

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

DANIEL BARSKY

Interpolation p -adique

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 9, n° 1 (1967-1968),
exp. n° 11, p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1967-1968__9_1_A11_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INTERPOLATION p -ADIQUE

par Daniel BARSKY

(d'après Mme Y. AMICE [1])

Cet exposé reprend, dans le cas particulier de \mathbb{Z}_p et \mathbb{Q}_p , les résultats de la thèse de Mme Y. AMICE sur l'interpolation p -adique. Le but est de caractériser certaines bases normales pour les espaces de fonctions continues de \mathbb{Z}_p dans \mathbb{Q}_p .

1. Suites très bien réparties.

DÉFINITION 1. - Soit F un ensemble fini de cardinal N , et soit u une suite $n \rightarrow u_n$ à valeur dans F . La suite u est bien répartie dans F si, et seulement si :

$$\forall x \in F, \forall n \geq 1, \text{Card}\{u^{-1}(x) \cap [0, \dots, n-1]\} \geq \left[\frac{n}{N} \right],$$

où $\left[\frac{n}{N} \right]$ désigne la partie entière de $\frac{n}{N}$.

On posera $v_u(x, u) = \text{Card}\{u^{-1}(x) \cap [0, \dots, n-1]\}$; on notera v la valuation habituelle de \mathbb{Z}_p , et $|\cdot|_p$ la distance associée. On introduit les relations d'équivalences suivantes :

$$(\Pi_k) \quad x \Pi_k y \iff v(x, y) \geq k;$$

on posera $M_k = \mathbb{Z}_p / \Pi_k$, on appellera $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des représentants de M_k .

Ils peuvent être considérés comme les centres des p^k boules de rayons $(\frac{1}{p})^k$ recouvrant \mathbb{Z}_p . On notera pr_k la projection canonique de \mathbb{Z}_p sur M_k . On notera $V_k(\alpha)$ la boule de centre α et de rayon $(\frac{1}{p})^k$.

DÉFINITION 2. - Une suite u à valeurs dans \mathbb{Z}_p est bien répartie d'ordre h (Br h) si, et seulement si, la suite $pr_i \circ u$ est bien répartie dans M_i pour tout $i \leq h$.

On pose $v_u(\alpha, n, k) = \text{Card}\{u^{-1}(V_k(\alpha)) \cap [0, n-1]\}$. La définition 2 se traduit par

$$v_u(\alpha, n, k) \geq \left[\frac{n}{p^k} \right], \quad \forall 1 \leq k \leq h.$$

DÉFINITION 3. - Une suite u à valeurs dans \mathbb{Z}_p est très bien répartie (TBR), si elle est bien répartie d'ordre h pour tout $h \geq 1$.

PROPOSITION 1. - Une suite u est bien répartie d'ordre h dans \mathbb{Z}_p si, et seulement si, elle satisfait à l'une des quatre conditions suivantes :

(Br h (1)) Quels que soient $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq h$,

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_p} \{v(\alpha, n, k)\} - \inf_{\alpha \in \mathbb{Z}_p} \{v(\alpha, n, k)\} \leq 1 ;$$

(Br h (2)) $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_p, \forall m \geq 1, \forall 1 \leq k \leq h,$

$$v(\alpha, mp^k, k) = m ;$$

(Br h (3)) $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_p, \forall n \geq 1, \forall 1 \leq k \leq h,$

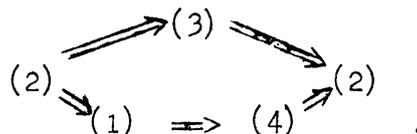
$$v(\alpha, n, k) \geq \left[\frac{n}{p^k} \right] ;$$

(Br h (4)) $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_p, \forall n \geq 1, \forall 1 \leq k \leq h,$

$$v(\alpha, n, k) \leq \left[\frac{n-1}{p^k} \right] + 1 .$$

Il est immédiat que la condition (Br h (3)) est équivalente à la définition (Brh).

