Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Gilles Christol

Congruences de Ramanujan

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 8, nº 1 (1966-1967), exp. nº 9, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1966-1967__8_1_A9_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
8e année, 1966/67, n° 9
23 janvier 1967

CONGRUENCES DE RAMANUJAN

par Gilles CHRISTOL

1. Introduction.

On appelle nombre de partition, et on note $p(n)$, le nombre de façons d'exprimer n comme somme de nombres positifs non tous forcément différents.

La formule fondamentale :

$$f(x) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - x^m)} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n \quad , \tag{1}$$

que l'on vérifie facilement, est dûe à EULER.

Nous poserons, dans la suite,

$$\varphi(x) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m) = \frac{1}{f(x)} \quad . \tag{2}$$

En examinant les valeurs de $p(n)$ (calculées d'après une formule citée plus bas) pour n allant de 1 à 200 , RAMANUJAN énonce l'hypothèse suivante :

(A) Si $r = 5^{\alpha}\, 7^{\beta}\, 11^{\gamma}$, et si δ $(24\delta + 1 \equiv 0 \pmod r)$, $1 \leqslant \delta \leqslant r)$, alors

$$p(rn + \delta) \equiv 0 \pmod r \quad .$$

Sous une forme aussi générale, l'hypothèse est fausse (en particulier, pour $r = 7^3 = 343$).

Cependant, on peut démontrer [10] que :

1° (A) est vraie pour $r = 5^{\alpha}$;
Si α est pair, $n = 2$ ou 4 , on a même $p(rn + \delta) \equiv 0 \pmod{5^{\alpha+1}}$.
2° (A) est vraie pour $r = 7$ et pour $r = 7^2$;
Si $r = 7^{2\beta}$, on a seulement $p(rn + \delta) \equiv 0 \pmod{7^{\beta+1}}$,
Si $r = 7^{2\beta+1}$, $n = 2$, 4 ou 5 , $p(rn + \delta) \equiv 0 \pmod{7^{\beta+2}}$.

Comme WATSON le fait remarquer à la fin de son article, il existe des nombres tels que $p(n) \equiv 0 \pmod{5^2}$ ou $\pmod{7^{\beta}}$ qui n'entrent pas dans les catégories énumérées ci-dessus.

D'autre part, ZUCKERMANN, en plus de quelques-uns des résultats de WATSON, a démontré la formule

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} p(13n+6)x^n = 11\,\frac{\varphi(x^{13})}{\varphi(x)^2} + 36.13x\,\frac{\varphi(x^{13})^3}{\varphi(x)^4}$$

$$+ 38.13^2\,x^2\,\frac{\varphi(x^{13})^5}{\varphi(x)^6} + 20.13^3\,x^3\,\frac{\varphi(x^{13})^7}{\varphi(x)^8} + 6.13^4\,x^4\,\frac{\varphi(x^{13})^9}{\varphi(x)^{10}}$$

$$+ 13^5\,x^5\,\frac{\varphi(x^{13})^{11}}{\varphi(x)^{12}} + 13^5\,x^6\,\frac{\varphi(x^{13})^{13}}{\varphi(x)^{14}} \quad ,$$

ce qui laisse penser qu'en général $p(13n+6) \not\equiv 0 \pmod{13}$.

Comme les méthodes employées par WATSON et ZUCKERMANN sont très différentes, nous allons les examiner l'une après l'autre.

2. Méthode de ZUCKERMANN et RADEMACHER.

RAMANUJAN avait déjà annoncé que l'hypothèse (A), dans le cas $r = 5$, provenait de la relation

$$(4) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} p(5n+4)x^n = 5\,\frac{\varphi(x^5)^5}{\varphi(x)^6} \quad ,$$

et dans le cas $r = 7$, de la relation

$$(5) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} p(7n+5)x^n = 7\,\frac{\varphi(x^7)^3}{\varphi(x)^4} + 49x\,\frac{\varphi(x^7)^7}{\varphi(x)^8} \quad .$$

Ces relations ont tout-de-suite été considérées ([3] et [6]) comme des relations entre formes modulaires.

