Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

JEAN CHAUVINEAU

# Théorème de Koksma pour les parties entières dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{Q}_p$

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 8, n° 1 (1966-1967), exp. n° 7, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1966-1967__8_1_A7_0>

Séminaire Delange-Pisot-Poitou
(Théorie des Nombres)
8e année, 1966/67, n° 7



9 janvier 1967

# THÉORÈME DE KOKSMA POUR LES PARTIES ENTIÈRES DANS $\mathbb{R}$ ET DANS $\mathbb{Q}_p$

par Jean CHAUVINEAU

$\mathbb{N}$ , $\mathbb{Z}$ , $\mathbb{Q}$ , $\mathbb{R}$ , $\mathbb{Z}_p$ , $\mathbb{Q}_p$ désignent les structures algébriques couramment représentées par ces lettres ( $0 \notin \mathbb{N}$ , $p$ premier) ; le groupe des unités de $\mathbb{Q}_p$ est noté $\mathbb{U}_p$ . Si $x \in \mathbb{Q}_p$ , on désigne par $|x|_p$ la valeur absolue $p$-adique de $x$ , et on pose

$$v(x) = - \log_p |x|_p \qquad \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}_p^* \ , \quad v(0) = + \infty \ .$$

On se propose de montrer que le théorème métrique de Koksma concernant l'équirépartition (mod 1) s'étend aux suites des parties entières qui vont être définies, d'abord dans $\mathbb{R}$ , puis dans $\mathbb{Q}_p$ .

## 1. Notations et définitions utilisées dans $\mathbb{R}$ .

On désigne par $\underset{\sim}{r}$ un système de représentants du groupe quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ des réels modulo 1 ; notamment, $\underset{\sim}{r}$ pourra être l'intervalle $\underset{\sim}{r}_0 = [0 , 1[$ .

Tout $x \in \mathbb{R}$ admet une décomposition unique

$$x = [x]_{\underset{\sim}{r}} + \langle x \rangle_{\underset{\sim}{r}} \qquad \text{où} \quad [x]_{\underset{\sim}{r}} \in \mathbb{Z} \ , \quad \langle x \rangle_{\underset{\sim}{r}} \in \underset{\sim}{r}$$

$[x]_{\underset{\sim}{r}}$ s'appellera <u>partie entière de</u> $x$ <u>relative</u> à $\underset{\sim}{r}$ .

On pose en particulier

$$[x]_{\underset{\sim}{r}_0} = [x] \qquad \text{et} \qquad \langle x \rangle_{\underset{\sim}{r}_0} = \langle x \rangle \ ,$$

de sorte que

$$\langle x \rangle_{\underset{\sim}{r}} \equiv \langle x \rangle \pmod 1$$

$[x]$ et $\langle x \rangle$ sont dits respectivement <u>partie entière</u> et <u>partie fractionnaire</u> de $x$ .

Enfin, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$e(x) = e^{2i\pi x}$$

d'où résultent, sur $\mathbb{R}$ , les inégalités

$$|e(x) - 1| \leqslant 2\pi \min(\langle x \rangle , 1 - \langle x \rangle) \leqslant 2\pi |x| \ .$$

Notre étude dans $\mathbb{R}$ utilise deux définitions dues à I. NIVEN [4]. Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Z}$. Si $N \in \mathbb{N}$, $k$ entier $\geqslant 2$ et $h = 0 , 1 , \ldots , k - 1$, on désigne par $(N , h , k)_x$ le nombre des $n$ tels qu'on ait $1 \leqslant n \leqslant N$ et

$$x_n \equiv h \pmod{k} .$$

(a) La suite $(x_n)$ de $\mathbb{Z}$ est dite <u>équirépartie</u> [e. r.] (mod k) <u>dans $\mathbb{Z}$</u> si, et seulement si, pour tout $h = 0 , 1 , \ldots , k - 1$, on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{(N , h , k)_x}{N} = \frac{1}{k} .$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'on ait, pour tout $h = 1 , \ldots , k - 1$ :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant n\leqslant N} e\left(\frac{hx_n}{k}\right) = 0 .$$

(b) La suite $(x_n)$ de $\mathbb{Z}$ est dite <u>équirépartie</u> [e. r.] <u>dans $\mathbb{Z}$</u> si, et seulement si, elle est e. r. (mod k) dans $\mathbb{Z}$ pour tout entier $k \geqslant 2$.

## 2. Théorème de Koksma dans $\mathbb{R}$.

2.1 Désignons par $\mathfrak{A}$ l'algèbre de Boole des réunions finies d'intervalles quelconques (éventuellement ponctuels) de $\mathbb{R}$. Soient $E \in \mathfrak{A}$, $F \in \mathfrak{A}$, et soit $\omega$ un réel $> 0$ ; on dira que $E$ et $F$ sont congrus (mod $\omega$), et on écrira $E \equiv F \pmod{\omega}$, si et seulement s'il existe une partition finie de $E$ en intervalles quelconques $I_h$, une partition finie de $F$ en intervalles quelconques $J_h$, et une suite finie d'entiers rationnels $a_h$, où $h = 1 , \ldots , H$, telles qu'on ait

$$I_h = J_h + a_h\, \omega \qquad \text{pour tout } h = 1 , \ldots , H .$$

Dans ces conditions, les ensembles $E$ et $F$, qui sont évidemment mesurables au sens de Riemann [mesurables-$\mathcal{R}$ ], ont des mesures-$\mathcal{R}$ égales.

