|\Sigma_2| \leqslant C \sup_{n \geqslant N} |S_n(t)|\ ;$$

d'autre part, il est clair que

$$\lim_{h \to 0} \Sigma_1 = 0\ ,$$

et par suite, on a, si $t \in I$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta_2 F(t\ ,\ h)}{h^2} = 0\ ,$$

ce qui implique que, à la fois, F et $-F$ sont convexes sur I , donc que F est linéaire sur I .

Q. E. D.

Ce théorème va nous permettre d'en établir un autre qui nous sera très utile :

THÉORÈME 3 [3]. - Pour qu'un ensemble compact soit du type U , il suffit que l'on puisse trouver une suite infinie de fonctions $\lambda_k(x)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1° Le support de λ_k est disjoint de E pour tout k ;

2° <u>Chaque</u> λ_k <u>appartient à la classe</u> A ; <u>i. e.</u>

$$\lambda_k(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_n^{(k)} e^{int} \qquad \underline{\text{et}} \qquad \|\lambda_k\|_A = \sum_{-\infty}^{+\infty} |\gamma_n^{(k)}| < \infty ,$$

<u>et de plus</u> $\|\lambda_k\|_A < B$, <u>où</u> B <u>est indépendant de</u> k ;

3° $\lim_{k\to+\infty} \gamma_n^{(k)} = 0$ <u>si</u> $n \neq 0$, $\lim_{k\to+\infty} \gamma_0^{(k)} = \ell \neq 0$.

<u>Démonstration</u>. - Soit S une pseudo-fonction portée par E .

$$S \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} ,$$

on a, d'après 1°,

$$\int S\bar{\lambda}_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \bar{\gamma}_n^{(k)} = 0 \qquad \text{pour tout } k .$$

Or on peut écrire la série sous la forme

$$\sum_{|n|>N} c_n \bar{\gamma}_n^{(k)} + \sum_{1\leqslant|n|\leqslant N} c_n \bar{\gamma}_n^{(k)} + c_0 \bar{\gamma}_0^{(k)} ,$$

et l'on a

$$\Big| \sum_{|n|>N} c_n \bar{\gamma}_n^{(k)} \Big| \leqslant B \sup_{|n|>N} |c_n| ,$$

quantité arbitrairement petite pour N suffisamment grand ; d'autre part,

$$\lim_{k\to\infty} \Big| \sum_{1\leqslant|n|\leqslant N} c_n \bar{\gamma}_n^{k} \Big| = 0 \qquad (\text{d'après le } 3°) ,$$

et

$$\lim_{k\to+\infty} c_0 \bar{\gamma}_0^{(k)} = c_0 \ell .$$

Par conséquent, $c_0 \ell = 0$, d'où $c_0 = 0$.

En multipliant S par e^{-ikt} , et en faisant le même raisonnement, on montre que $c_k = 0$ pour tout k , donc que $S \equiv 0$, et la conclusion est une conséquence du théorème 2.

Q. E. D.

Ce critère va nous permettre de construire de nombreux ensembles du type U .

<u>Ensembles du type</u> H (RAJCHMAN). - Un compact E est dit <u>du type</u> H , s'il existe une suite croissante infinie d'entiers n_k et un intervalle ouvert I tels

que tous les ensembles $n_k E \pmod{2\pi}$ (i. e. les ensembles de point $n_k x$, où $x \in E$, définis modulo 2π) soient disjoints de I.

THÉORÈME 4. - Tout ensemble du type H est ensemble d'unicité.

Démonstration. - Soit $\lambda(t)$ une fonction de la classe A dont le support est intérieur à $I \pmod{2\pi}$ et dont la valeur moyenne n'est pas nulle ; soit

$$\lambda(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_m e^{imt} , \qquad \gamma_0 \neq 0 ,$$

posons

$$\lambda_k(t) = \lambda(n_k t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_m e^{imn_k t} ,$$

il est clair que la suite des fonctions $\lambda_k(t)$ satisfait les conditions du théorème 3.