On va montrer l'équivalence des quatre conditions dans l'ordre suivant :



(2) \Rightarrow (3) : Soient $n \geq 1, k \leq h$, et $m = \left[\frac{n}{p^k} \right]. mp^k \leq n < (m+1)p^k$,
 donc

$$\forall \alpha \in \mathbb{Z}_p, \quad v(\alpha, mp^k, k) \leq v(\alpha, n, k) \leq v(\alpha, (m+1)p^k, k) ;$$

appliquons (Br h (2)), il vient $m \leq v(\alpha, n, k) \leq (m+1)$, donc

$$\left[\frac{n}{p^k} \right] \leq v(\alpha, n, k) \leq 1 + \left[\frac{n}{p^k} \right] ,$$

ce qui démontre (Br h (3)) et (Br h (1)).

(1) \Rightarrow (4) : Soient $n \geq 1$ et $k \leq h$, posons $\xi = \inf_{\alpha \in \mathbb{Z}_p} v(\alpha, n, k)$, alors

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_p} v(\alpha, n, k) \leq \xi + 1 .$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_{p^k}$ sont des représentants de M_k , donc

$$\sum_{i=1}^{p^k} v(\alpha_i, n, k) = n \implies p^k \xi \leq n \leq p^k(\xi + 1),$$

donc $\xi \leq \left[\frac{n}{p^k} \right] \leq \xi + 1$:

- ou bien $\left[\frac{n}{p^k} \right] = \left[\frac{n-1}{p^k} \right]$, et alors (Br h (4)) est vrai ;

- ou bien $\left[\frac{n}{p^k} \right] = \left[\frac{n-1}{p^k} \right] + 1 \implies n = mp^k$, donc $\xi = m$, et si on avait $\sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_{\neq p}} v(\alpha, n, k) = m + 1$, il viendrait

$$\sum_{i=1}^{p^k} v(\alpha_i, n, k) \geq m + 1 + (p^k - 1)m = n + 1,$$

ce qui est absurde, donc (Br h (4)) est vrai.

(3) \implies (2) : $v(\alpha, mp^k, k) \geq m$, et s'il existait α_i tel que

$$v(\alpha_i, mp^k, k) \geq m + 1,$$

alors il viendrait

$$\sum_{i=1}^{p^k} v(\alpha_i, n, k) \geq n + 1,$$

ce qui est absurde, donc $v(\alpha, mp^k, k) = m$.

(4) \implies (2) : $v(\alpha, mp^k, k) \leq m$, et s'il existait α_i tel que

$$v(\alpha_i, mp^k, k) \leq m - 1,$$

alors on aurait

$$\sum_{i=1}^{p^k} v(\alpha_i, mp^k, k) \leq (m - 1) + m(p^k - 1) = mp^k - 1,$$

ce qui est absurde.

COROLLAIRE. - Une suite est très bien répartie dans $\mathbb{Z}_{\neq p}$ si, $\forall m \geq 0$ et $\forall k \geq 1$, l'ensemble des u_n , avec $n = j + mp^k$, $0 \leq j < p^k$, forme un système de représentants de M_k .

Construction de suites très bien réparties. - Soit une suite finie

$$S_n = \{u_0, \dots, u_{n-1}\} .$$

On dit qu'elle satisfait à (ρ_n) si

$$(\rho_n) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq j \leq n \\ \alpha \in \mathbb{Z}_p \\ k \geq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\frac{j}{p^k} \right] \leq v(\alpha, j, k) \leq 1 + \left[\frac{j-1}{p^k} \right] ;$$

il est immédiat que

$$u \text{ très bien répartie} \iff S_n(u) \text{ satisfait à } (\rho_n), \forall n .$$

PROPOSITION 2. - Les quatre conditions suivantes sont équivalentes : Soit S_n satisfaisant à (ρ_n) , et soit $x \in \mathbb{Z}_p$, on pose

$$v_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} v(x, u_i) ;$$

$$(i) \quad v_n(x) = \inf_{y \in \mathbb{Z}_p} v_n(y) ;$$

$$(ii) \quad v_n(x) = \sum_{k \geq 1} \left[\frac{n}{p^k} \right] ;$$

$$(iii) \quad \forall k \geq 1, \quad v(x, n, k) = \left[\frac{n}{p^k} \right] ;$$

$$(iv) \quad \text{La suite } S_n \cup \{x\} \text{ satisfait à } (\rho_{n+1}).$$

De plus, l'ensemble E_n des x appartenant à \mathbb{Z}_p , et vérifiant l'une de ces quatre propriétés, est ouvert et compact, et si $n = n_0 + n_1 p + \dots + n_h p^h$ avec $0 \leq n_i < p$, on a

$$\mu(E_n) = \prod_{j=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{n_j}{p} \right) ,$$

où μ est la mesure définie de la manière suivante : $\mu(V_k(\alpha)) = \frac{1}{p^k}$.