On appelle forme modulaire de degré r (r entier), une fonction, analytique dans le demi-plan $\mathrm{Im}(\tau) > 0$, vérifiant

$$(6) \qquad F(\tau') = (c\tau + d)^{-r}\,F(\tau) \quad ,$$

pour toute transformation du groupe modulaire

$$\tau' = \frac{a\tau + b\tau}{c\tau + d\tau} , \qquad \text{avec } ad - bc = 1 , \quad a , b , c , d \text{ entiers} .$$

Dans le cas où r n'est pas entier, on généralise cette notion en posant

$$(6') \qquad F(\tau') = \varepsilon(a , b , c , d)[-i(c\tau + d)^{-r}]\,F(\tau) \quad ,$$

pour les mêmes transformations, avec $\varepsilon(a , b , c , d)$ indépendant de τ , et $|\varepsilon(a , b , c , d)| = 1$; d'autre part, si $c \neq 0$, on choisit $c > 0$, ce qui permet de prendre

$$-\frac{\pi}{2} < \arg[-i(c\tau + d)] < \frac{\pi}{2} , \qquad (\mathrm{Im}(\tau) > 0) \quad ,$$

et de poser

$$[-i(c\tau + d)^{-r}] = |c\tau + d|^{-r} \exp[-ir \arg[-i(c\tau + d)]] \quad .$$

On généralise ces deux notions en considérant des fonctions qui ne vérifient plus (6) ou (6') que pour un sous-groupe du groupe modulaire : ce sont des formes modulaires "appartenant à un sous-groupe du groupe modulaire".

En particulier, la relation

$$\eta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \omega_{h,k}(-i\sqrt{c\tau + d})\ \eta(\tau) \quad ,$$

où

$$\begin{cases} \eta(\tau) = \exp i\pi\tau/12\ \varphi(\exp 2i\pi\tau) , \\ \omega_{h,k}^{24} = 1 , \end{cases}$$

établit que $\eta(\tau)$ est une forme modulaire de dimension $-\frac{1}{2}$, donc que

$$\exp((-i\pi\tau)/12)\ f(\exp 2i\pi\tau)$$

est une forme modulaire de dimension $\frac{1}{2}$. C'est en partant de cette idée que RADEMACHER, utilisant en outre la dissection de Farey et les cercles de Ford, établit [7] une formule donnant les $p(n)$ comme somme d'une série à décroissance relativement rapide, ce qui permet un calcul assez facile.

L'idée de la méthode est de construire

$$\exp 2\pi i\alpha\tau \sum_{n=0}^{\infty} p(Rn + S) \exp 2\pi in\tau \quad ,$$

dont les coefficients se calculent, d'après [9], par la formule

$$(7) \qquad p(Rn + S) = \frac{2\pi}{(24Rn + 24S - 1)^{3/4}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} A_k(Rn + S)\ I_{3/2}\left[\frac{4\pi}{k}\sqrt{\frac{1}{24}\left(Rn + S - \frac{1}{24}\right)}\right]$$

($I_{3/2}$ représente la fonction de Bessel), à l'aide de formes modulaires appartenant à un sous-groupe du groupe modulaire et de dimension $\frac{1}{2}$:

$$\frac{\eta(Q\tau)^{\rho}}{\eta(\tau)^{\rho+1}} \quad ,$$

en s'inspirant de (4) et (5).

Le calcul général des coefficients d'une telle forme a déjà été fait [8] et donne ici

(8) $$\frac{\eta(Q\tau)^{\rho}}{\eta(\tau)^{\rho+1}} = \exp 2i\pi\alpha_{\rho}\tau \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,\rho} \exp 2i\pi n\tau \quad ,$$

avec

$$\begin{cases} a_{n,\rho} = \dfrac{2\pi}{(n+\alpha_{\rho})^{3/4} Q^{3/4}} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\mu_{\rho}} b_{-\nu,\rho}(\nu-\beta_{\rho})^{3/4} \sum_{k(k,Q)=1} \frac{1}{k} A_{k,\rho}^{(\nu)}(n) \, I_{3/2}\left(\frac{4\pi}{k}\sqrt{\frac{\nu-\beta_{\rho}}{Q}(n+\alpha_{\rho})}\right) \\ \alpha_{\rho} = \dfrac{(Q-1)\rho-1}{24} - \left[\dfrac{(Q-1)\rho-1}{24}\right] \quad , \\ \beta_{\rho} = \dfrac{(Q-1)\rho+Q}{24} - \left[\dfrac{(Q-1)\rho+Q}{24}\right] \, , \\ \mu_{\rho} = \dfrac{(Q-1)\rho+Q}{24} + 1 \quad . \end{cases}$$

La méthode de ZUCKERMANN-RADEMACHER consiste à comparer directement ces deux expressions :

$$\alpha_{n,\rho} = p(Rn + S) \quad .$$

<u>Discussion de la méthode</u>. - Pour que cette comparaison soit possible, il faut que les arguments des fonctions $I_{3/2}$ soient les mêmes, ce qui donne

$$\frac{S - 1/24}{R} = \alpha_{\rho} \quad .$$

Or α_{ρ} est un entier divisé par 24 , donc

$$24S - 1 \equiv 0 \pmod{R} \quad ,$$

ce qui est bien la condition de l'hypothèse de RAMANUJAN.