Q. E. D.

Ensembles du type $H^{(n)}$ (PJATECKIJ-ŠAPIRO). - Considérons une famille de vecteurs V_k à n coordonnées entières :

$$V_k = (p_k^{(1)} , p_k^{(2)} , \ldots , p_k^{(n)}) , \qquad k = 1 , 2 , \ldots .$$

Cette famille sera dite normale si, quels que soient n entiers non tous nuls $a_1 , a_2 , \ldots , a_n$, on a

$$\lim_{k\to+\infty} |a_1 p_k^{(1)} + a_2 p_k^{(2)} + \ldots + a_n p_k^{(n)}| = +\infty .$$

Un ensemble compact E sera dit du type $H^{(n)}$, s'il existe un domaine Δ du tore à n dimensions et une famille normale de vecteurs V_k tels que tous les ensembles $V_k E \pmod{2\pi}$ (i. e. l'ensemble des points du tore à n dimensions qui sont de la forme

$$(p_k^{(1)} x \pmod{2\pi} , \ldots , p_k^{(n)} x \pmod{2\pi})$$

avec $x \in E$) soient disjoints de Δ.

THÉORÈME 5. - Tout ensemble du type $H^{(n)}$ est ensemble d'unicité.

La démonstration se fait en supposant que Δ est le produit de n intervalles ouverts $I , J , \ldots , L$, en désignant par $\lambda , \mu , \ldots , \varepsilon$ n fonctions de la classe A de supports respectivement intérieurs à $I , J , \ldots , L$, et en posant

$$\lambda_k(t) = \lambda(p_k^{(1)}\ t) \times \mu(p_k^{(2)}\ t) \times \ldots \times \varepsilon(p_k^{(n)}\ t) \quad .$$

On vérifie que ces fonctions $\lambda_k(t)$ vérifient les conditions du théorème 3 si λ , μ , ... , ε ont chacune leur valeur moyenne non nulle.

Q. E. D.

Nous aurons aussi à nous servir des deux théorèmes suivants que nous donnons sans démonstration :

THÉORÈME (a) ([1], [2], [4]). - La réunion de deux compacts du type U est du type U .

THÉORÈME (b) ([1], [2], [4]). - Si deux compacts E_1 et E_2 contenus dans $[0 , 2\pi]$ sont homothétiques, ils sont tous les deux du type U ou du type M .

Démonstration du théorème de Salem. - Soit $L(x)$ la "fonction de Lebesgue" attachée à l'ensemble parfait $E(\xi)$ (cf. [3] ou appendice III), et notons dL la mesure qu'elle définit.

On déduit du théorème 2 que, si dL est une pseudo-fonction, $E(\xi)$ est du type M .

Nous allons montrer que, si $1/\xi = \theta \notin S$, alors dL est une pseudo-fonction ; pour cela, considérons la transformée de Fourier-Stieljes de dL , soit

$$\Gamma(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux}\, dL(x) \quad .$$

Un calcul simple montre que, si l'on construit $E(\xi)$ sur l'intervalle

$$\left[\frac{-1}{1-\xi} , \frac{1}{1-\xi}\right] \quad ,$$

on obtient pour expression de $\Gamma(u)$:

$$\Gamma(u) = \prod_0^\infty \cos u\xi^k \quad .$$

Dire que dL est une pseudo-fonction équivaut à dire que $\Gamma(u) = o(1)$ quand $|u| \to \infty$; supposons que $\Gamma(u) \neq o(1)$, on peut trouver une suite croissante u_s de nombres réels tendant vers l'infini et tels que

$$|\Gamma(u_s)| \geqslant \delta > 0 \ , \qquad \text{avec} \quad 0 < \delta < 1 \quad .$$

On peut toujours écrire, en posant $\xi = \frac{1}{\theta}$,

$$u_s = \pi\lambda_s \theta^{m_s} ,$$

où $\{m_s\}$ est une suite croissante d'entiers sans limite, et avec $1 \leqslant \lambda_s < \theta$.

Quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que $\lim_{s\to+\infty} \lambda_s = \lambda$ avec $1 \leqslant \lambda \leqslant \theta$.