LEMME 1. - <u>Soit $\mathbf{r}$ un système de représentants de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tel que $\mathbf{r} \in \mathfrak{A}$ ; pour que la suite $(x_n)$ de $\mathbb{R}$ soit</u> e. r. (mod 1) <u>dans $\mathbb{R}$, il faut et il suffit que, pour tout entier</u> $k \geqslant 2$, <u>la suite</u> $([kx_n]_{\mathbf{r}})$ <u>soit</u> e. r. (mod k) <u>dans $\mathbb{Z}$</u>.

Notons d'abord qu'on a $\mathbf{r} \equiv [0 , 1[ \pmod{1}$, et $\mathbf{r}$ est de mesure 1.

<u>Nécessité</u>. - Supposons que la suite $(x_n)$ soit e. r. (mod 1) dans $\mathbf{R}$ ; pour cela, il faut et il suffit que la suite $(\langle x_n \rangle_{\mathbf{r}})$ soit e. r. dans $\mathbf{r}$ , donc encore que la suite $(k\langle x_n \rangle_{\mathbf{r}})$ soit e. r. dans $k\mathbf{r}$ .

La partition $\mathcal{P}$ de $\mathbf{R}$ en $k$ ensembles $\mathbf{r} + k\mathbf{Z} + \ell$ , où $\ell = 0 , 1 , \ldots , k-1$, fournit une partition de $k\mathbf{r}$ en $k$ ensembles $A(\ell) \in \mathcal{A}$ respectivement congrus (mod k) à $\mathbf{r} + \ell$ . Fixons $\ell$ , et considérons les $k\langle x_n \rangle_{\mathbf{r}}$ qui sont répartis dans $A(\ell)$ , de mesure $1$ ; puisque $A(\ell) \equiv \mathbf{r} + \ell$ (mod k) , les $[k\langle x_n \rangle_{\mathbf{r}}]_{\mathbf{r}}$ correspondants sont tous congrus à $\ell$ (mod k) . Dès lors, l'équirépartition des $k\langle x_n \rangle_{\mathbf{r}}$ dans $k\mathbf{r}$ , de mesure $k$ , entraîne l'équirépartition (mod k) des $[k\langle x_n \rangle_{\mathbf{r}}]_{\mathbf{r}}$ dans $\mathbf{Z}$ .

Mais on a

$$[k\langle x_n \rangle_{\mathbf{r}}]_{\mathbf{r}} = [kx_n - k[x_n]_{\mathbf{r}}]_{\mathbf{r}} = [kx_n]_{\mathbf{r}} - k[x_n]_{\mathbf{r}} \equiv [kx_n]_{\mathbf{r}} \pmod{k} .$$

Donc enfin, la suite $([kx_n]_{\mathbf{r}})$ est e. r. (mod k) dans $\mathbf{Z}$ .

<u>Suffisance</u>. - Posant, pour $k$ entier $\geqslant 2$ et $h = 1 , \ldots , k-1$ :

$$S_N(h , k) = \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} e\left(\frac{h}{k} [kx_n]_{\mathbf{r}}\right)$$

$$S'_N(h , k) = \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} e(hx_n)\left(e\left(-\frac{h}{k} \langle kx_n \rangle_{\mathbf{r}}\right) - 1\right)$$

et, pour $h \in \mathbf{N}$ :

$$\sigma_N(h) = \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} e(hx_n)$$

on a

$$S_n(h , k) = \sigma_N(h) + S'_N(h , k)$$

d'où

$$|\sigma_N(h)| \leqslant |S_N(h , k)| + |S'_N(h , k)| \quad .$$

Puisqu'il appartient à $\mathcal{A}$ , le système de représentants $\mathbf{r}$ est borné ; posant $M = \sup_{t \in \mathbf{r}} |t|$ , on obtient

$$|S'_N(h , k)| \leqslant \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} \left|1 - e\left(\frac{h}{k} \langle kx_n \rangle_{\mathbf{r}}\right)\right| \leqslant \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{2\pi h}{k} |\langle kx_n \rangle_{\mathbf{r}}| \leqslant \frac{2\pi hM}{k}$$

de sorte que

$$|\sigma_N(h)| \leqslant |S_N(h\ ,\ k)| + \frac{2\pi hM}{k}\ .$$

Si la suite $([kx_n]_{\underset{\sim}{r}})$ est e. r. (mod k) dans $\underset{\sim}{Z}$ pour tout entier $k \geqslant 2$ , alors, pour tout $h \in \underset{\sim}{N}$ et pour tout entier $k > h$ , on a

$$\lim_{N\to\infty} S_N(h\ ,\ k) = 0\ ,$$

et la limite supérieure de $|\sigma_N(h)|$ quand $N \longrightarrow \infty$ est au plus égale à $\frac{2\pi hM}{k}$ ; cela exige, puisque, $h$ étant fixé, $k$ est arbitrairement grand, qu'on ait

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N(h) = 0 \qquad \text{pour tout } h \in \underset{\sim}{N}\ ,$$

et la suite $(x_n)$ est e. r. (mod 1) dans $\underset{\sim}{R}$ .