D'autre part, nous devons retrouver les termes correspondants aux mêmes k :

Si Q (que l'on supposera premier) ne divise pas k , nous choisirons dans (8) le terme correspondant à ν_1 , avec

$$\begin{cases} \nu_1 \leqslant \mu_{\rho} \quad , \\ \dfrac{\nu_1 - \beta_{\rho}}{Q} = \dfrac{R}{24} \quad . \end{cases}$$

Si Q divise k , mais pas Q^2 , nous écrirons

$$\frac{4\pi}{k}\sqrt{\frac{\nu-\beta_{\rho}}{Q}(n+\alpha_{\rho})} = \frac{4\pi}{kQ}\sqrt{Q(\nu-\beta_{\rho})(n+\alpha_{\rho})} \quad ,$$

nous obtiendrons ceci en choisissant dans (8) le terme correspondant à ν_2 avec

$$\begin{cases} \nu_2 \leqslant \mu_\rho \quad , \\ Q(\nu_2 - \beta_\rho) = \frac{R}{24} \quad . \end{cases}$$

Comme β_ρ est un entier divisé par 24, Q divise R, et $24S \equiv 1 \pmod{Q}$.

Dans (7), il n'y a pas de termes où Q^2 divise k, car on démontre que $A_k(n) = 0$ si k n'est pas quadratfrei [11].

Dans tous les termes que nous prendrons, il faudra en outre que les α_ρ soient égaux. Si ρ_0 est la plus petite valeur des ρ, on aura $\alpha_\rho = \alpha_{\rho_0}$, ce qui donne

$$(Q - 1)\rho \equiv (Q - 1)\rho_0 \pmod{24} \quad ,$$

et si $g = (Q - 1 , 24)$,

$$\rho \equiv \rho_0 \pmod{\frac{24}{g}} \quad ,$$

que nous écrirons

$$\rho = \rho_0 + \rho' \frac{24}{g} \quad ,$$

ce qui donne

$$\mu_\rho = \left[\frac{(Q - 1)\rho_0 + Q}{24}\right] + (Q - 1) \frac{\rho'}{g} + 1$$

$$= \mu_{\rho_0} + \frac{(Q - 1)}{g} \rho' \quad .$$

Par suite, si ρ augmente, μ_ρ varie de quantités multiples de $\frac{Q - 1}{g}$. Les valeurs ν_1 et ν_2 étant uniques pour chaque ρ, si nous voulons que l'élimination soit possible entre les différentes valeurs de ρ, il faudra que n'intervienne à chaque fois qu'une nouvelle valeur de ν, ce qui nous impose pratiquement

$$\frac{Q - 1}{g} = 1 \quad ,$$

donc $(Q - 1 , 24) = Q - 1$, et $Q - 1$ divise 24.

La méthode ne peut marcher que lorsque $Q = 3 , 5 , 7 , 13$; il faut tout-de-suite éliminer 3, car alors $24S - 1 \equiv 0 \pmod{R}$ n'a pas de solution si 3 divise R.

Il reste ensuite à montrer que dans chacun de ces cas l'élimination est possible. Le calcul de comparaison est fait dans [8] pour les formules (4) et (5), et dans [12] pour la formule (3) et quelques autres.

La méthode est très technique et nécessite une grande connaissance des $A_{k,\rho}^{(\nu)}(n)$

et des $A_k(n)$. L'étude de ces derniers a été faite par WHITEMAN [11] et LEHMER [5]; pour les $A^{(\nu)}_{k,\rho}(n)$, on ne se sert que de

$$A^{(\nu)}_{k,\rho}(n) = A^{(\nu)}_{k,\rho_0}(n) , \qquad \text{si} \quad \rho = \rho_0 + \frac{24}{Q-1}\rho' ,$$

puis on sépare les cas de 5 , 11 , et 13 , en faisant le calcul explicite.

