

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MICHEL MENDÈS FRANCE

**La fonction « somme des chiffres » et autres fonctions analogues.  
Une caractérisation des nombres de Pisot**

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 8, n° 1 (1966-1967),  
exp. n° 8, p. 1-10

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1966-1967\\_\\_8\\_1\\_A8\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1966-1967__8_1_A8_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

LA FONCTION "SOMME DES CHIFFRES" ET AUTRES FONCTIONS ANALOGUES  
 UNE CARACTÉRISATION DES NOMBRES DE PISOT

par Michel MENDES FRANCE

1. Introduction.

Lors de sa visite à Paris en octobre 1966, GEL'FOND a établi les résultats suivants [2] :

Soit  $g \geq 2$  un nombre entier. A chaque entier positif  $n$ , on fait correspondre la somme des chiffres de  $n$  écrit dans le système à base  $g$ . Ceci définit une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  que nous notons  $f$ . En symboles, si

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n) g^k \quad (\text{somme finie}) ,$$

où  $e_k(n)$  prend ses valeurs parmi les chiffres  $0, 1, \dots, g-1$ , alors

$$f(n) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n) .$$

THÉOREME A. - Soient  $p$  un nombre premier avec  $g-1$ , et  $a, l$  et  $m > 0$  des entiers fixés. Lorsque  $x$  croît indéfiniment, l'estimation suivante a lieu :

$$\text{card}\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \equiv a \pmod{p} ; n \equiv l \pmod{m} ; n \leq x\} = \frac{x}{mp} + O(x^\lambda) ,$$

où  $\lambda \in ]0, 1[$ .

Soit  $\mu \geq 2$  un entier donné. Notons par  $\mathbb{N}_\mu$  l'ensemble des entiers positifs qui ne contiennent aucun facteur qui soit une puissance  $\mu$ -ième. Par exemple,  $\mathbb{N}_2$  est connu sous le nom de l'ensemble des nombres "quadratifrei".

THÉOREME B. - Soient  $\mu \geq 2$  et  $a$  deux entiers ; soit  $p$  un nombre entier premier avec  $g-1$ . Alors,

$$\text{card}\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \equiv a \pmod{p} ; n \in \mathbb{N}_\mu ; n \leq x\} = \frac{x}{p\zeta(\mu)} + O(x^{\lambda_1}) ,$$

où  $\zeta$  est la fonction de Riemann et  $\lambda_1 \in ]0, 1[$ .

GEL'FOND démontre ces deux théorèmes en s'appuyant sur la notion de fonctions g-additives (voir paragraphe 6). Dans cet exposé, nous nous contenterons d'établir ses résultats, dans le cas où  $p$  est un diviseur premier de  $g$ , par une technique de fonctions pseudo-aléatoires. Nos résultats sont valables pour une classe de fonctions  $g$ -additives qui contient la fonction  $f$  "somme des chiffres". Au paragraphe 5, une caractérisation des nombres de Pisot est donnée en termes de répartition modulo 1.

## 2. Résultats obtenus.

Soit  $n$  un nombre entier positif ou nul, et soit

$$\sum_{k=0}^{\infty} e_k(n) g^k$$

sa représentation dans le système à base  $g$  ( $e_k$  est une application définie sur  $\mathbb{N}$  et à valeurs sur  $\{0, 1, \dots, g-1\}$ ). Soit  $c = (c_0, c_1, \dots, c_m, \dots)$  une suite infinie d'entiers. On définit la fonction  $f_c^g$  par

$$f_c^g(n) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n) c_k .$$

Si en particulier  $c_0 = c_1 = \dots = c_m = \dots = 1$ , alors  $f_c^g = f$ .

Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux nombres réels, on note par  $[\alpha\mathbb{N} + \beta]$  l'ensemble des entiers de la forme  $[\alpha n + \beta]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Nous démontrons ici les deux théorèmes suivants :

THÉOREME 1. - Soient  $p$  un nombre premier, et  $c = (c_0, c_1, \dots) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  une suite d'entiers qui contient une infinité de termes non divisibles par  $p$ . Soient  $a$  un entier, et d'autre part,  $\alpha \geq 1$  et  $\beta$  deux nombres réels donnés. Si  $g$  est un multiple de  $p$ , alors :

$$\text{card}\{n \in [\alpha\mathbb{N} + \beta] \mid f_c^g(n) \equiv a \pmod{p}; n \leq x\} = \frac{x}{p\alpha} + o(x) .$$