On a, pour tout entier s ,

$$\delta \leqslant |\Gamma(u_s)| \leqslant |\cos \pi\lambda_s \times \cos \pi\lambda_s \theta \times \ldots \times \cos \pi\lambda_s \theta^{m_s}| ,$$

donc

$$\delta^2 \leqslant \prod_{q=0}^{m_s} [1 - \sin^2 \pi\lambda_s \theta^q] ,$$

et compte-tenu de l'inégalité $1 + x < e^x$,

$$\exp(- \sum_{q=0}^{m_s} \sin^2 \pi\lambda_s \theta^q) \geqslant \delta^2 ,$$

d'où

$$\sum_{q=0}^{m_s} \sin^2 \pi\lambda_s \theta^q \leqslant \log(\frac{1}{\delta^2}) .$$

Or, pour $r > s$, on a

$$\sum_{q=0}^{m_s} \sin^2 \pi\lambda_r \theta^q \leqslant \sum_{q=0}^{m_r} \sin^2 \pi\lambda_r \theta^q \leqslant \log(\frac{1}{\delta^2}) ,$$

donc, pour s fixé et r tendant vers l'infini, on obtient

$$\sum_{q=0}^{m_s} \sin^2 \pi\lambda\theta^q \leqslant \log(\frac{1}{\delta^2}) ,$$

ceci étant vrai quel que soit s , on en déduit

$$\sum_{q=0}^{\infty} \sin^2 \pi\lambda\theta^q \leqslant \log(\frac{1}{\delta^2}) ,$$

ce qui montre, d'après le théorème 1, que $\theta \in S$.

On a donc établi que, si $\frac{1}{\xi} \notin S$, l'ensemble parfait $E(\xi)$ construit sur l'intervalle $(\frac{-1}{1-\xi}, \frac{1}{1-\xi})$ est du type M ; ceci entraîne, d'après les théorèmes

(a) et (b), que tout ensemble $E(\xi)$, construit sur un intervalle quelconque, est du type M si $\frac{1}{\xi} \notin S$. (En effet, pour un même ξ , deux ensembles $E(\xi)$ sont homothétiques.)

La réciproque consiste à démontrer que, si $\frac{1}{\xi} = \theta \in S$ est algébrique de degré n , alors l'ensemble $E(\xi)$ construit sur $[0 , 2\pi]$ est du type $H^{(n)}$.

La démonstration est basée sur le théorème de Minkowski ; on construit, par récurrence, une famille normale de vecteurs V_k à coordonnées entières (cf. [3]).

Appendice I (cf. [8])

Tout ensemble E de mesure $|E| > 0$ est du type M

Ceci vient du fait que l'ensemble des points où une série trigonométrique ne converge pas vers 0 est un borélien ; par conséquent, si cet ensemble ne contient aucun ensemble parfait, il est dénombrable, et donc de mesure nulle.

On peut donc supposer que E est un borélien de mesure $|E| > 0$, et soit P un ensemble parfait contenu dans E tel que $|P| > 0$. Soit $\chi(x)$ la fonction caractéristique de P ; la série de Fourier de $\chi(x)$ converge vers zéro sur tout intervalle contigu à P , donc dans le complémentaire de P , donc dans le complémentaire de E ; mais on a, pour cette série,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int \chi(x)\, dx = \frac{|P|}{\pi} > 0 \quad .$$

Q. E. D.

Appendice II (cf. [3])

Pseudo-fonctions

On appelle pseudo-fonction une série trigonométrique S de la forme

$$S \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{int} \ , \qquad \text{avec} \quad c_n \in \mathbb{C} \ , \tag{1}$$

et

$$c_n = o(1) \qquad \text{quand} \quad n \to \pm \infty \ .$$

A une telle pseudo-fonction, on associe les fonctions holomorphes

$$\mathbb{S}^+(z) = \sum_0^\infty c_n z^n \qquad \text{pour} \quad |z| < 1 \quad ,$$

$$\mathbb{S}^-(z) = - \sum_{-\infty}^{-1} c_n z^n \qquad \text{pour} \quad |z| > 1 \quad .$$

On dira qu'un point e^{ia} est régulier pour le couple $(\mathbb{S}^+ , \mathbb{S}^-)$, si l'on peut définir, en son voisinage, une fonction holomorphe qui coïncide avec $\mathbb{S}^+$ et $\mathbb{S}^-$, respectivement dans les parties du voisinage où elles sont définies.