3. Méthode de WATSON.

L'étude des fonctions θ ([2] ou [4]) fait apparaître la fonction φ . Plus précisément, après élimination, on peut trouver la relation

$$\eta^{12}(\tau) = \frac{k^2 k'^2}{4\pi^6}(g\omega)^6 ,$$

où k et k' sont les modules, et g est le multiplicateur des fonctions θ associées à ω et ω' .

On écrit la même relation avec les nouvelles périodes $\frac{\omega}{m}$ et ω' , ce qui nous donne $\eta^{12}(m\tau)$, en fonction des nouveaux modules et du nouveau multiplicateur.

L'élimination des modules et multiplicateur se fait en utilisant les relations algébriques connues qui les relient. Elle conduit à établir l'existence d'une relation algébrique liant les deux expressions

$$\frac{\eta(m^2\tau)}{\eta(m\tau)} \qquad \text{et} \qquad \frac{\eta(m\tau)}{\eta(\tau)} .$$

Ce procédé ne donne malheureusement pas l'expression elle-même. Nous devrons donc l'établir par une autre méthode. WATSON a donné explicitement cette relation dans les cas 5 et 7 . Comme son calcul était entièrement numérique, nous allons essayer de le généraliser dans le cas d'un nombre entier p .

Nous désignerons, selon RAMANUJAN, par

$$\varphi(a , b) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (ab)^{n(n-1)/2}(a^n + b^n) , \tag{9}$$

une série double qui converge si $|ab| < 1$.

On aura, en particulier,

$$\varphi(-x^\alpha , -x^\beta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n x^{[(\alpha+\beta)/2]n^2+[(\alpha-\beta)/2]n} , \tag{10}$$

avec

$$\begin{cases} |x| < 1 \quad , \\ \alpha + \beta > 0 \quad , \end{cases}$$

et

$$(10') \qquad \varphi(-x , -x^2) = \varphi(x) \quad .$$

D'autre part, si nous posons $q = \exp \pi i\omega'/\omega$ et $Z = \exp 2i\pi z/\omega$, nous aurons, si $|q|^2 < 1$,

$$(11) \quad \begin{cases} \theta_1(z , q) = \varphi(-q^2 Z^{-1} , -Z) i Z^{-1/2} q^{1/4} \quad , \\ \theta_2(z , q) = \varphi(q^2 Z , Z^{-1}) Z^{1/2} q^{1/4} \quad , \\ \theta_3(z , q) = \varphi(qZ , qZ^{-1}) \quad , \\ \theta_4(z , q) = \varphi(-qZ , -qZ^{-1}) \quad . \end{cases}$$

Ces formules expriment les fonctions θ directement d'après leur définition. La condition $|q|^2 < 1$ exprime que $\mathrm{Im}\ \frac{\omega'}{\omega}$ est positif.

En travaillant directement sur la formule (9), on obtient facilement

$$(12) \quad \begin{cases} \varphi(a , b) = a\varphi(a^{-1} , ba^2) \quad , \\ \varphi(a , b) = \varphi(b , a) \quad . \end{cases}$$

Les formules (11) nous permettent d'écrire un lemme :

LEMME.

$$[\theta_4(3z - \omega' , q^3) - \exp 4i\pi z/\omega\ \theta_4(3z + \omega' , q^3)]\ \theta_4(z , q)$$
$$= \theta_4(\frac{\omega'}{2} , q^3)\ \theta_4(2z - \frac{\omega'}{2} , q) \quad ,$$

qui peut s'écrire

$$(13) \quad [\varphi(-Z^3 q , -Z^{-3} q^5) - Z^2 \varphi(-Z^3 q^5 , -Z^{-3} q)]\ \varphi(-Zq , -Z^{-1} q)$$
$$= \varphi(-Z^2 , -Z^{-2} q^2)\ \varphi(-q^2) \quad .$$

Pour établir ce lemme, il suffit de considérer la fonction

$$F(z) = \frac{[\theta_4(3z - \omega' , q^3) - \exp 4i\pi z/\omega\ \theta_4(3z + \omega' , q^3)]\ \theta_4(z , q)}{\theta_4(2z - \omega'/2 , q)} \quad .$$

On montre aisément que $F(z)$ a les périodes ω et ω' ; puisque $F(z)$ est entière, donc constante, il suffit alors de calculer

$$F(\frac{\omega'}{6}) = \theta_4(\frac{\omega'}{2}, q^3) \quad ,$$

ce qui démontre le lemme.