Démonstration. - (iii) \iff (iv) .

$$(\rho_{n+1}) \implies v(x, n+1, k) \leq 1 + \left[\frac{n+1-1}{p^k} \right] ,$$

or $v(x, n, k) = v(x, n+1, k) - 1$, $\left[\frac{n}{p^k} \right] \leq v(x, n, k) \leq \left[\frac{n}{p^k} \right]$, donc

$$v(x, n, k) = \left[\frac{n}{p^k} \right] .$$

Réciproquement, si on a $\forall k \geq 1$, $v(x, n, k) = \left[\frac{n}{p^k} \right]$, fixons k , et soit $\alpha \in \mathbb{Z}_{\overline{p}}$,

$$v(\alpha, n+1, k) = \begin{cases} v(\alpha, n, k), & \text{si } \alpha \notin V_k(x), \\ v(x, n+1, k), & \text{si } \alpha \in V_k(x), \\ = 1 + \left[\frac{n}{p^k} \right]; & \end{cases}$$

- ou bien $\left[\frac{n+1}{p^k} \right] = \left[\frac{n}{p^k} \right]$, et par conséquent

$$\left[\frac{n+1}{p^k} \right] \leq v(\alpha, n+1, k) \leq 1 + \left[\frac{n}{p^k} \right],$$

et (ρ_{n+1}) est vrai ;

- ou bien $\left[\frac{n+1}{p^k} \right] = 1 + \left[\frac{n}{p^k} \right]$, et on a encore

$$\forall \alpha \in \mathbb{Z}_{\overline{p}}, \quad v(\alpha, n+1, k) \leq 1 + \left[\frac{n}{p^k} \right].$$

Montrons que l'on a aussi $v(\alpha, n+1, k) \geq \left[\frac{n+1}{p^k} \right] = m$. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_{p^k}$ des représentants de M_k , et supposons que $x \in V_k(\alpha_1)$, donc

$$v(\alpha_1, n, k) = m - 1,$$

$$\sum_{i=2}^{p^k} v(\alpha_i, n, k) = n - (m - 1) = m(p^k - 1),$$

or $\forall i$, $v(\alpha_i, n, k) \leq m$, donc, pour $i = 2, \dots, p^k$,

$$v(\alpha_i, n, k) = m,$$

et donc aussi

$$v(\alpha_1, 1+n, k) = m.$$

(ii) \iff (iii). - Le nombre d'indices $j \leq n-1$, tels que $v(x, u_j) = k$, est égal à $v(x, n, k) - v(x, n, k+1)$, car $v(x, n, k)$ est le nombre d'indices $j \leq n-1$, tels que $v(x, u_j) \geq k$. Donc

$$v_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(v(x, n, k) - v(x, n, k+1)),$$

$$v_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} v(x, n, k),$$

alors

$$\rho_n(x) \implies v_n(x) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k} \right], \quad \forall x \in M,$$

et

$$v_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k} \right] \iff v(x, n, k) = \left[\frac{n}{p^k} \right], \quad \forall k \geq 1.$$

(i) \iff (iii) . - On va montrer que $\inf v_n(y) = \sum_{k \geq 1} \left[\frac{n}{p^k} \right]$. On va étudier pour cela l'ensemble E_n des éléments satisfaisant à (iii). Soit h tel que

$$p^h \leq n < p^{h+1},$$

on écrit $n = n_0 + n_1 p + \dots + n_h p^h$, $0 \leq n_i < p$,

$$\forall \alpha \in \mathbb{Z}_p, \quad \left[\frac{n}{p} \right] \leq v(\alpha, n, 1) \leq 1 + \left[\frac{n}{p} \right],$$

