MICHEL MENDÈS FRANCE

Un résultat de transcendance

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 9, nº 1 (1967-1968), exp. nº 2, p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1967-1968__9_1_A2_0>

UN RÉSULTAT DE TRANSCENDANCE

par Michel MENDÈS FRANCE

(d'après S. MANDELBROJT [2])

1. Le théorème 1.

Dans cet exposé, on établit le résultat suivant [2] :

THÉORÈME 1. - Soit f une fonction holomorphe à l'origine, uniforme dans tout son domaine de définition, régulière à l'infini, et dont le développement de Maclaurin $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est à coefficients entiers. Si, dans le demi-plan $\operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2}$, il y a une infinité de singularités [1] de f, et si, sur le demi-plan $\operatorname{Re}(z) \leq \frac{1}{2}$, f n'a qu'un nombre fini de pôles, alors l'un au moins d'entre eux est d'affixe transcendante.

Ce théorème pourrait donner une nouvelle technique de construction de nombres transcendants. Malheureusement, on ne sait pas s'il existe une fonction f vérifiant les conditions du théorème.

La démonstration du théorème repose sur 3 lemmes, dont chacun est intéressant en soi.

2. Le théorème de Hurwitz ([1], [2]).

Le premier lemme est dû à HURWITZ, et s'énonce ainsi :

LEMME 1. - Soient $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^{n+1}}$ deux fonctions holomorphes en dehors d'un disque. Soit $F = H(f, g)$ la fonction définie par

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n+1}} ,$$

où $c_n = a_0 b_n + \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 b_{n-2} + \dots + \binom{n}{n} a_n b_0$. Si $S(f)$ (resp. $S(g)$, $S(F)$) représente l'ensemble des singularités de f (resp. g, F), on a

$$S(F) \subset S(f) + S(g) .$$

---

[1] Ceci signifie qu'il y a d'autres singularités qu'un nombre fini de pôles.

Remarque. - Si f admet une ligne fermée de singularités, on convient que $S(f)$ contient, non seulement la ligne, mais aussi le domaine intérieur à la ligne.

Ce théorème sur la composition des singularités est classique. Il se trouve démontré dans [1] et [2].

3. Le lemme 2.

Montrons le lemme suivant dû à S. MANDELBROJT.

LEMME 2. - Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{Z}$, une fonction holomorphe à l'origine, uniforme dans son domaine de définition, et régulière à l'infini. Si toutes ses singularités sont dans le demi-plan $\mathrm{Re}(z) > \frac{1}{2}$, alors

$$f(z) = \frac{Q(z)}{(1 - z)^q} ,$$

où q est un entier positif, et Q un polynôme (à coefficients entiers).

En effet, posons $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}$. Par hypothèse,

$$S(f_1) \subset \{\tfrac{1}{z} \mid \mathrm{Re}(\tfrac{1}{z}) > \tfrac{1}{2}\} = \{z \mid |z - 1| < 1\} .$$

Soit $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$. g a pour seule singularité le point $z = 1$. Considérons la fonction $F = H(f_1 , g)$ dont les singularités $S(F)$ sont intérieures à

$$S(f) + S(g) = \{z \mid |z| < 1\} .$$

F s'écrit sous la forme

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n+1}} ,$$

où $c_n = a_0 - \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} a_2 - \dots = \pm \Delta^n a_0$ (différence n-ième). F est donc à coefficients entiers et sans singularité en dehors du disque $\{z \mid |z| < 1\}$. Par suite,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n|^{1/n} < 1 .$$

Donc, à partir d'un certain rang, $c_n = 0$. Or f_1 peut s'écrire sous la forme $f_1(z) = \frac{1}{1 - z} \sum_0^{\infty} (\frac{z}{1 - z})^n \Delta_n a_0$. Par suite, $f_1(z) = \frac{P(z)}{(1 - z)^q}$, où P est un polynôme et q un entier $\geqslant 0$. Ainsi

$$f(z) = \frac{1}{z} f_1(\frac{1}{z}) = \frac{Q(z)}{z^s (1-z)^q} ,$$

où Q est un polynôme et $s \in \mathbb{Z}$. Mais f est, par hypothèse holomorphe à l'origine, donc $s = 0$ et

$$f(z) = \frac{Q(z)}{(1-z)^q} .$$

C. Q. F. D.

4. Polarité algébrique.

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{Z}$ une fonction holomorphe et uniforme dans tout son domaine de définition. Soit Σ un sous-ensemble du plan complexe. On suppose qu'il existe un polynôme P à coefficients entiers tel que $f.P$ soit régulier sur Σ . Soit $p = p(f , \Sigma)$ le degré minimum du polynôme qui vérifie la propriété précédente. L'entier p s'appelle la polarité algébrique en Σ . Si un tel polynôme n'existe pas, on pose $p = +\infty$.