A. - Dans tout ce qui suit, nous supposerons $|x| < 1$, et p nombre premier, ou tout-au-moins $(p , 2) = (p , 3) = 1$.

Nous poserons

$$\varphi(x) = \sum_{s=0}^{p-1} \varphi_s(x) \quad \text{et} \quad \varphi_s(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x^{(3\mu^2+\mu)/2} \quad , \qquad \frac{3\mu^2 + \mu}{2} \equiv s \pmod p \quad .$$

La justification de ces formules est due à EULER qui, le premier, a démontré la relation

$$\varphi(x) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} x^{(3\mu^2+\mu)/2} \quad .$$

Nous poserons en outre

$$\lambda = \frac{p^2 - 1}{24} \qquad [24\lambda \equiv - 1 \pmod p \ , \quad p = 6h + \varepsilon \ , \ \text{avec} \quad \varepsilon^2 = 1] \quad .$$

On a

$$\frac{3\mu^2 + \mu}{2} \equiv s \pmod p \quad ,$$

en multipliant par 24 , si $(24 , p) = 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned}(6\mu + 1)^2 &\equiv 24s + 1 \pmod p \\ &\equiv 24(s - \lambda) \pmod p \\ &\equiv 4a^2 \pmod p \quad ,\end{aligned}$$

où nous avons pris $a \in (0 , 1 , \ldots , \frac{p - 1}{2})$. Nous en tirons :

$$24(s - \lambda) \equiv 4a^2 \pmod p \quad ,$$

donc, en multipliant les deux membres par λ $((\lambda , p) = 1)$

$$s \equiv \lambda(1 - 4a^2) \pmod p \quad .$$

D'autre part, on a

$$(6\mu + 1)^2 \equiv 4a^2 \pmod p \quad ,$$

$$6\mu \equiv 2\nu a - 1 \pmod p \ , \qquad \text{avec} \quad \nu^2 = 1 \quad .$$

Or on vérifie facilement que

$$6(-\varepsilon h) \equiv 1 \pmod{p} \quad .$$

Donc

$$\mu \equiv -\varepsilon h(2\nu a - 1) \pmod{p} \quad ,$$

$$\mu = -\varepsilon h(2\nu a - 1) + kp \equiv k + h \pmod{2} \quad .$$

On en déduit

$$\frac{3\mu^2 + \mu}{2} = \frac{1}{2}\,[12a^2\,h^2 - 12a\nu h^2 + 3h^2 - 2\nu\varepsilon ah + \varepsilon h] - 6\varepsilon\nu phak + p^2\,\frac{3k^2 + \varepsilon k}{2}$$

$$= \lambda - \varepsilon a^2\,h + p[a^2\,h - \nu ah - 6\varepsilon\nu ahk + p\,\frac{3k^2 + \varepsilon k}{2}] \;.$$

On vérifie aisément que $\lambda - \varepsilon a^2\,h \equiv \lambda(1 - 4a^2) \pmod{p}$; pour $a = 0$, on aura donc

$$(14) \qquad \varphi_\lambda(x) = x^\lambda \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{h+k}\, x^{p^2[(3k^2+\varepsilon k)/2]} = (-1)^h\, x^\lambda\, \varphi(x^{p^2}) \quad ;$$

pour $a \neq 0$, on aura donc (on prend εk comme nouvel indice de sommation)

$$\varphi_s(x) = (-1)^h\, x^{\lambda-\varepsilon a^2 h+p(a^2 h+ah)}\Big[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k\, x^{p(6ahk+p[(3k^2+k)/2])}$$

$$+ x^{-2pah} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k\, x^{p(-6ahk+p[(3k^2+k)/2])}\Big] \;,$$

ce que nous écrirons

$$\frac{\varphi_s(x)}{(-1)^h\, x^{\lambda-\varepsilon a^2 h+p(a^2 h+ah)}}$$

$$= \varphi(-x^{p(2p+6ah)}\;,\; -x^{p(p-6ah)}) + x^{-2pah}\, \varphi(-x^{p(2p-6ah)}\;,\; -x^{p(p+6ah)})$$

$$= \varphi(-x^{p(2p+6ah)}\;,\; -x^{p(p-6ah)}) - x^{p(p+4ah)}\, \varphi(-x^{-p(-p-6ah)}\;,\; -x^{4p+6ah}) \quad ,$$

en utilisant les formules (12).