donc, parmi les p disques disjoints $V_1(\alpha_i)$ recouvrant \mathbb{Z}_p , il y en a n_0 qui contiennent $1 + \left[\frac{n}{p} \right]$ points de S_n et $p - n_0$ qui en contiennent $\left[\frac{n}{p} \right]$. Notons $\mathcal{E}_{1,n} = \{x \mid v(x, n, 1) = \left[\frac{n}{p} \right]\}$. $\mathcal{E}_{1,n}$ est réunion de $p - n_0$ disques $V_1(\alpha_i)$; plus généralement, notons

$$\mathcal{E}_{k,n} = \{x \mid v(x, n, h) = \frac{n}{p^h}, \quad \forall k \leq h\},$$

$$E_n = \bigcap \mathcal{E}_{k,n} = \mathcal{E}_{h+1,n}.$$

Supposons que, pour $j \leq h$, $\mathcal{E}_{j,n}$ soit réunion disjointe de

$$(p - n_0)(p - n_1) \dots (p - n_{j-1})$$

disques $V_j(\alpha)$ (ce qui est vrai pour $j = 1$), alors, pour $\alpha \in \mathcal{E}_{j,n}$, $V_j(\alpha)$ est réunion de p boules $V_{j+1}(\alpha_i)$, parmi lesquelles il y en a n_j qui contiennent $1 + \left[\frac{n}{p^j} \right]$ points de S_n , et $p - n_j$ qui en contiennent $\left[\frac{n}{p^j} \right]$, donc $V_j(\alpha) \cap \mathcal{E}_{j+1,n}$ est réunion disjointe de $p - n_j$ boules $V_{j+1}(\alpha_i)$, et ceci pour tout $\alpha \in \mathcal{E}_{j,n}$, ce qui montre que $E_n = \mathcal{E}_{h+1,n}$ est réunion disjointe de

$$(p - n_0) \dots (p - n_h)$$

disques $V_{h+1}(\alpha_i)$; c'est donc un ouvert compact de mesure

$$\mu(E_n) = \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{n_j}{p}\right) \neq 0,$$

donc E_n n'est pas vide, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1. - Pour que u soit très bien répartie dans \mathbb{Z}_p , il faut et il suffit que, pour $n \geq 1$,

$$v_n(u_n) = \sum_{k \geq 1} \left[\frac{n}{p^k} \right] .$$

COROLLAIRE 2. - Pour que u soit très bien répartie dans \mathbb{Z}_p , il faut et il suffit que, pour $n \geq 1$, on ait

$$v_n(u_n) = \inf_{x \in M} v_n(x) .$$

Exemples de suites très bien réparties.

- La suite des entiers naturels est très bien répartie, c'est évident en appliquant le corollaire 1.

- Les suites $p^i \mathbb{N}$ sont aussi très bien réparties, c'est évident en appliquant le corollaire 2.

Traduction de ces résultats en terme de polynômes P_n et Q_n et de valeur absolue.

$$P_n(X) = (X - u_0)(X - u_1) \dots (X - u_{n-1}) ,$$

$$Q_n(X) = \frac{P_n(X)}{P_n(u_n)} ,$$

ce qui nécessite que la suite u soit injective, mais il est évident que toute suite très bien répartie est injective en appliquant le corollaire 2.

COROLLAIRE 1 bis. - Soit $S_n = \{u_0, \dots, u_{n-1}\}$ satisfaisant à (ρ_n) , alors

$$\sup_{x \in \mathbb{Z}_p} |P_n(x)|_p = \left(\frac{1}{p}\right)^{\lambda_n} , \quad \text{où } \lambda_n = \sum_{k \geq 1} \left[\frac{n}{p^k} \right] .$$

C'est la traduction de la proposition 2.

COROLLAIRE 2 bis. - Soit S_n satisfaisant à (ρ_n) , alors $S_n \cup \{u_n\}$ satisfait à (ρ_{n+1}) si, et seulement si,

$$|P_n(u_n)|_p = \sup_{x \in \mathbb{Z}_p} |P_n(x)|_p .$$

C'est le corollaire 1.

