Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Mary Dolorès Schrot

Pseudo-valuations sur les corps globaux

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 8, nº 2 (1966-1967), exp. nº 14, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1966-1967__8_2_A5_0>

6 mars 1967

PSEUDO-VALUATIONS SUR LES CORPS GLOBAUX

par Mary Dolorès SCHROT

On appelle K un corps global de caractéristique 0, si K est une extension finie de Q. On appelle E un corps global de caractéristique p, si E est engendré de façon finie et de degré de transcendance 1 sur F_p, le corps fini de p éléments. Par suite, chaque corps global est une extension algébrique, séparable et finie, d'un corps L (Q ou $F_p(X)$) qui est le corps des quotients d'un domaine euclidien L_0 (Z ou $F_p[X]$), où $[L_0:pL_0] < \infty$ quel que soit l'élément p irréductible dans L_0. On peut observer également qu'un tel L est contenu dans chaque corps F pour lequel il existe une pseudo-valuation non-triviale.

Dans la présente conférence, nous considérons l'aptitude des corps globaux à la théorie exposée dans notre conférence précédente [3], et nous démontrerons que la complétion d'un corps global F par rapport à une φ quelconque s'écrit comme un ensemble de séries formelles où l'on peut distinguer nettement les éléments de F et de F_0.

THÉORÈME 1. - F <u>est un corps global si, et seulement si, les cinq conditions suivantes sont remplies</u> :

1° F <u>est le corps des quotients d'un domaine de Dedekind</u> J ;

2° <u>Quel que soit l'idéal premier</u> $P \subset J$, $[J:P] < \infty$;

3° <u>Il existe une pseudo-valuation</u> φ, <u>définie sur</u> F <u>et bornée sur</u> J ;

4° <u>Quelle que soit la pseudo-valuation</u> φ, <u>non-triviale sur</u> F, φ <u>est aussi non-triviale sur un corps infini quelconque</u> $E \subseteq F$;

5° <u>Quelle que soit la pseudo-valuation</u> φ', <u>définie sur</u> L <u>et bornée sur</u> L_0, <u>il existe une pseudo-valuation</u> φ, <u>définie sur</u> F <u>et bornée sur</u> J, <u>telle que</u> $\varphi \sim \varphi'$ <u>sur</u> L.

<u>Démonstration</u>. - Soit F un corps global. F est le corps des quotients de F_0, la clôture intégrale de L_0 dans F. F_0 est un domaine de Dedekind [4], d'où 1°. Il est bien connu que le nombre des classes d'un corps global est fini, et qu'il existe des idéaux premiers dans F_0, d'où 2° et 3°. On peut trouver $L \subseteq F$ tel que, si $E \subseteq F$, où E est un corps infini, $L \subseteq E$ [2], d'où F/E est une extension finie. Si φ est une pseudo-valuation non-triviale sur F, on prend éventuellement $\varphi_1 \sim \varphi$, où φ_1 est définie comme dans le théorème 2 de [3]. Alors,

si $\alpha \in F$ et $\varphi(\alpha) < 1$, il existe des éléments $a_i \in E$, $0 \leqslant i \leqslant n$, tels que

$$a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1} \alpha + a_n = 0 \quad .$$

Si φ est triviale sur E ,

$$1 \leqslant \varphi_1(a_n) \leqslant \max\{\varphi_1(a_i \alpha^{n-i}) \mid 0 \leqslant i < n\} \leqslant \varphi_1(\alpha) < 1 \quad ,$$

ce qui est une contradiction, d'où 4°.

Pour chaque idéal premier $P \subset F_0$, $P \cap L_0 = pL_0$, où p est un élément irréductible dans L_0 . Par contre, pour chaque tel p ,

$$pF_0 = P_1^{e_1} P_2^{e_2} \dots P_g^{e_g} \quad ,$$

où $P_i \subset F_0$ est un idéal premier, c'est-à-dire que p détermine un ensemble d'idéaux P tel que $P | pF_0$. Si φ' est définie sur L et bornée sur L_0 (théorème 1 [3]),

$$\varphi' \rightsquigarrow \{p_1 , p_2 , \dots , p_\ell\} \quad .$$

Il suffit de choisir pour chaque p_j , $1 \leqslant j \leqslant \ell$, au moins un P tel que $P | p_j F_0$, et de définir φ comme dans le théorème 2, pour obtenir 5°.