2.2 Ce lemme étant établi, soit $I$ un intervalle de $\underset{\sim}{R}$ et soit une suite $(f_n)$ d'applications dérivables de $I$ dans $\underset{\sim}{R}$ ; on pose $F_{m,n} = f_m - f_n$ . Introduisons les deux conditions suivantes :

(K1) Pour tout couple d'entiers naturels $(m\ ,\ n)$, où $m \neq n$ , la fonction $F'_{m,n}$ est monotone et de signe constant sur $I$ .

(K2) Il existe un réel $c > 0$ tel que, pour tout couple d'entiers naturels $(m\ ,\ n)$ , où $m \neq n$ , on ait $|F'_{m,n}(x)| \geqslant c$ pour tout $x \in I$ .

On sait [3] que, si ces conditions sont satisfaites, alors la suite $(f_n(x))$ de $\underset{\sim}{R}$ est e. r. (mod 1) pour presque tous les $x \in I$ , c'est-à-dire sauf pour ceux qui appartiennent à une partie de $I$ dont la mesure de Lebesgue [mesure-$\mathfrak{L}$ ] est nulle, et il en est de même de la suite $(\frac{f_n(x)}{k})$ , où $k$ entier $\geqslant 2$ . Dès lors, soit $\underset{\sim}{r} \in \mathfrak{A}$ ; d'après le lemme 1 (nécessité de la condition), pour tout entier $k \geqslant 2$ , la suite $([f_n(x)]_{\underset{\sim}{r}})$ est e. r. (mod k) dans $\underset{\sim}{Z}$ pour presque tous les $x \in I$ . Puisqu'une réunion dénombrable d'ensembles de mesure-$\mathfrak{L}$ nulle est elle-même de mesure-$\mathfrak{L}$ nulle, il en résulte que l'ensemble des $x \in I$ , tels que la suite $([f_n(x)]_{\underset{\sim}{r}})$ ne soit pas e. r. dans $\underset{\sim}{Z}$ , a une mesure-$\mathfrak{L}$ nulle, et le théorème de Koksma dans $\underset{\sim}{R}$ peut être complété comme suit :

THÉORÈME 1. - Soit $\underset{\sim}{r}$ un système de représentants de $\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$ tel que $\underset{\sim}{r} \in \mathfrak{A}$ , soit $I$ un intervalle de $\underset{\sim}{R}$ et soit une suite $(f_n)$ d'applications dérivables de $I$ dans $\underset{\sim}{R}$ ; si $I$ et $f_n$ vérifient les conditions (K1) et (K2), alors, pour presque tous les $x \in I$ , la suite $(f_n(x))$ est e. r. (mod 1) dans $\underset{\sim}{R}$ et la suite $([f_n(x)]_{\underset{\sim}{r}})$ est e. r. dans $\underset{\sim}{Z}$ .

3. Notations et définitions utilisées dans $\mathbb{Q}_p$ .

L'ensemble des rationnels qui, après réduction, ont pour dénominateur une puissance entière $\geqslant 0$ de $p$ sera noté $\mathbb{Q}_{(p)}$ .

On désigne par $\mathbf{r}_p$ un système de représentants du groupe quotient $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ des p-adiques modulo 1 , qui est isomorphe au groupe $\mathbb{Q}_{(p)}/\mathbb{Z}$ ; notamment, $\mathbf{r}_p$ pourra être l'ensemble $\mathbf{r}_{p,0} = [0\ ,\ 1[\ \cap \mathbb{Q}_{(p)}$ .

Tout $x \in \mathbb{Q}_p$ admet une décomposition unique

$$x = [x]_{\mathbf{r}_p} + \langle x\rangle_{\mathbf{r}_p} \qquad \text{où } [x]_{\mathbf{r}_p} \in \mathbb{Z}_p\ ,\quad \langle x\rangle_{\mathbf{r}_p} \in \mathbf{r}_p$$

$[x]_{\mathbf{r}_p}$ s'appellera partie entière de $x$ relative à $\mathbf{r}_p$ .

En particulier, posant $[x]_{\mathbf{r}_{p,0}} = [x]_p$ et $\langle x\rangle_{\mathbf{r}_{p,0}} = \langle x\rangle_p$ , de sorte que

$$\langle x\rangle_{\mathbf{r}_p} \equiv \langle x\rangle_p \pmod 1$$

on obtient la décomposition unique

$$x = [x]_p + \langle x\rangle_p \qquad \text{où } [x]_p \in \mathbb{Z}_p\ ,\quad \langle x\rangle_p \in \mathbf{r}_{p,0}$$

$[x]_p$ et $\langle x\rangle_p$ sont dits respectivement partie entière p-adique et partie principale p-adique de $x$ .