On dira que S est nulle sur un ouvert Ω , si pour tout $a \in \Omega$, e^{ia} est régulier pour le couple $(\mathbb{S}^+ , \mathbb{S}^-)$. On dira que S est portée par un fermé F , si S est nulle sur le complémentaire de F . Le support de S est l'ensemble des a tels que e^{ia} ne soit pas régulier pour le couple $(\mathbb{S}^+ , \mathbb{S}^-)$; c'est le plus petit fermé portant S .

On convient de dire que S est une fonction sommable f (ou une mesure $d\mu$), si f (ou $d\mu$) a pour série de Fourier la série (1).

Une fonction sommable φ est dite "de la classe A ", si

$$\varphi(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{int} , \qquad \text{avec} \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} |\gamma_n| < \infty \quad .$$

S étant une pseudo-fonction, et φ une fonction de la classe A , on définit leur "produit scalaire",

$$\langle S , \varphi \rangle = \int S\overline{\varphi} = 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \overline{\gamma}_n \quad ,$$

où

$$S \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} \qquad \text{et} \qquad \varphi = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{int} \quad .$$

On démontre que, si S et φ ont leurs supports disjoints, alors $\langle S , \varphi \rangle = 0$.

D'autre part, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une pseudo-fonction $S \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$ soit "nulle" sur un intervalle ouvert I , est que la fonction continue

$$F(t) = c_0 \frac{t^2}{2} - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{c_n}{n^2} e^{int}$$

soit linéaire sur I .

Appendice III (cf. [3])

Fonction $L(x)$ de Lebesgue construite sur $E(\xi)$

On sait, qu'étant donnés un nombre réel ξ , $0 < \xi < \frac{1}{2}$, et un intervalle $[a , b]$, l'ensemble $E(\xi)$ construit sur $[a , b]$ est égal à l'intersection des ensembles E_k , pour $k = 1 , 2 , \ldots ,$ où E_k désigne l'ensemble obtenu après k opérations de dissection du type $(2 , \xi)$ successives de $[a , b]$.

E_k est formé de 2^k intervalles fermés de longueur commune $(b - a)\xi^k$; soit $L_k(x)$ la fonction continue égale à 0 pour $x \leqslant a$, égale à 1 pour $x \geqslant b$, et croissant linéairement de $\frac{1}{2^k}$ sur chacun des intervalles constituant E_k . Quand $k \to \infty$, $L_k(x)$ tend uniformément vers une fonction $L(x)$ continue, croissante au sens large, et constante sur chaque intervalle contigu à $E(\xi)$: c'est la fonction de Lebesgue construite sur $E(\xi)$. La variation de $L(x)$ sur un intervalle est la L-mesure de cet intervalle, notée dL .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARY (Nina). - Sur l'unicité du développement trigonométrique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 177, 1923, p. 1195-1197.

[2] BARY (Nina). - Sur l'unicité du développement trigonométrique, Fund. Math., t. 9, 1927, p. 62-115.

[3] KAHANE (Jean-Pierre) et SALEM (Raphaël). - Ensembles parfaits et séries trigonométriques. - Paris, Hermann, 1963 (Act. scient. et ind., 1301).

[4] MARCINKIEWICZ (J.) and ZYGMUND (A.). - Two theorems om trigonometrical series, Mat. Sbornik, Série 2, t. 44, 1937, p. 733-738.

[5] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Serie 2, t. 7, 1938, p. 205-248 (Thèse Sc. math. Paris, 1938).

[6] PISOT (Charles). - Sur une famille remarquable d'entiers algébriques formant un ensemble fermé, Colloque sur la théorie des nombres [1955. Bruxelles], p. 77-83. - Liège, G. Thone ; Paris, Masson, 1956 (Centre belge de Recherches mathématiques).

[7] SALEM (Raphaël). - Algebraic numbers and Fourier analysis. - Boston, Heath, 1963 (Heath mathematical Monographs).

[8] ZYGMUND (A.). - Trigonometric series, Vol. 1 and 2, 2nd ed. - Cambridge, University Press, 1959.