Maintenant, on suppose que F remplit les conditions 1° à 5°. La condition 3° implique qu'un corps L est contenu dans F , et qu'il existe au moins un idéal premier $P \subset J$. Supposons qu'il existe $y \in F$ tel que y n'est pas algébrique sur L . Alors, il existe une valuation non-archimédienne et non-triviale sur $L(y)$, mais triviale sur L [4]. Une telle valuation peut se prolonger à F [4], ce qui est en contradiction avec 4°. Donc F/L est algébrique.

Supposons que car $F = p$ et que F soit inséparable, c'est-à-dire que $F^p = F$. Si $\beta \in P$,

$$\beta J = P^b B \ , \qquad \text{où } P \nmid B \quad \text{et} \quad b \in Z_+ \quad .$$

Il existe k tel que $p^k > b$, et $\alpha \in F$ tel que $\alpha^{p^k} = \beta$. Alors

$$\alpha J = P^a A \quad \text{et} \quad \alpha^{p^k} J = P^{ap^k} A^{p^k} \ , \qquad \text{où } P \nmid A \quad \text{et} \quad a \in Z_+ \quad .$$

Alors

$$ap^k = b < p^k \quad ,$$

d'où $a < 1$, ce qui est une contradiction. F/L est donc toujours une extension algébrique et séparable.

Il faut que J , en tant que domaine de Dedekind, soit intégralement clos. Donc

$F_0 \subseteq J$, où F_0 est la clôture intégrale de L_0 dans F . Supposons que $\alpha \in J$, $\alpha \notin F_0$. Soit $E = L(\alpha)$. Alors

$$\alpha \in J' = J \cap E \quad ,$$

mais

$$\alpha \notin E_0 = \sum_{j=1}^{t} L_0\, \omega_j \quad ,$$

où

$$\{\omega_1 \,,\, \omega_2 \,,\, \dots \,,\, \omega_t\}$$

est une base intégrale de E/L . Il n'est pas difficile de vérifier qu'il existe $g \in L_0$ tel que

$$J' = E_{0_M} = \{\beta/m \mid \beta \in E_0 \,,\ (m \,,\, g) = 1\} \quad .$$

Soit $(p \,,\, g) = 1$, où p est un élément irréductible de L_0 . On peut maintenant trouver une pseudo-valuation φ , définie sur L et bornée sur L_0 , dont l'extension à F n'est pas bornée sur J . Donc 5° implique que $J = F_0$.

Soit p un élément irréductible quelconque de L_0 . Alors

$$pF_0 = P_1^{e_1}\, P_2^{e_2} \dots P^{e_r} \quad ,$$

et

$$[F_0 : P_j] = [L_0 : pL_0]^{f_j} \,, \qquad \text{où } f_j < \infty \,, \quad 1 \leqslant j \leqslant r \quad .$$

Soit $n = \sum_{j=1}^{r} e_j\, f_j$. Supposons que $[F:L] > n$, et soit $E \subseteq F$ un corps quelconque tel que $[E:L] = m > n$. Alors

$$pE_0 = P_1'^{\,e_1'}\, P_2'^{\,e_2'} \dots P_s'^{\,e_s'} \,, \qquad s \leqslant r \,, \quad P_j \mid P'_{i(j)}\, F_0 \quad ,$$

de sorte que $e_i' \leqslant e_j$, $f_i' \leqslant f_j$. Donc

$$n < m = \sum_{i=1}^{s} e_i'\, f_i' \leqslant \sum_{j=1}^{r} e_j\, f_j = n \quad ,$$

ce qui est une contradiction.