On a, pour $x_1\ , x_2\ , y \in \mathbb{Q}_p$ :

$$\langle (x_1 + x_2)y\rangle_p \equiv \langle x_1\, y\rangle_p + \langle x_2\, y\rangle_p \pmod 1$$

et $x \longmapsto \langle xy\rangle_p$ , où $y \in \mathbb{Q}_p$ , est un homomorphisme continu du groupe additif $\mathbb{Q}_p$ dans le groupe additif $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ; de plus on a :

$$(x_1 - x_2)y \in \mathbb{Z}_p \implies \langle x_1\, y\rangle_p = \langle x_2\, y\rangle_p \qquad \text{pour } x_1\ , x_2\ , y \in \mathbb{Q}_p$$

et

$$\langle xy\rangle_p = \langle x\langle y\rangle_p\rangle_p \qquad \text{pour } x \in \mathbb{Z}_p\ ,\quad y \in \mathbb{Q}_p\ .$$

Enfin on pose, pour tout $x \in \mathbb{Q}_p$ :

$$e_p(x) = e^{2i\pi\langle x\rangle_p}\ .$$

Si $x \in \mathbb{Q}_{(p)}$ , alors on a $[x] = [x]_p$ et $\langle x\rangle = \langle x\rangle_p$ , donc aussi $e(x) = e_p(x)$ .

Notre étude dans $\underset{\sim}{Q}_p$ utilise d'abord deux définitions qui sont les analogues p-adiques des définitions de I. NIVEN mentionnées au paragraphe 1.

Soit une suite $(x_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ de $\underset{\sim}{Z}_p$. Si $N \in \underset{\sim}{N}$, $\alpha \in \underset{\sim}{Z}_p$, $k \in \underset{\sim}{N}$, on distingue par $(N, \alpha, k)_x$ le nombre des $n$ tels qu'on ait $1 \leq n \leq N$ et $x_n \in \alpha + p^k \underset{\sim}{Z}_p$.

(a) La suite $(x_n)$ de $\underset{\sim}{Z}_p$ est dite <u>équirépartie d'ordre</u> $k$ [ k-e. r.] <u>dans</u> $\underset{\sim}{Z}_p$ si, et seulement si, pour tout $\alpha \in \underset{\sim}{Z}_p$, on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{(N, \alpha, k)_x}{N} = \frac{1}{p^k}.$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'on ait, pour tout $h = 1, \ldots, p^k - 1$ :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leq n\leq N} e_p\left(\frac{hx_n}{p^k}\right) = 0 .$$

(b) La suite $(x_n)$ de $\underset{\sim}{Z}_p$ est dite <u>équirépartie</u> [e. r.] dans $\underset{\sim}{Z}_p$ si, et seulement si, elle est k-e. r. dans $\underset{\sim}{Z}_p$ pour tout $k \in \underset{\sim}{N}$.

D'autre part, nous introduisons la notion d'équirépartition (mod 1) dans $\underset{\sim}{Q}_p$ : La suite $(x_n)$ de $\underset{\sim}{Q}_p$ est dite <u>équirépartie</u> [e. r.] (mod 1) dans $\underset{\sim}{Q}_p$ si, et seulement si, la suite $(\langle x_n\rangle_p)$ est e. r. dans $[0, 1)$.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit, puisque $e(h\langle x_n\rangle_p) = e_p(hx_n)$, qu'on ait, pour tout $h \in \underset{\sim}{N}$ :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leq n\leq N} e_p(hx_n) = 0 .$$

## 4. Théorème de Koksma dans $\underset{\sim}{Q}_p$.

4.1. LEMME 2. - <u>Soit</u> $\underset{\sim}{r}_p$ <u>un système de représentants de</u> $\underset{\sim}{Q}_p/\underset{\sim}{Z}_p$ <u>inclus dans un système de représentants</u> $\underset{\sim}{r}$ <u>de</u> $\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$ <u>tel que</u> $\underset{\sim}{r} \in \mathfrak{a}$ ; <u>pour que la suite</u> $(x_n)$ <u>de</u> $\underset{\sim}{Q}_p$ <u>soit e. r.</u> (mod 1) <u>dans</u> $\underset{\sim}{Q}_p$, <u>il faut et il suffit que, pour tout</u> $k \in \underset{\sim}{N}$, <u>la suite</u> $([p^k x_n]_{\underset{\sim}{r}_p})$ <u>soit</u> k-e. r. <u>dans</u> $\underset{\sim}{Z}_p$.

<u>Nécessité</u>. - Supposons que la suite $(x_n)$ soit e. r. (mod 1) dans $\underset{\sim}{Q}_p$ ; pour cela, il faut et il suffit que la suite $(\langle x_n\rangle_{\underset{\sim}{r}_p})$ soit e. r. dans $\underset{\sim}{r}$, donc encore que la suite $(p^k\langle x_n\rangle_{\underset{\sim}{r}_p})$ soit e. r. dans $p^k \underset{\sim}{r}$.