COROLLAIRE 3 bis. - Pour que u soit très bien répartie dans \mathbb{Z}_p , il faut et il suffit que, pour $n \geq 0$,

$$\sup_{x \in \mathbb{Z}_p} |Q_n(x)|_p = 1 .$$

COROLLAIRE 4 bis. - Soit u une suite très bien répartie dans \mathbb{Z}_p , et soit $n < p^h$, alors

$$x \in V_h(a) \implies |Q_n(x) - Q_n(a)|_p < 1 .$$

En effet, si $|Q_n(a)|_p = 1$, alors $a \in E_n$, donc

$$v(a, n, h) = \left[\frac{n}{h} \right] = 0 ,$$

alors, pour $x \in V_h(a)$,

$$|x - a|_p \leq \frac{1}{p} |a - u_j|_p$$

$$\implies \forall j < n, \left| \frac{x - u_j}{x - a} - 1 \right|_p \leq \frac{1}{p}$$

$$\implies |Q_n(x) - Q_n(a)|_p \leq \frac{1}{p} ,$$

car $|Q_n(a)|_p = 1$ si $|Q_n(a)|_p < 1$, alors il n'existe pas $x \in V_h(a)$ tel que $|Q_n(x)|_p = 1$, car sinon $|Q_n(a)|_p = 1$. Donc $\forall x \in V_h(a)$,

$$|Q_n(x)|_p < 1 \implies |Q_n(x) - Q_n(a)|_p < 1 .$$

2. Interpolation des fonctions continues de \mathbb{Z}_p dans \mathbb{Q}_p .

DÉFINITION. - Une famille $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments d'un Banach E sur \mathbb{Q}_p est appelée une base normale de E , si elle satisfait à :

Tout $y \in E$ est de façon unique la somme d'une série $y = \sum_{i \in I} y_i e_i$, $y_i \in \mathbb{Q}_p$, et $|y_i|_p$ tend vers 0 suyvant le filtre des complémentaires des parties finies

$$|y|_p = \sup_{i \in I} |y_i|_p .$$

On notera $E_0 = \{x \in E \mid |x|_p \leq 1\}$, $\bar{E} = \frac{E_0}{pE_0}$, si $x \in E_0$; on notera \bar{x} son image dans \bar{E} .

On a alors la propriété suivante (cf. [4]) :

Une condition nécessaire et suffisante pour que $(e_i)_{i \in I}$ soit une base normale de E est que :

$$1^\circ \quad \forall i \in I, \quad e_i \in E_0 ;$$

$$2^\circ \quad (\bar{e}_i)_{i \in I} \text{ est une base algébrique du } (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\text{-espace vectoriel } \bar{E} .$$

On notera $E = C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$. Soit une suite injective u à valeurs dans \mathbb{Z}_p , et, à une fonction $f \in E$, on associe la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ des polynômes d'interpolation sur u définie par :

$$f_n(X) \in \mathbb{Q}_p[X] ,$$

$$\text{degré } f_n \leq n ,$$

$$f_n(u_j) = f(u_j) , \quad \text{pour } j = 0, \dots, n .$$

On écrit

$$f_n(X) = \sum_{k=0}^n a_k Q_k(X) \quad (\text{NEWTON}) ,$$

avec

$$a_k = \left(\sum_{j=0}^k \frac{f(u_j)}{P_{k+1}'(u_j)} \right) P_k(u_k) \quad (\text{LAGRANGE}) .$$

On dira que u est une suite d'interpolation pour les fonctions de E à valeurs entières, si :

$$1^\circ \quad \forall f \in E, \quad |f - f_n| \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty ;$$

$$2^\circ \quad |f| \leq 1 \implies |f_n| \leq 1, \quad \forall n \geq 0 .$$

THÉOREME. - Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) u est une suite d'interpolation pour les fonctions appartenant à E et à valeurs entières ;

$$(b) \quad |Q_n| = 1 \text{ pour tout } n \geq 0 ;$$

(c) u est très bien répartie dans \mathbb{Z}_p ;

(d) $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base normale de E .