Donc F est une extension algébrique, séparable, et finie de L , c'est-à-dire un corps global.

Soit F un corps global, où $[F:L] = n$. On rappelle quelques faits bien connus avec des notations adéquates. Il existe $\zeta \in F_0$ tel que $F = L(\zeta)$. Soit

$$f(y) \in L_0[y]$$

le polynôme minimal de ζ , et soit $\widetilde{L}$ la complétion de L par rapport à φ_∞ , la valuation à l'infini. Alors

$$f(y) = \sum_{i=1}^{r+1} h_i(y) \quad ,$$

où

$$h_i(y) \in \widetilde{L}[y] \ , \qquad \deg h_i = s_i \ , \quad \sum_{i=1}^{r+1} s_i = n \quad ,$$

et où r est le nombre minimal de générateurs du groupe des unités de F_0 . Il existe $r+1$ valuations $\psi_1 , \psi_2 , \dots , \psi_{r+1}$ indépendantes sur F , mais égales à φ_∞ sur L . Donc, quel que soit $\xi \in F$,

$$\varphi_\infty(N_{F/L}(\xi)) = \varphi_\infty\Big(\prod_{i=1}^{r+1} \xi^{(i)s_i}\Big) = \prod_{i=1}^{r+1} \psi_i(\xi) \quad .$$

Dans le cas, car $F = 0$, $r+1 = r_1 + r_2$, où r_1 est le nombre de conjuguées réelles de ζ , r_2 le nombre de paires de conjuguées complexes, et $r_1 + 2r_2 = n$, on peut aussi écrire

$$|\xi|_i = |\xi^{(i)}| = \psi_i(\xi)^{1/s_i} \ , \qquad 1 \leqslant i \leqslant r_1 + r_2 \quad ,$$

et

$$|\xi|_i = |\xi|_{i-r_2} \ , \qquad r_1 + r_2 < i \leqslant n \quad .$$

THÉORÈME 2. - <u>Soient</u> F <u>un corps global dont</u> $[F:L] = n$, <u>et</u> $\gamma \in F_0$ <u>un élément tel que</u>

$$\psi_i(\gamma) > 1 \ , \qquad 1 \leqslant i \leqslant r+1 \quad .$$

<u>Soit</u> S <u>un système quelconque de représentants de</u> $F_0/\gamma F_0$. <u>Si</u> $\xi \in F$ <u>et</u>

$$\lim_{t\to\infty} \varphi\Big(\xi - \sum_{j=j_0}^{t} \beta_j \gamma^j\Big) = 0 \quad ,$$

<u>où</u> $\beta_j \in S$ <u>et</u> $\wp_\varphi = \wp_\gamma$, <u>alors il existe</u> v' <u>et</u> s <u>tels que</u> $v \geqslant v'$ <u>implique</u>

$$\beta_{v+s} = \beta_s \quad .$$

<u>Démonstration</u>. - Il suffit de considérer le cas où $j_0 = 0$, car on peut trouver un seul k tel que

$$\xi F_0 = (\gamma^k C)/D \ , \qquad C \not| \gamma F_0 \ , \qquad (\gamma , D) = 1 \quad ,$$

d'où

$$\xi\gamma^{-k} \in F_{0_{\mathfrak{M}}} , \qquad \xi\gamma^{-k-1} \notin F_{0_{\mathfrak{M}}} .$$

Donc

$$\xi = \xi_0 = \beta_0 + \beta_1 \gamma + \dots + \beta_{v-1} \gamma^{v-1} + \xi_v \gamma^v ,$$

et

$$\xi_v = \xi_0/\gamma^v - (\beta_0 + \beta_1 \gamma + \dots + \beta_{v-1} \gamma^{v-1})/\gamma^v .$$

<u>Cas 1</u> : car $F = 0$. Soit

$$A = \max\{ |\alpha|_i \mid \alpha \in S , \quad 1 \leqslant i \leqslant n\} .$$