La partition $\mathcal{P}$ de $\underset{\sim}{R}$ en $p^k$ ensembles $\underset{\sim}{r} + p^k \underset{\sim}{Z} + \ell$ , où

$$\ell = 0 , 1 , \ldots , p^k - 1 ,$$

fournit une partition de $p^k \underset{\sim}{r}$ en $p^k$ ensembles $A(\ell) \in \mathfrak{a}$ respectivement congrus $(\mathrm{mod}\ p^k)$ à $\underset{\sim}{r} + \ell$ . Fixons $\ell$ , et considérons les $p^k\langle x_n\rangle_{\underset{\sim}{r}_p}$ qui sont répartis dans $A(\ell)$ , de mesure $1$ ; puisque $A(\ell) \equiv \underset{\sim}{r} + \ell \pmod{p^k}$ , les $[p^k\langle x_n\rangle_{\underset{\sim}{r}_p}]_{\underset{\sim}{r}}$ correspondants sont tous congrus à $\ell \pmod{p^k}$ . Dès lors, l'équirépartition des $p^k\langle x_n\rangle_{\underset{\sim}{r}_p}$ dans $p^k \underset{\sim}{r}$ , de mesure $p^k$ , entraîne l'équirépartition $(\mathrm{mod}\ p^k)$ des $[p^k\langle x_n\rangle_{\underset{\sim}{r}_p}]_{\underset{\sim}{r}}$ dans $\underset{\sim}{Z}$ .

Or, si $t \in \underset{\sim}{Q}_{(p)}$ , on a $[t]_{\underset{\sim}{r}} = [t]_{\underset{\sim}{r}_p}$ ; donc ici

$$[p^k\langle x_n\rangle_{\underset{\sim}{r}_p}]_{\underset{\sim}{r}} = [p^k\langle x_n\rangle_{\underset{\sim}{r}_p}]_{\underset{\sim}{r}_p}$$

de sorte que l'équirépartition $(\mathrm{mod}\ p^k)$ des $[p^k\langle x_n\rangle_{\underset{\sim}{r}_p}]_{\underset{\sim}{r}}$ dans $\underset{\sim}{Z}$ équivaut à l'équirépartition d'ordre $k$ des $[p^k\langle x_n\rangle_{\underset{\sim}{r}_p}]_{\underset{\sim}{r}_p}$ dans $\underset{\sim}{Z}_p$ .

Mais on a :

$$[p^k\langle x_n\rangle_{\underset{\sim}{r}_p}]_{\underset{\sim}{r}_p} = [p^k x_n - p^k[x_n]_{\underset{\sim}{r}_p}]_{\underset{\sim}{r}_p} = [p^k x_n]_{\underset{\sim}{r}_p} - p^k[x_n]_{\underset{\sim}{r}_p} \in [p^k x_n]_{\underset{\sim}{r}_p} + p^k \underset{\sim}{Z}_p .$$

Donc enfin, la suite $([p^k x_n]_{\underset{\sim}{r}_p})$ est k-e. r. dans $\underset{\sim}{Z}_p$ .

<u>Suffisance</u>. - Posant ici, pour $k \in \underset{\sim}{N}$ et $h = 1 , \ldots , p^k - 1$ :

$$S_N(h , k) = \frac{1}{N} \sum_{1\leq n\leq N} e_p\left(\frac{h}{p^k} [p^k x_n]_{\underset{\sim}{r}_p}\right)$$

$$S'_N(h , k) = \frac{1}{N} \sum_{1\leq n\leq N} e_p(hx_n)\left(e\left(- \frac{h}{p^k} \langle p^k x_n\rangle_{\underset{\sim}{r}_p}\right) - 1\right)$$

et pour $h \in \underset{\sim}{N}$ :

$$\sigma_N(h) = \frac{1}{N} \sum_{1\leq n\leq N} e_p(hx_n)$$

on a

$$S_N(h , k) = \sigma_N(h) + S'_N(h , k)$$

d'où

$$|\sigma_N(h)| \leq |S_N(h , k)| + |S'_N(h , k)| .$$

Si on pose comme précédemment $M = \sup_{t \in \underset{\sim}{r}} |t|$ , on trouve ici $|S'_N(h , k)| \leqslant \frac{2\pi hM}{p^k}$ , de sorte que

$$|\sigma_N(h)| \leqslant |S_N(h , k)| + \frac{2\pi hM}{p^k} .$$

Si la suite $([p^k x_n]_{\underset{\sim}{r}_p})$ est k-e. r. dans $\underset{\sim}{Z}_p$ pour tout $k \in \underset{\sim}{N}$ , alors, pour pour tout $h \in \underset{\sim}{N}$ et pour tout entier $k > \frac{\log h}{\log p}$ , on a

$$\lim_{N\to\infty} S_N(h , k) = 0 ,$$

et la limite supérieure de $|\sigma_N(h)|$ quand $N \longrightarrow \infty$ est au plus égale à $\frac{2\pi hM}{p^k}$ ; cela exige, puisque, $h$ étant fixé, $k$ est arbitrairement grand, qu'on ait :

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N(h) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad h \in N ,$$

et la suite $(x_n)$ est e. r. (mod 1) dans $\underset{\sim}{Q}_p$ .