On applique alors la formule du lemme 1, avec

$$\begin{cases} q = x^{p(p/2)} \quad , \\ Z = x^{p(p/2+2ah)} \quad , \end{cases}$$

ce qui signifie en fait que

$$\begin{cases} q^2 = x^{p^2} \quad , \\ qZ = x^{p^2+2aph} \quad , \end{cases}$$

d'où il vient

$$\varphi_s(x) = (-1)^h \, x^{\lambda-\varepsilon a^2 h + p(a^2 h + ah)} \frac{\varphi(-x^{p(p+4ah)}, -x^{-p4ah})}{\varphi(-x^{p(p+2ah)}, -x^{-p2ah})} \varphi(x^{p^2}) \quad .$$

Posons alors

(15) $$\psi_a(x) = x^{a^2/2 - pa/2} \, \varphi(-x^{p(p-a)}, -x^{pa}) \quad ,$$

on trouve alors

(16) $$\frac{\varphi_s(x)}{(-1)^h \, x^\lambda \, \varphi(x^{p^2})} = \frac{\psi_{-4ah}(x)}{\psi_{-2ah}(x)} \quad .$$

Or, des propriétés (12) de φ , on déduit immédiatement

(17) $$\psi_{-a}(x) = \psi_{p+a}(x) = -\psi_a(x) \quad .$$

On peut noter que de (9) découle $\psi_0(x) = 1$, et que, par suite, la formule (14) n'est qu'un cas particulier de (16).

Nous allons alors poser :

$$2ah \equiv \nu c \pmod p \quad ,$$

où nous avons pris $\nu^2 = 1$ de façon que $c \in (0 , \ldots , \frac{p-1}{2})$; lorsque a parcourt les nombres de 0 à $\frac{p-1}{2}$, c parcourt une fois, et une seule, tous les nombres de 0 à $\frac{p-1}{2}$.

On remarque que, si $\nu c = 2ah + kp$,

$$c \equiv k \pmod p \quad ,$$

ce qui donne, d'après les formules (17),

$$\psi_{-2ah}(x) = (-1)^k \, \psi_{-\nu c}(x) = (-1)^c \, \psi_{-\nu c}(x) = -\nu(-1)^c \, \psi_c(x) \quad .$$

De même, on aura alors

$$2\nu c = 4ah + 2kp \quad .$$

D'où

$$\psi_{-4ah}(x) = -\nu \, \psi_{2c}(x) \quad ,$$

et, par suite, on trouve

$$(18)\qquad \frac{\psi_{-4ah}(x)}{\psi_{-2ah}(x)} = (-1)^c \frac{\psi_{2c}(x)}{\psi_c(x)} = (-1)^c \frac{\psi_{p-2c}(x)}{\psi_c(x)} \quad ;$$

on choisira l'une ou l'autre forme, selon que ce sera $2c$ ou $p - 2c$ qui sera parmi les $\frac{p-1}{2}$ premiers nombres.

Des formules (16) et (18), il résulte que

$$(19)\qquad \varphi(x) = \Big[\sum_{c=0}^{(p-1)/2} (-1)^c \frac{\psi_{2c}(x)}{\psi_c(x)}\Big] (-1)^h x^\lambda \varphi(x^{p^2}) \quad ,$$

où chaque terme du second membre est de degré homogène par rapport à x modulo x^p.

On peut voir aussi que (16) et (18) conduisent à

$$\prod_{\varphi_s(x)\neq 0} \varphi_s(x) = [(-1)^h x^\lambda \varphi(x^{p^2})]^{(p+1)/2} (-1)^n , \qquad \text{avec } n = \sum_{c=0}^{(p-1)/2} c \quad .$$

Or,

$$n = \sum_{c=0}^{(p-1)/2} c = \frac{p^2-1}{8} = 3\lambda \quad ,$$

d'où

$$(19')\qquad \prod_{\varphi_s(x)\neq 0} \varphi_s(x) = (-1)^\lambda [(-1)^h x^\lambda \varphi(x^{p^2})]^{(p+1)/2} \quad .$$