THÉOREME 2. - Soient  $p$  un nombre premier,  $\mu \geq 2$ , et  $a$  trois entiers. Si la suite  $c \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  contient une infinité de termes non divisibles par  $p$  et si  $g$  est multiple de  $p$ , alors

$$\text{card}\{n \in \mathbb{N}_{\mu} \mid f_c^g(n) \equiv a \pmod{p}; n \leq x\} = \frac{x}{p\zeta(\mu)} + o(x) .$$

3. Démonstration du théorème 1.

On se sert de quatre lemmes.

LEMME 1. - Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \{\exp \frac{2i\pi}{p} k\}_{k=0,1,\dots,p-1}$  une fonction telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} f^k(q) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p-1) .$$

Soit  $a$  un entier. Alors,

$$\text{card}\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = \exp \frac{2i\pi}{p} a ; n \leq x\} = \frac{x}{p} + o(x) .$$

En effet, posons  $E_x(f, a) = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = \exp \frac{2i\pi}{p} a ; n \leq x\}$ . Dire que  $f^k$  est de moyenne nulle, s'écrit sous la forme

$$\sum_{a=0}^{p-1} \sum_{q \in E_n(f^k, a)} \exp \frac{2i\pi}{p} a = o(n) ,$$

soit encore

$$\sum_{a=0}^{p-1} \exp(\frac{2i\pi}{p} a) \text{card } E_n(f^k, a) = o(n) .$$

Comme  $p$  est un nombre premier et  $k \not\equiv 0 \pmod{p}$ ,  $k$  admet un inverse dans le groupe multiplicatif  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{0\}$ . On peut donc écrire

$$E_n(f^k, a) = E_n(f, ak^{-1}) .$$

En posant  $b = ak^{-1}$ , on a donc

$$\sum_{b=0}^{p-1} \exp(\frac{2i\pi}{p} bk) \text{card } E_n(f, b) = o(n) \quad (k = 1, 2, \dots, p-1) .$$

Ces  $(p-1)$  équations, dans lesquelles  $\text{card } E_n(f, b)$  ( $b = 0, 1, 2, \dots, p-1$ ), sont les inconnues, associées à

$$\sum_{b=0}^{p-1} \text{card } E_n(f, b) = n ,$$

constituent  $p$  équations à  $p$  inconnues. La résolution du système conduit à

$$\text{card } E_n(f, b) = \frac{n}{p} + o(n) .$$

LEMME 2. - Soient  $p$  un nombre premier, et  $f : \mathbb{N} \rightarrow \{\exp \frac{2i\pi}{p} k\}_{k=0,1,\dots,p-1}$  une fonction pseudo-aléatoire. Si  $a$  est un entier, et  $\alpha \geq 1$  et  $\beta$  deux nombres réels donnés, on a

$$\text{card}\{n \in [\alpha N + \beta] \mid f(n) = \exp \frac{2i\pi}{p} a ; n \leq x\} = \frac{x}{p\alpha} + o(x) .$$

En effet, posons  $f_{\alpha,\beta}(q) = f([\alpha q + \beta])$ . On considère le nombre

$$T(x) = \text{card}\{q \in \mathbb{N} \mid f_{\alpha,\beta}(q) = \exp \frac{2i\pi}{p} a ; q \leq \frac{x}{\alpha}\} .$$

Grâce au lemme 3 qui suit, on voit que  $f_{\alpha,\beta}$  est de moyenne nulle. Le lemme 1 permet alors de conclure que

$$T(x) = \frac{x}{p\alpha} + o(x) .$$

LEMME 3. - Soit  $f$  une fonction pseudo-aléatoire. Si  $\alpha \geq 1$  et  $\beta$  sont des nombres réels, alors la fonction  $f_{\alpha,\beta}$ , définie par  $f_{\alpha,\beta}(q) = f([\beta + q\alpha])$ , est de moyenne nulle.