4.2. Ce lemme étant établi, soit $B$ une boule de $\underset{\sim}{Q}_p$ et soit une suite $(f_n)$ d'applications continues de $B$ dans $\underset{\sim}{Q}_p$ ; on pose $F_{m,n} = f_m - f_n$ . Soit d'autre part $E$ un ensemble de couples d'entiers naturels $(m , n)$ contenant la diagonale de $\underset{\sim}{N} \times \underset{\sim}{N}$ ; on pose, pour tout $N \in \underset{\sim}{N}$ :

$$E_N = \operatorname{card} \{(m , n) \in E \mid m \leqslant N \text{ et } n \leqslant N\} .$$

Introduisons les deux conditions suivantes :

(C1) <u>A tout couple d'entiers naturels</u> $(m , n) \notin E$ <u>est associé un entier rationnel</u> $\lambda_{m,n}$ <u>tel qu'on ait, pour</u> $x \in B$ , $y \in B$ :

$$|F_{m,n}(x) - F_{m,n}(y)|_p = p^{\lambda_{m,n}} |x - y|_p$$

<u>et tel que</u> $\lambda_{m,n} \longrightarrow +\infty$ <u>quand</u> $\max(m , n) \longrightarrow \infty$ .

(C2) <u>La série de terme général</u> $\frac{E_N}{N^3}$ <u>est convergente</u>.

On sait ([1], chap. 5) que, si ces conditions sont satisfaites, alors la suite $(f_n(x))$ de $\underset{\sim}{Q}_p$ est e. r. (mod 1) dans $\underset{\sim}{Q}_p$ pour presque tous les $x \in B$ , c'est-à-dire sauf pour ceux qui appartiennent à une partie de $B$ dont la mesure de Haar [mesure-$\mathcal{H}$ ] est nulle, et il en est de même de la suite

$$\left(\frac{f_n(x)}{p^k}\right) , \quad \text{où } k \in \underset{\sim}{N} .$$

Dès lors, soient $\underset{\sim}{r} \in \mathfrak{A}$ et $\underset{\sim}{r}_p \subset \underset{\sim}{r}$ ; d'après le lemme 2 (nécessité de la condition), pour tout $k \in \underset{\sim}{N}$ , la suite $([f_n(x)]_{\underset{\sim}{r}_p})$ est k-e. r. dans $\underset{\sim}{Z}_p$ pour presque tous les $x \in B$ . Il en résulte que l'ensemble des $x \in B$ tels que la suite $([f_n(x)]_{\underset{\sim}{r}_p})$ ne soit pas e. r. dans $\underset{\sim}{Z}_p$ a une mesure-$\mathcal{H}$ nulle, et le théorème de Koksma dans $\underset{\sim}{Q}_p$ peut être complété comme suit :

THÉORÈME 2. - Soit $\underset{\sim}{r}_p$ un système de représentants de $\underset{\sim}{Q}_p/\underset{\sim}{Z}_p$ inclus dans un système de représentants $\underset{\sim}{r}$ de $\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$ tel que $\underset{\sim}{r} \in \mathfrak{A}$ , soit $B$ une boule de $\underset{\sim}{Q}_p$ et soit une suite $(f_n)$ d'applications continues de $B$ dans $\underset{\sim}{Q}_p$ ; si $E$ , $B$ , $f_n$ vérifient les conditions (C1) et (C2), alors, pour presque tous les $x \in B$ , la suite $(f_n(x))$ est e. r. (mod 1) dans $\underset{\sim}{Q}_p$ et la suite $([f_n(x)]_{\underset{\sim}{r}_p})$ est e. r. dans $\underset{\sim}{Z}_p$ .

## 5. Applications du théorème de Koksma dans $\underset{\sim}{Q}_p$ .

Il est entendu que, dans ce dernier paragraphe, $\underset{\sim}{r}_p$ est de la forme que lui assigne le théorème 2.

(a) Démontrons d'abord le corollaire suivant.

COROLLAIRE. - Soit une suite $(a_n)$ de $\underset{\sim}{Q}_p$ telle que $\lim_{n\to\infty} v(a_n) = -\infty$ ; s'il existe un couple réel $(c , s)$ vérifiant $c \geqslant 0$ et $0 \leqslant s < 1$ , tel qu'à partir d'un certain rang en $m$ et d'un certain rang en $n$ , on ait :

$$|m - n| > c \max(m^s , n^s) \implies v(a_m) \neq v(a_n)$$

alors, pour presque tous les $x \in \underset{\sim}{Q}_p$ , la suite $n \longmapsto a_n x$ est e. r. (mod 1) dans $\underset{\sim}{Q}_p$ et la suite $n \longmapsto [a_n x]_{\underset{\sim}{r}_p}$ est e. r. dans $\underset{\sim}{Z}_p$ .