PROPOSITION. - *Soit S l'ensemble des singularités de la fonction f . $p(f , S)$ n'est fini que si S contient un nombre fini de points qui sont des pôles de f , et si, de plus, ils sont tous à coordonnées algébriques.*

Cela est évident.

LEMME 3. - *Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{Z}$, une fonction holomorphe à l'origine, uniforme dans son domaine de définition, et régulière à l'infini. L'inégalité suivante a lieu :*

$$p(f ; \{z \mid \mathrm{Re}(z) \leq \tfrac{1}{2}\}) \geq p(f ; \{z \mid \mathrm{Re}(z) > \tfrac{1}{2} , z \neq 1\}) .$$

(On ne peut améliorer ce résultat en remplaçant $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{2} + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, comme le montre l'exemple $\frac{z+1}{z^3+1}$.)

Le théorème est trivialement conséquence du lemme 3. Démontrons le lemme :

Posons $A = \{z \mid \mathrm{Re}(z) \leq \frac{1}{2}\}$ et $B = \{z \mid \mathrm{Re}(z) > \frac{1}{2} , z \neq 1\}$. Si $p(f ; A) = +\infty$ il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que $p(f ; A) < \infty$. Nous allons démontrer le lemme par l'absurde.

Si, en effet, $p(f ; B) > p(f ; A)$, on en déduit que f contient nécessairement des singularités dans B .

Par ailleurs, l'inégalité montre que $p(f\ ;\ A)$ est fini. Il existe donc un polynôme $P \in \mathbb{Z}[x]$ tel que $Pf = F$ soit holomorphe dans A. Soit k le degré de P supposé minimal. La fonction

$$\Phi(z) = \frac{F(z)}{(1-z)^k}$$

est à coefficients de Maclaurin entiers, réguliers à l'infini, et a les mêmes singularités que F dans B. Comme Φ est holomorphe dans A, on en déduit que Φ a toutes ses singularités dans B. D'après le lemme 2, on peut donc écrire

$$\Phi(z) = \frac{Q(z)}{(1-z)^h}, \qquad Q \text{ polynôme.}$$

Φ n'admet donc que le point $z = 1$ pour seule singularité, et ceci est en contradiction avec le fait que f, donc Φ, admet des singularités dans B.

C. Q. F. D.

5. Remarque.

Le théorème 1, ainsi que les lemmes 2 et 3, ont été généralisés par S. MANDELBROJT. Si on désigne par $C(a\ ,\ b)$ le disque ouvert $\{z \mid |z - a| < b\}$ $(a \in \mathbb{C}$, $0 \neq b \in \mathbb{R})$, on a, par exemple, le résultat suivant :

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction holomorphe à l'origine, uniforme, et régulière à l'infini. S'il existe un nombre entier $N > 0$ tel que $a_n N^n$ soit entier $(n = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots)$, alors

$$p\left(f\ ;\ \left\{z \mid z \notin C\left(\frac{N^2}{N^2-1}\ ,\ \frac{N}{N^2-1}\right)\right\}\right) \geq p\left(f\ ;\ \left\{z \mid z \in C\left(\frac{N^2}{N^2-1}\ ,\ \frac{N}{N^2-1}\right)\ ,\ z \neq 1\right\}\right).$$

La démonstration est identique à celle du lemme 3. Pour $N = 1$, on retrouve évidemment les résultats précédents.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HURWITZ (A.). - Sur un théorème de Hadamard, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 128, 1899, p. 350-353.

[2] MANDELBROJT (S.). - Considérations arithmétiques dans la théorie des fonctions d'une variable complexe, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 262, 1966, p. A619-A621.

[3] MANDELBROJT (S.). - Modern researches on the singularities of functions defined by Taylor's series. - Houston, The Rice Institut, 1927 (The Rice Institut Pamphlet, t. 14, 1927, n° 4. Monograph in Mathematics).