Démonstration. - Si  $f$  est une fonction pseudo-aléatoire et si  $\theta$  est une fonction presque-périodique (dans  $B^2$ ), il est connu que  $f.\theta$  est de moyenne nulle [1]. Appelons  $\theta$  la fonction caractéristique de l'ensemble  $\{[\beta + q\alpha] \mid q \in \mathbb{Z}\}$ .  $\theta$  est bien presque-périodique. Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \theta(k) = 0 ,$$

ou encore

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{q \leq n \\ q \leq \frac{n}{\alpha}}} f([\beta + q\alpha]) = 0 ;$$

soit enfin

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \sum_{q=1}^s f([\beta + q\alpha]) = 0 .$$

C. Q. F. D.

LEMME 4. - Soient  $p \geq 2$  un entier, et  $g$  un multiple de  $p$ . Soit  $c \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  une suite qui contient une infinité de termes non divisibles par  $p$ . La fonction

$$\psi = \exp \frac{2i\pi}{p} f_c^g = \exp \frac{2i\pi}{p} \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k$$

est pseudo-aléatoire.

Ce résultat, long à démontrer, s'établit comme dans [3], chapitre III.

Le théorème 1 est une conséquence immédiate des lemmes 2 et 4.

Remarque. - Supposons  $g = 2$ . Si à partir d'un certain rang les termes de  $c$  sont tous pairs, alors  $\Psi = \exp i\pi f_c^2$  est une fonction périodique, et le théorème 1 n'a plus nécessairement lieu. Par exemple, si  $f_c^2 = e_0$  ( $c = (1, 0, 0, \dots)$ ), on a

$$\text{card}\{n \in \mathbb{N} \mid f_c^2(n) \equiv 0 \pmod{2}; n \equiv 1 \pmod{2}; n \leq x\} = 0$$

pour tout  $x$ .

#### 4. Démonstration du théorème 2.

On s'appuie sur le lemme suivant :

LEMME 5. - Sous les mêmes hypothèses que celles du lemme 4, on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in \mathbb{N}_{\sim \mu}}} \exp \frac{2i\pi}{p} f_c^g(n) = 0 \quad (p \geq 2 \text{ entier}) .$$

En effet, supposons  $x$  entier, et posons  $\Psi = \exp \frac{2i\pi}{p} f_c^g$ . Appelons  $M(x)$  la moyenne

$$M(x) = \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in \mathbb{N}_{\sim \mu}}} \Psi(n) .$$

Si  $\mu$  représente la fonction de Möbius, on a

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \Psi(n) \sum_{d^\mu | n} \mu(d) \\ &= \frac{1}{x} \sum_{d \leq x} \mu(d) \sum_{k \leq x/d^\mu} \Psi(d^\mu k) \\ &= \sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d^\mu} \left( \frac{1}{x/d^\mu} \sum_{k \leq x/d^\mu} \Psi(d^\mu k) \right) . \end{aligned}$$

Soit  $\epsilon > 0$  donné. Soit  $y$  un entier compris entre 1 et  $x$ . On décompose  $M(x)$  en deux sommes :

$$M_1 = \sum_{d \leq y} \quad \text{et} \quad M_2 = \sum_{y < d \leq x} .$$

$M_2$  s'évalue aisément :

$$|M_2| \leq \sum_{y \leq d \leq x} \left| \frac{\mu(d)}{d^2} \right| < \int_y^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{y} .$$

On choisit  $y = \left[ \frac{2}{\varepsilon} \right] + 1$ , de sorte que  $|M_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Par ailleurs,

$$|M_1| \leq \sum_{d \leq y} \left| \frac{\mu(d)}{d^2} \right| \left| \frac{1}{x/d^\mu} \sum_{k \leq x/d^\mu} \Psi(k \cdot d^\mu) \right| .$$

D'après le lemme 4,  $\Psi$  est pseudo-aléatoire. Tenant alors compte du lemme 3, il vient :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x/d^\mu} \sum_{k \leq x/d^\mu} \Psi(k \cdot d^\mu) = 0 .$$

Il existe donc un nombre  $x_0$  tel que, pour tout  $x > x_0$ , on ait

$$\left| \frac{1}{x/d^\mu} \sum_{k \leq x/d^\mu} \Psi(k \cdot d^\mu) \right| \leq \frac{6}{\pi^2} \frac{\varepsilon}{2} .$$

Dès lors, sitôt que  $x$  est supérieur à  $x_0$ , on a

$$|M(x)| \leq |M_1| + |M_2| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

C. Q. F. D.

En combinant le lemme 5 et le lemme 1, et en notant par  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$  les éléments de l'ensemble  $\underline{\mathbb{N}}_\mu$ , il vient

$$\text{card}\{\lambda_n \mid f_c^g(\lambda_n) \equiv a \pmod{p}; \lambda_n \leq x\} = \frac{x}{p} + o(x) \quad (p \text{ premier}) .$$