Prenant $f_n(x) = a_n x$ , on a :

$$|F_{m,n}(x) - F_{m,n}(y)|_p = p^{\lambda_{m,n}} |x - y|_p$$

en posant $\lambda_{m,n} = - v(a_m - a_n)$ .

Si $v(a_m) \neq v(a_n)$ , on a

$$\lambda_{m,n} = - \min(v(a_m) , v(a_n)) \rightarrow + \infty \quad \text{quand} \quad \max(m , n) \rightarrow \infty .$$

Ainsi (C1) est vérifiée en prenant

$$E = \{(m\ ,\ n) |\ \ v(a_m) = v(a_n)\}\ .$$

Comme par hypothèse

$$v(a_m) = v(a_n) \implies |m - n| \leqslant c \max(m^s\ ,\ n^s)$$

pour disons, $m > m_0$ et $n > n_0$, on voit que

$$E \subset F = \{(m\ ,\ n)\ |\ \ m \leqslant m_0 \ \text{ ou } \ n \leqslant n_0 \ \text{ ou } \ |m - n| \leqslant c \max(m^s\ ,\ n^s)\}\ .$$

Supposons $1 \leq m, n \leq N$ ; le nombre des couples $(m\ ,\ n)$ vérifiant la première condition indiquée est $m_0 N$ ; de même, celui des couples $(m\ ,\ n)$ vérifiant la seconde est $n_0 N$ ; enfin, celui des couples $(m\ ,\ n)$ vérifiant la troisième est **au plus égal** à $N(2cN^s + 1) = O(N^{s+1})$. Donc on a, avec des notations évidentes

$$E_N \leqslant F_N = O(N^{s+1})$$

et (C2) est vérifiée, puisque $s < 1$.

En particulier, appliquant ce corollaire avec $s = 0$, $c = p - 1$, on voit que, <u>pour presque tous les</u> $x \in \underset{\sim}{Q}_p$, <u>la suite</u>

$$n \longmapsto \frac{x}{(\alpha + 1)^k (\alpha + 2)^k \ldots (\alpha + n)^k}$$

<u>où</u> $k \in \underset{\sim}{N}$, $\alpha \in \underset{\sim}{Z}_p$, $-\alpha \notin \underset{\sim}{N}$, <u>est</u> e. r. (mod 1) <u>dans</u> $\underset{\sim}{Q}_p$ <u>et la suite associée</u>

$$n \longrightarrow \left[\frac{x}{(\alpha + 1)^k (\alpha + 2)^k \ldots (\alpha + n)^k}\right]_{\underset{\sim}{r}_p}$$

<u>est</u> e. r. <u>dans</u> $\underset{\sim}{Z}_p$.

(b) Soit $f_n(x) = xn^k \alpha^n$, où $k \in \underset{\sim}{Z}$, $\alpha \in \underset{\sim}{Q}_p - \underset{\sim}{Z}_p$. On a

$$|F_{m,n}(x) - F_{m,n}(y)|_p = p^{\lambda_{m,n}} |x - y|_p\ ,$$

en posant $\lambda_{m,n} = - v(m^k \alpha^m - n^k \alpha^n)$.

Si $kv(m) + mv(\alpha) \neq kv(n) + nv(\alpha)$, on a

$$\lambda_{m,n} = - \min(kv(m) + mv(\alpha)\ \ ,\ kv(n) + nv(\alpha))\ .$$

Puisque $v(n) = O(\log n)$ et $v(\alpha) \leqslant -1$ , on voit que $\lambda_{m,n} \to +\infty$ quand $\max(m , n) \to \infty$ . Ainsi (C1) est vérifiée en prenant

$$E = \{(m , n) \mid (m - n)v(\alpha) = k(v(n) - v(m))\} .$$

Supposons $1 \leqslant m,n \leqslant N$ et $(m - n)v(\alpha) = k(v(n) - v(m))$ ; à un choix de $m$ et de $v(n)$ correspond au plus une seule valeur de $n$ ; comme les valeurs possibles de $m$ sont $1 , 2 , \ldots , N$ et les valeurs possibles de $v(n)$ sont $0 , 1 , \ldots , [\frac{\log N}{\log p}]$ , on a

$$E_N \leqslant N([\frac{\log N}{\log p}] + 1) = O(N \log N)$$

et (C2) est vérifiée. Ainsi, <u>pour presque tous les</u> $x \in \mathbb{Q}_p$ , <u>la suite</u> $n \longmapsto xn^k\alpha^n$, <u>où</u> $k \in \mathbb{Z}$ , $\alpha \in \mathbb{Q}_p - \mathbb{Z}_p$ , <u>est</u> e. r. (mod 1) <u>dans</u> $\mathbb{Q}_p$ <u>et la suite associée</u> $n \longmapsto [xn^k \alpha^n]_{\mathbb{Z}_p}$ <u>est</u> e. r. <u>dans</u> $\mathbb{Z}_p$ .