(d) \implies (a) . - Soit $f = \sum_{n \geq 0} a_n Q_n$ la décomposition de f sur la base Q_n ,

et soit

$$f_n^*(X) = \sum_{k=0}^n a_k Q_k .$$

On a $Q_n(u_j) = 0$, si $j < n$; donc, pour $j \leq n$,

$$f(u_j) = \sum_{k=0}^j a_k Q_k(u_j) = f_n^*(u_j),$$

donc $f_n^* = f_n$, de plus $|a_n|_p \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ entraîne $|f - f_n|_p \rightarrow 0$, de plus $|f| = \sup_{n \geq 0} |a_n|$ entraîne $|f_n| \leq |f|$, ce qui achève la démonstration.

(a) \Rightarrow (b). - $Q_n(u_n) = 1$, donc $|Q_n| \geq 1$, et soit, pour n fixé, q la fonction caractéristique du disque de centre u_n ne contenant aucun u_j tel que $j < n$. Or q est continue, et son $(n+1)$ -ième polynôme d'interpolation est $Q_n(X)$, donc $|Q_n| \leq 1$.

(b) \Rightarrow (c). - Le corollaire 3 bis s'énonce (b) \Leftrightarrow (c).

(c) \Rightarrow (d). - On montre que $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait à la condition (Q), c'est-à-dire que $(\bar{Q}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de \bar{E} . Or \bar{E} est réunion des \bar{E}_h pour $h \geq 1$, où \bar{E}_h désigne le sous-espace de \bar{E} des fonctions à valeurs dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, constante sur toute boule V_h . On prendra u_0, \dots, u_{p^h-1} comme représentant de M_h , et $\chi_{i,h}$ sera la fonction caractéristique de $V_h(u_{i+1})$: $(\bar{\chi}_{i,h})_{i=1, \dots, p^h}$ est une base de \bar{E}_h , montrons que l'on a

$$\bar{Q}_i = \bar{\chi}_{i,h} + \sum_{j=i+1}^{p^h-1} \overline{Q_i(u_{j-1})} \bar{\chi}_{j,h}, \quad \text{pour } 0 \leq i < p^h.$$

Or le corollaire 4 bis montre que, pour $n < p^h$, \bar{Q}_n est dans \bar{E}_h , donc

$$\bar{Q}_i = \sum_{j=0}^{p^h-1} \overline{Q_i(u_{j-1})} \bar{\chi}_{j,h},$$

or, comme pour $j \leq i$, $Q_i(u_{j-1}) = 0$, on a bien l'égalité annoncée; or la matrice de \bar{Q}_i en fonction des $\bar{\chi}_{i,h}$ est triangulaire avec des 1 sur la diagonale, elle est donc inversible. Les $(Q_n)_{n \geq 0}$ forment donc une base normale de E .

COROLLAIRE 1. - Soit f une fonction définie sur une suite u très bien répartie dans \mathbb{Z}_p . Pour que f soit prolongeable en une fonction continue sur \mathbb{Z}_p , il faut et il suffit que

$$\lim_{k \rightarrow 0} |a_k|_p = 0, \quad \text{où } a_k = P_k(u_k) \left(\sum_{j=0}^k \frac{f(u_j)}{P_{k+1}(u_j)} \right).$$

COROLLAIRE 2. - Prenons comme suite la suite des entiers naturels, il vient $Q_n(x) = \binom{x}{n}$, et on retrouve le théorème de Mahler.

Application. - Pour que l'application $n \rightarrow \alpha^n$ de \mathbb{Z}_p dans Ω (clôture algébrique de \mathbb{Q}_p) soit prolongeable en une fonction continue α^x sur \mathbb{Z}_p , il faut et il suffit que

$$v(\alpha - 1) > 0 ,$$

on a alors

$$\alpha^x = \sum_{n \geq 1} (\alpha - 1)^n \binom{x}{n}$$

(α est une unité de Ω).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE (Yvette). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math. Paris, 1963).
- [2] MAHLER (K.). - An interpolation series for a continuous function of a p-adic variable, J. für reine und angew. Math., t. 199, 1958, p. 23-34.
- [3] PISOT (Charles). - Analyse p-adique et ensembles remarquables d'adèles algébriques, Cours rédigé par Simon Bloch. - Paris, Faculté des Sciences de Paris, Département de Mathématiques, 1967 (multigraphié).
- [4] SERRE (Jean-Pierre). - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques, 12, p. 69-85).