B. – Nous allons maintenant considérer l'ensemble des p racines p-ièmes : ω_r , de l'unité,

$$\omega^p = 1 \quad .$$

On a alors

$$\prod_{\omega_r} (1 - \omega_r^\nu x^\nu) = \begin{cases} 1 - x^{p\nu} , & \text{si } \nu \not\equiv 0 \pmod p , \\ (1 - x^\nu)^p , & \text{si } \nu \equiv 0 \pmod p , \end{cases}$$

ce qui nous conduit à

$$\prod_{\omega_r} \varphi(\omega_r x) = \prod_{\nu\not\equiv 0 \pmod p} (1 - x^{p\nu}) \prod_{\nu'} (1 - x^{p\nu'})^p = \frac{\varphi(x^p)^{p+1}}{\varphi(x^{p^2})} \quad ,$$

et, par suite, on aura

$$(20)\qquad \frac{\varphi^{p+1}(x^p)}{x^{\lambda p} \varphi^{p+1}(x^{p^2})} = \prod_{\omega_r} \frac{\varphi(\omega_r x)}{\omega_r^\lambda x^\lambda \varphi(x^{p^2})} \quad .$$

Or, d'après (19), on a

$$\frac{\varphi(\omega_r\, x)}{\omega_r^{\lambda}\, x^{\lambda}\, \varphi(x^{p^2})} = (-\,1)^h \sum_{c=0}^{(p-1)/2} (-\,1)^c \frac{\psi_{2c}(x\omega_r)}{\psi_c(x\omega_r)} \quad , \tag{21}$$

d'où, d'après (15),

$$\frac{\varphi(\omega_r\, x)}{\omega_r^{\lambda}\, x^{\lambda}\, \varphi(x^{p^2})} = (-\,1)^h \sum_{c=0}^{(p-1)/2} (-\,1)^c\, \omega_r^{c^2/2-pc/2} \frac{\psi_{2c}(x)}{\psi_c(x)}$$

$$= (-\,1)^h \Big[\sum_{c \text{ pair}} \omega_r^{3c^2/2} \frac{\psi_{2c}(x)}{\psi_c(x)} - \sum_{c \text{ impair}} \omega_r^{(3c^2-pc)/2} \frac{\psi_{2c}(x)}{\psi_c(x)} \Big] \ .$$

A partir d'ici, il faudrait une meilleure connaissance des ψ pour continuer le calcul dans le cas général.

Posons alors

$$x = \exp i\pi\tau/12 \qquad \text{ou} \qquad \eta(\tau) = h(x) = x\, \varphi(x^{24}) \quad ,$$

nous aurons

$$Y = \frac{\eta(p^2\, \tau)}{\eta(p\tau)} = \frac{h(x^{p^2})}{h(x^p)} \qquad \text{et} \qquad X = \frac{\eta(p\tau)}{\eta(\tau)} = \frac{h(x^p)}{h(x)} \quad ,$$

qui donnent immédiatement

$$Y^{p+1}(x) = \frac{x^{\lambda}\, \varphi^{p+1}(x^{p^2})}{\varphi^{p+1}(x^p)} \qquad \text{et} \qquad X(x)\; Y(x) = \frac{x^{\lambda}\, \varphi(x^{p^2})}{\varphi(x)} \quad .$$

Dans les deux cas 5 et 7, WATSON élimine alors les termes $\frac{\psi_{2c}}{\psi_c}$ entre les expressions (20) et (21) d'une part, et (19) d'autre part, ce qui donne $\frac{1}{Y^{p+1}}$ en fonction de $\frac{1}{XY}$. Cette partie du calcul (qui fait appel aux fonctions symétriques des $\frac{\psi_{2c}}{\psi_c}$) se généralise mal. Elle permet de trouver la relation algébrique liant X et Y. Dans les cas 5 et 7, celle-ci est de degré p.