Par ailleurs, le nombre d'éléments de  $\underline{\mathbb{N}}_\mu$ , qui ne dépasse pas  $x$ , est équivalent à  $x/\zeta(\mu)$ . D'où

$$\text{card}\{n \in \underline{\mathbb{N}} \mid f_c^g(n) \equiv a \pmod{p}; n \in \underline{\mathbb{N}}_\mu; n \leq x\} = \frac{x}{p\zeta(\mu)} + o(x) .$$

Le théorème 2 est ainsi démontré.

##### 5. Appendice 1 : Une caractérisation des nombres PV .

Au paragraphe 2, on a défini les applications  $f_c$ , où  $c$  est une suite d'entiers. On peut évidemment étendre la définition au cas où  $c$  est une suite de nombres réels. En particulier, si  $\theta$  est un nombre réel, on pose  $(\theta) = (1, \theta, \theta^2, \theta^3, \dots)$ , et l'on considère la fonction  $f(\theta)$  :

$$f_{(\theta)}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n) \theta^k .$$

Ici,  $e_k(n)$  représente le  $(k+1)$ -ième chiffre de  $n$  écrit en système à base 2 .

THÉOREME 3. - Soit  $\theta > 1$  un nombre réel. Une condition nécessaire et suffisante pour que le nombre  $\theta$  soit un nombre PV est que la suite  $u_n = f_{(\theta)}(n)$  ne soit pas équirépartie modulo 1 .

Démonstration. - Soit  $T$  l'opérateur de translation sur l'ensemble  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  de sorte que

$$T(c_0, c_1, \dots, c_n, \dots) = (c_1, c_2, \dots, c_{n+1}, \dots) .$$

Soit  $e_k(n)$  le  $(k+1)$ -ième chiffre de l'entier  $n$  écrit dans le système binaire. Notons les égalités

$$(1) \quad \begin{cases} e_0(2n+a) = a, & a = 0 \text{ ou } 1 \\ e_k(2n+a) = e_{k-1}(n), & k = 1, 2, \dots, a = 0 \text{ ou } 1 . \end{cases}$$

On pose

$$\varphi_c(p) = \exp 2i\pi f_c(p) ,$$

et

$$S_c(n) = \sum_{p=0}^{n-1} \varphi_c(p) .$$

Les relations (1) entraînent les suivantes :

$$\begin{cases} f_c(2n) = f_{Tc}(n) \\ f_c(2n+1) = c_0 + f_{Tc}(n) . \end{cases}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} S_c(2n) &= \sum_{p=0}^{2n-1} \varphi_c(p) = \sum_{p=0}^{n-1} \varphi_c(2p) + \sum_{p=0}^{n-1} \varphi_c(2p+1) \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} \varphi_{Tc}(p) + \sum_{p=0}^{n-1} \varphi_{Tc}(p) \exp 2i\pi c_0 , \end{aligned}$$

soit enfin

$$S_c(2n) = (1 + \exp 2i\pi c_0) S_{Tc}(n) ,$$



et

$$S_c(2n+1) = (1 + \exp 2i\pi c_0) S_{Tc}(n) + \varphi_c(2n+1) .$$

Il s'ensuit que

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{S_c(2n)}{2n} = \exp i\pi c_0 \cos \pi c_0 \frac{S_{Tc}(n)}{n} \\ \frac{S_c(2n+1)}{2n+1} = \exp i\pi c_0 \cos \pi c_0 \frac{S_{Tc}(n)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) , \end{cases}$$

formules qui montrent que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{S_c(2n)}{2n} \right| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{S_c(2n+1)}{2n+1} \right| .$$

Appelons  $M(c) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{S_c(n)}{n} \right|$  la valeur commune. On a alors

$$M(c) = |\cos \pi c_0| M(Tc) ,$$

et plus généralement, pour  $v \in \mathbb{N}$ ,

$$(3) \quad M(c) = \left| \prod_{k=0}^v \cos \pi c_k \right| M(T^{v+1} c) .$$

De cette formule découle le théorème 3.