Alors, lorsque $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$|\xi_v|_i \leqslant |\xi_0|_i/|\gamma|_i^v + A(1 + |\gamma|_i + \dots + |\gamma|_i^{v-1})/|\gamma|_i^v \leqslant A + |\xi_0|_i/|\gamma|_i^v .$$

Il existe donc un entier v' tel que

$$|\xi_v^{(i)}| = |\xi_v|_i \leqslant A + 1 , \qquad 1 \leqslant i \leqslant n , \quad v \geqslant v' .$$

<u>Cas 2</u> : car $F = p$. Soit

$$B = \max\{ \psi_i(\alpha) \mid \alpha \in S , \quad 1 \leqslant i \leqslant r + 1\} .$$

Il existe v' tel que

$$\psi_i(\xi_v) \leqslant B , \qquad 1 \leqslant i \leqslant r + 1 , \quad v \geqslant v' .$$

Maintenant, pour chaque v , $\xi = \xi_0$ étant donné, soit $f_v(y) \in L_0[y]$ le polynôme minimal de ξ_v , et soit

$$\mathcal{C} = \{f_v(y) \mid v \geqslant v'\} .$$

Si $a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_{n-1} y + a_n \in \mathcal{C}$, $\varphi_\infty(a_i)$ est bornée, $1 \leqslant i \leqslant n$. Donc l'ensemble $\mathcal{C}$ est fini, et il existe s tel que

$$\xi_{v'+s} = \xi_{v'} \qquad \text{et} \qquad \xi_{v+s} = \xi_v ,$$

quel que soit $v \geqslant v'$. Visiblement, $\beta_{v+s} = \beta_v$ lorsque $\xi_{v+s} = \xi_v$.

THÉORÈME 3. - <u>Soit</u> F <u>un corps global. Si</u> $\gamma \in F_0$, <u>et</u>

$$\psi_i(\gamma) > d , \qquad 1 \leqslant i \leqslant r + 1 ,$$

<u>où</u>

$$d = \begin{cases} 4 , & \text{\underline{si} car } F = 0 , \\ 1 , & \text{\underline{si} car } F = p , \end{cases}$$

<u>il existe alors un système de représentants</u> S <u>de</u> $F_0/\gamma F_0$ <u>tel que, quel que soit</u> $\xi \in F_0$, <u>il existe</u> $g \in Z_+$ <u>et</u> $\beta_j \in S$, $0 \leqslant j \leqslant g$, <u>de sorte que</u>

$$\xi = \sum_{j=0}^{g} \beta_j \gamma^j \quad .$$

<u>Démonstration</u>. - Soit S tel que, pour chaque $\alpha \in S$,

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha|_i \qquad (\sum_{i=1}^{r+1} \psi_i(\alpha))$$

soit minimal lorsque car $F = 0$ (car $F = p$) , c'est-à-dire, si $\xi \in F_0$ et $\xi \equiv \alpha \pmod{\gamma}$,

$$\sum_{i=1}^{n} |\xi|_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha|_i \quad .$$

Soient $0 \neq \xi \in F_0$, et φ une pseudo-valuation telle que $\mathcal{P}_\varphi = \mathcal{P}_\gamma$. Supposons que

$$\xi = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \gamma^j \quad ,$$

par rapport à φ où $\beta_j \in S$, et la série ne se termine pas. D'après le théorème 2, il existe v' et s tels que

$$\xi_{v+s} = \xi_v \quad ,$$

lorsque $v \geqslant v'$. On remarque que

$$\xi_{v+1} = (\xi_v - \beta_v)/\gamma \quad .$$

Si car $F = 0$, quel que soit $v \geqslant 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} |\xi_{v+1}|_i < \sum_{i=1}^{n} (|\xi_v|_i + |\beta_v|_i)/2 < \sum_{i=1}^{n} |\xi_v|_i \quad .$$

Donc, si $v \geqslant v'$,

$$\sum_{i=1}^{n} |\xi_{v+s}|_i < \sum_{i=1}^{n} |\xi_v|_i \quad ,$$

ce qui est une contradiction.