Il définit alors l'opérateur Ω_p sur l'ensemble des fonctions holomorphes dans le cercle unité (sauf peut-être à l'origine) par

$$\Omega_p \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{pn}\, x^{pn} \quad .$$

On vérifie alors que

(22) $$p\,\Omega_p\,F(x) = \sum_{\omega_r} F(\omega_r\,x) \quad .$$

D'autre part, on a

(23) $$\Omega_p \frac{1}{h(x)} = \Omega_p \frac{f(x^{24})}{x} = \Omega_p \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\; x^{24n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} - p(pn + \delta)\; x^{24pn+24\delta-1} \quad ,$$

puisque

$$24n - 1 \equiv 0 \pmod{p} \qquad \text{entraîne} \qquad n \equiv \delta \pmod{p} \quad .$$

Or on a, d'après (22),

(24) $$\Omega_p \frac{h^{n-1}(x^p)}{h^n(x)} = \frac{1}{p} \sum_{\omega_r} \frac{h(x^p)^{n-1}}{h(\omega_r\;x)^n} = \frac{1}{ph(x^p)} \sum_{\omega_r} \left[\frac{h(x^p)}{h(\omega_r\;x)}\right]^n$$

$$= \frac{1}{ph(x^p)} \sum_{\omega_r} X^n(\omega_r\;x) \quad .$$

Mais si (comme c'est le cas pour $p = 5$ et $p = 7$) l'équation algébrique qui relie X et Y est de degré p en X , ses p racines en X pour un $Y(x)$ donné sont justement $X(\omega_r\;x)$ (puisque $Y(x) = X(x^p)$).

Leur somme se calcule donc en fonction des puissances de Y à l'aide de (23) et (24), on aura donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(pn + \delta)\; x^{24pn+24\delta-1} \quad \text{en fonction des puissances de } Y \quad ,$$

ce qui est bien le résultat cherché.

Pour 5 , par exemple, la relation s'écrit

$$X^5 - 25X^4\,Y^5 + \dots = 0 \quad ,$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(5n + 4)\; x^{120n+95} = \frac{1}{5h(x^5)}\; 25Y^5 \qquad [(23) \text{ et } (24)]$$

$$= 5\,\frac{h^5(x^{25})}{h^6(x^5)} = 5x^{95}\,\frac{\varphi^5(x^{600})}{\varphi^6(x^{120})} \quad ,$$

qui est bien le résultat de la formule (4), avec x^{120} au lieu de x .

Pour aller plus loin (calcul des $\sum_{n=0}^{\infty} p(p^2\,n + \delta)x^n$), il suffit de réappliquer

Ω_p au résultat trouvé. Mais les calculs, en particulier des sommes des puissances n-ièmes des racines de l'équation, sont longs ; on trouve, pour 5 et 7 , les résultats annoncés plus haut (introduction).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ABDIK (A.). - Problème de partitions, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 2e année, 1960/61, n° 13, 8 p.

[2] BRIOT (C.) et BOUQUET (J.-C.). - Théorie des fonctions elliptiques. 2e édition. Paris, Gauthier-Villars, 1875.

[3] DARLING (H. B. C.). - Proofs of certain identities and congruences enunciated by S. Ramanujan, Proc. London math. Soc., Series 2, t. 19, 1921, p. 350-372.

[4] ENNEPER (A.). - Elliptische Funktionen. 2te Auflage. - Halle-am-Saale, L. Nepert, 1890.

[5] LEHMER (D. H.). - On the series for the partition function, Trans. Amer. math. Soc., t. 43, 1938, p. 271-295.

[6] MORDELL (L. J.). - Note on certain modular relations considered by MM. Ramanujan, Darling and Rogers, Proc. London math. Soc., Series 2, t. 20, 1922, p. 408-416.

[7] RADEMACHER (H.). - A convergent series for the partition function p(n) , Proc. Nat. Acad. Sc., t. 23, 1937, p. 78-84.

[8] RADEMACHER (H.) and ZUCKERMANN (H. S.). - A new proof of two of Ramanujan's identities, Annals of Math., Series 2, t. 40, 1939, p. 473-489.

[9] RADEMACHER (H.) and ZUCKERMANN (H. S.). - On the Fourier coefficients of certain modular forms of positive dimension, Annals of Math., Series 2, t. 39, 1938, p. 433-462.

[10] WATSON (G. N.). - Ramanujans Vermutung über Zerfallungsanzahlen, J. für reine und angew. Mathematik (Journal de Crelle), t. 179, 1938, p. 97-128.

[11] WHITEMAN (A. L.). - A sum connected with the series for the partition function, Pacific J. of Math., t. 6, 1956, p. 159-176.

[12] ZUCKERMANN (H. S.). - Identities analogous to Ramanujan's identities involving the partition function, Duke math. J., t. 5, 1939, p. 88-110.

[13] ZUCKERMANN (H. S.). - On the coefficients of certain modular forms belonging to subgroups of the modular group, Trans. Amer. math. Soc., t. 45, 1939, p. 298-321.