(c) Soit $f_n(x) = \gamma(n!)^h x^n$ , où $\gamma \in \mathbb{Q}_p^*$ , $h \in \mathbb{Z}$ , et soit $B_k$ une boule de rayon $\frac{1}{p^{k+2}}$ contenue dans la couronne $p^k U_p$ , où $k \in \mathbb{Z}$ . Prenons $x \in B_k$ , $y \in B_k$ , $x \neq y$ , et formons

$$\frac{F_{m,n}(x) - F_{m,n}(y)}{x - y} = \gamma\frac{(m!)^h (x^m - y^m)}{x - y} - \gamma\frac{(n!)^h (x^n - y^n)}{x - y} .$$

On obtient, dans ces conditions :

$$v(\frac{x^n - y^n}{x - y}) = v(n) + (n - 1)k$$

d'où

$$v(\frac{(n!)^h (x^n - y^n)}{x - y}) = hv(n!) + v(n) + (n - 1)k ,$$

soit $\varphi(n)$ . Dès lors, si $\varphi(m) \neq \varphi(n)$ , on a

$$|F_{m,n}(x) - F_{m,n}(y)|_p = p^{\lambda_{m,n}} |x - y|_p$$

en posant

$$\lambda_{m,n} = - v(\gamma) - \min(\varphi(m) , \varphi(n)) .$$

Or on voit que

$$\varphi(n) = n(k + \frac{h}{p - 1}) + O(\log n) .$$

Supposons $k < -\frac{h}{p-1}$ ; alors $\lambda_{m,n} \to +\infty$ quand $\max(m, n) \to \infty$ . Ainsi (C1) est vérifiée en prenant

$$E = \{(m, n) \mid \varphi(m) = \varphi(n)\} .$$

La condition indiquée s'écrit explicitement

$$v\left(\frac{(n!)^h\, n}{(m!)^h\, m}\right) = (m - n)k$$

où le premier membre est de la forme $\frac{(n-m)h}{p-1} + O(\log \max(m, n))$ ; elle s'écrit donc encore

$$m - n = O(\log \max(m, n)) .$$

Supposant $1 \leq m, n \leq N$ ; il en résulte qu'on a ici

$$E_N = O(N \log N)$$

et (C2) est vérifiée.

Le résultat de KOKSMA s'applique donc à presque tous les $x \in B_k \subset p^k \underset{\sim}{U}_p$ quel que soit $k < -\frac{h}{p-1}$ , c'est-à-dire finalement à presque tous les $x \in \underset{\sim}{Q}_p - p^K \underset{\sim}{Z}_p$ , où $K$ est l'entier rationnel défini par $K - 1 < -\frac{h}{p-1} \leqslant K$ .

Ainsi :

*Soient* $\gamma \in \underset{\sim}{Q}_p^*$ , $h \in \underset{\sim}{Z}$ *et soit* $K$ *le plus petit entier rationnel* $\geqslant -\frac{h}{p-1}$ ; *pour presque tous les* $x \in \underset{\sim}{Q}_p - p^K \underset{\sim}{Z}_p$ , *la suite* $n \longmapsto \gamma(n!)^h x^n$ *est* e. r. (mod 1) *dans* $\underset{\sim}{Q}_p$ *et la suite* $n \longmapsto [\gamma(n!)^h x^n]_{\underset{\sim}{r}_p}$ *est* e. r. *dans* $\underset{\sim}{Z}_p$ .

Le cas $h = 0$ , d'où $K = 0$ , étend aux parties entières un résultat remarquable obtenu par Mme F. BERTRANDIAS ([1], chap. 5) : *soit* $\gamma \in \underset{\sim}{Q}_p^*$ ; *pour presque tous les* $x \in \underset{\sim}{Q}_p - \underset{\sim}{Z}_p$ , *la suite* $n \longmapsto \gamma x^n$ *est* e. r. (mod 1) *dans* $\underset{\sim}{Q}_p$ *et la suite* $n \longmapsto [\gamma x^n]_{\underset{\sim}{r}_p}$ *est* e. r. *dans* $\underset{\sim}{Z}_p$ .

## BIBLIOGRAPHIE


[1] BERTRANDIAS (Françoise). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques, Bull. Soc. math. France, Mémoire n° 4, 1965, VI + 98 p. (Thèse Sc. math. Paris, 1965).

[2] CHAUVINEAU (Jean). - Complément au théorème métrique de Koksma dans $\underset{\sim}{R}$ et dans $\underset{\sim}{Q}_p$ , C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260, 1965, p. 6252-6255.

[3] KOKSMA (Jurjen F.). - Ein mengentheoretischer Satz über die Gleichverteilung modulo Eins, Compos. Math., Groningen, t. 2, 1935, p. 250-258.

[4] NIVEN (Ivan). - Uniform distribution of sequences of integers, Trans. Amer. math. Soc., t. 98, 1961, p. 52-61.