Si car $F = p$, on obtient une contradiction pareille en démontrant que

$$\sum_{i=1}^{r+1} \psi_i(\xi_{v+s}) < \sum_{i=1}^{r+1} \psi_i(\xi_v) \quad .$$

Donc il existe v'' tel que $v > v''$ implique $\beta_v = 0$ lorsque $\xi \in F_0$.

THÉORÈME 4. - <u>Soit</u> F <u>un corps global. Il existe</u> $\tau = \tau(F)$ <u>de sorte que, lorsque</u> $\gamma' \in F_0$ <u>et</u> $\varphi_\infty(N\gamma') > \tau$, <u>il existe</u> $\gamma \in F_0$ <u>tel que</u> $\gamma F_0 = \gamma' F_0$ <u>et</u>

$$\psi_i(\gamma) > d \ , \qquad 1 \leqslant i \leqslant r+1 \ .$$

<u>Démonstration</u>. - Soit $\{\varepsilon_1 , \varepsilon_2 , \dots , \varepsilon_r\}$ un ensemble de générateurs du groupe des unités. Alors $\gamma F_0 = \gamma' F_0$ si, et seulement si,

$$\gamma = \omega \varepsilon_1^{a_1} \varepsilon_2^{a_2} \dots \varepsilon_r^{a_r} \gamma' \ ,$$

où $\omega^n = 1$ et $a_i \in Z$, $1 \leqslant i \leqslant r$. En ce cas,

$$\psi_i(\gamma) > d \iff \prod_{k=1}^{r} \psi_i(\varepsilon_k^{-1})^{a_k} < \psi_i(\gamma'/d)$$

$$\iff \sum_{k=1}^{r} a_k \log \psi_i(\varepsilon_k^{-1}) < \log \psi_i(\gamma'/d)$$

$$\iff \sum_{k=1}^{r} a_k \eta_{ik} < \zeta_i \ , \qquad 1 \leqslant i \leqslant r+1 \ ,$$

où

$$\eta_{ik} = \log \psi_i(\varepsilon_k^{-1}) \qquad \text{et} \qquad \zeta_i = \log \psi_i(\gamma'/d) \ ,$$

$1 \leqslant i \leqslant r+1$, $1 \leqslant k \leqslant r$. Donc, nous nous intéressons à une solution

$$(a_1 , a_2 , \dots , a_r) \in Z^r$$

du système

$$\sum_{k=1}^{r} X_k \eta_{ik} < \zeta_i \ , \qquad 1 \leqslant i \leqslant r+1 \ .$$

On observe que

$$\sum_{i=1}^{r} \zeta_i = \log \varphi_\infty(N\gamma) - \zeta_{r+1} \ ,$$

et que, pour chaque k ,

$$\sum_{i=1}^{r} \eta_{ik} = - \eta_{r+1,k} \ ,$$

car ε_k est une unité. Alors

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} X_k \eta_{ik} = - \sum_{k=1}^{r} X_k \eta_{r+1,k} ,$$

de sorte que, lorsque

$$\sum_{k=1}^{r} X_k \eta_{ik} < \zeta_i , \qquad 1 \leqslant i \leqslant r ,$$

il s'ensuit que

$$\sum_{k=1}^{r} X_k \eta_{r+1,k} > \zeta_{r+1} - \log \varphi_\infty(N\gamma) .$$

Il s'agit de trouver un nombre réel t tel que, lorsque

$$\log \varphi_\infty(N\gamma) > t ,$$

il existe $(a_1 , a_2 , \ldots , a_r) \in Z^r$ tel que

$$\sum_{k=1}^{r} a_k \eta_{ik} < \zeta_i , \qquad 1 \leqslant i \leqslant r ,$$

et

$$\zeta_{r+1} - \log \varphi_\infty(N\gamma) < \sum_{k=1}^{r} a_k \eta_{r+1,k} < \zeta_{r+1} .$$

Si on considère les r premières inégalités, le déterminant du système est le régulateur du corps global F , qui est toujours non nul. Ce système est une translation de celui considéré dans le lemme suivant.