En effet, soit  $q \geq 1$  un entier. Posons  $q\theta^k = c_k$ , où  $\theta > 1$  n'est pas un nombre de Pisot-Vijayaraghavan. En remarquant que  $M(T^{v+1} c) \leq 1$ , on voit que

$$M(c) \leq \left| \prod_{k=0}^v \cos \pi q\theta^k \right| , \quad \forall v \in \mathbb{N} .$$

Le produit infini  $\left| \prod_{k=0}^{\infty} \cos \pi q\theta^k \right|$  étant divergent [4], on voit que  $M(c) = 0$ . Le critère de Weyl montre alors que la suite  $u_n = f_{(\theta)}(n)$  est équirépartie (mod 1).

Réciproquement, supposons que  $\theta$  est un nombre de Pisot-Vijayaraghavan. D'après la formule (3), on a

$$M(c) = \left| \prod_{k=0}^{v-1} \cos \pi \theta^k \right| M(T^v c) \quad (q = 1) .$$

Nous allons voir que, pour  $v$  suffisamment grand,  $M(T^v c)$  est non nul, donc  $M(c) \neq 0$ . En effet,

$$M(\tau^\nu c) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \exp(2i\pi \sum_{k=0}^{\infty} e_k(p) \theta^{k+\nu}) \right| .$$

Comme  $\theta$  est un nombre PV, il existe  $\tau \in ]0, 1[$  tel que, pour tout entier  $k > 0$ , on ait

$$|\theta^k| < \tau^k \pmod{1} .$$

Ainsi,

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} e_k(p) \theta^{k+\nu} \right| < \tau^\nu + \tau^{\nu+1} + \dots = \frac{\tau^\nu}{1-\tau} \pmod{1} .$$

On choisit  $\nu$  suffisamment grand pour que  $\tau^\nu / 1 - \tau$  ne dépasse pas  $\frac{1}{4}$ . Alors,  $M(\tau^\nu c)$  ne peut être nul.  $f_{(\theta)}(n)$  est alors une suite non équirépartie modulo 1.

Remarque. - La démonstration précédente permet d'établir que, pour tout  $\theta$ , on a

$$M(c) = \left| \prod_{k=0}^{\infty} \cos \pi q \theta^k \right| , \quad q \in \underline{\mathbb{Z}} .$$

## 6. Appendice 2 : Les fonctions g-additives.

Dans ce paragraphe,  $g$  représente à nouveau un nombre entier supérieur ou égal à 2.

On dit qu'une fonction  $f : \underline{\mathbb{N}} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$  est g-additive si, chaque fois que l'entier  $n$  s'écrit sous la forme

$$n = n_1 + n_2 \quad (n_1 \in \underline{\mathbb{N}}, n_2 \in \underline{\mathbb{N}}) ,$$

où  $n_1 < g^\mu$  et  $n_2 = g^\mu n_3$  ( $\mu = \mu(n)$  et  $n_3$  sont des entiers positifs), on a

$$f(n) = f(n_1) + f(n_2) .$$

Par exemple, la fonction  $f(n) = n$  est g-additive. Plus généralement, les fonctions  $f_c^g$  ( $c \in \underline{\mathbb{R}}^{\underline{\mathbb{N}}}$ ), étudiées précédemment, sont g-additives. On peut établir le résultat suivant :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application  $f$  soit g-additive est qu'elle s'écrive sous la forme

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \circ e_k ,$$

où  $\{\varphi_k \mid k \in \underline{\mathbb{N}}\}$  est une famille d'applications de  $\underline{\mathbb{N}}$  dans  $\underline{\mathbb{R}}$  (dépendant évidemment de  $f$ ).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERTRANDIAS (Jean-Paul). - Suites pseudo-aléatoires et critères d'équirépartition modulo 1 , Compos. Math., Groningen, t. 16, 1964, p. 23-28.
  - [2] GEL'FOND (A. O.). - Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données, Acta Arithm., Warszawa, t. 13, 1968, p. 259-265.
  - [3] MENDÈS FRANCE (Michel). - Nombres normaux. Applications aux fonctions pseudo-aléatoires, J. Anal. math., Jérusalem, t. 20, 1967, p. 1-56 (Thèse Sc. math. Paris, 1966).
  - [4] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. Scuola norm. sup. di Pisa, Serie 2, t. 7, 1938, p. 205-248 (Thèse Sc. math. Paris, 1938).
-