LEMME. - Soit

$$\sum_{k=1}^{r} X_k \eta_{ik} < 0 , \qquad 1 \leqslant i \leqslant r ,$$

un système de r inégalités à coefficients réels, avec déterminant non-nul. Alors, quand $t > 0$ est assez grand, il existe une solution du système

$$(a_1 , a_2 , \ldots , a_r) \in Z^r ,$$

telle que

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} a_k \eta_{ik} > - t .$$

Démonstration. - Les r inégalités déterminent un cône A ouvert et convexe dans $\mathbb{R}^r$. Lorsque $(X_1 , X_2 , \ldots , X_r) \in A$,

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} X_k \eta_{ik} < 0 \quad .$$

Quel que soit $t > 0$, il existe un ensemble borné A_t des points

$$(X_1 , X_2 , \ldots , X_r) \in A$$

tel que

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} X_k \eta_{ik} > - t \quad .$$

Quand t est assez grand, A contient une r-sphère de rayon 1 , donc un point de Z^r .

Si

$$t_0 = \inf\{t \mid A_t \cap Z^r \neq \emptyset\} \quad ,$$

il suffit de poser $\tau = e^{t_0}$.

On sait que, pour chaque F , il existe $h = h(F)$ tel que P^h est principal, quel que soit l'idéal premier P . Donc, $\mathcal{P}$ étant donné, on peut trouver γ_1 tel que $P | \gamma_1 F_0$ si, et seulement si, $P \in \mathcal{P}$. De plus, il existe $c \in Z_+$, et de là, $\gamma \in F_0$ tel que

$$\varphi_\infty(N\gamma) = \varphi_\infty(N\gamma_1^c) \geqslant \tau = \tau(F) \quad ,$$

où

$$\gamma F_0 = \gamma_1^c F_0 \qquad \text{et} \qquad \psi_i(\gamma) > d \ , \quad 1 \leqslant i \leqslant r + 1 \quad .$$

En prenant S d'après le théorème 3, nous obtenons notre résultat principal :

THÉORÈME 5. - <u>Soient</u> F <u>un corps global, et</u> $\mathcal{P}$ <u>un ensemble fini d'idéaux premiers dans</u> F_0 . <u>Il existe</u> $\gamma \in F_0$ <u>tel que</u> $\mathcal{P}_\gamma = \mathcal{P}$, <u>et il existe un système</u> S <u>de représentants de</u> $F_0/\gamma F_0$ <u>tel que l'ensemble</u> $\mathcal{H}$ <u>de toutes séries formelles dans</u> γ <u>à coefficients dans</u> S <u>a les propriétés suivantes</u> :

1° <u>Si</u> φ <u>est une pseudo-valuation quelconque telle que</u> $\mathcal{P}_\varphi = \mathcal{P}$, $\mathcal{H}$ <u>est la complétion de</u> F <u>par rapport à</u> φ ;

2° <u>Il existe une correspondance bijective entre les éléments de</u> F <u>et les éléments de</u> $\mathcal{H}$ <u>qui sont périodiques</u> ;

3° <u>Il existe une correspondance bijective entre les éléments de</u> F_0 <u>et les polynômes dans</u> γ <u>à coefficients dans</u> S .

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN (Emil). - Theory of algebraic numbers, Lectures held at the Mathematisches Institut Göttingen. - Göttingen, G. Striker, 1959.

[2] MAC LANE (Saunders). - Modular fields, I : Separating transcendency bases, Duke Math. J., t. 5, 1939, p. 372-393.

[3] SCHROT (Mary Dolorès). - Pseudo-valuations sur les domaines de Dedekind, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 8e année, 1966/67, n° 10, 7 p.

[4] ZARISKI (Oscar) et SAMUEL (Pierre). - Commutative algebra, t. 1. - Princeton, D. Van Nostrand, 1958 (The University Series in higher Mathematics).