Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Marie-Claude Durix

Prolongement de la fonction exponentielle en dehors de son disque de convergence

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 8, nº 1 (1966-1967), exp. nº 1, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1966-1967__8_1_A1_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
8e année, 1966/67, n° 1

7 novembre 1966

PROLONGEMENT DE LA FONCTION EXPONENTIELLE EN DEHORS DE SON DISQUE DE CONVERGENCE

par Marie-Claude DURIX

Sur toute extension finie ou infinie de $\mathbb{Q}_p$, la fonction exponentielle est définie par une série entière :

$$\exp x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

qui converge pour $|x|_p < p^{-1/(p-1)}$.

Il se pose alors la question du prolongement de $\exp x$ en dehors du disque de convergence D ; il faut trouver des fonctions "exponentielles" définies en dehors de D , dont la restriction à D soit la fonction $\exp x$, et qui vérifient, pour tout a et tout b :

$$\exp(a + b) = \exp a \exp b \ .$$

Pour a quelconque, on peut toujours trouver n , entier rationnel, tel que

$$|p^n a|_p = p^{-n} |a|_p < p^{-1/(p-1)} \ .$$

Alors $\exp p^n a$ est définie, et la fonction $\exp a$ cherchée devra vérifier :

$$(\exp a)^{p^n} = \exp ap^n \ .$$

Mais cette équation donne p^n valeurs possibles pour $\exp a$. En tout cas, on devra avoir : $\log(\exp a) = a$, car la fonction logarithme est fonction réciproque de la fonction exponentielle sur D :

$$1 + x = \exp a \iff \log(1 + x) - a = 0 \ .$$

Nous allons donc étudier les solutions de l'équation :

$$\log(1 + x) - a = 0 \qquad \text{pour } a \text{ quelconque.}$$

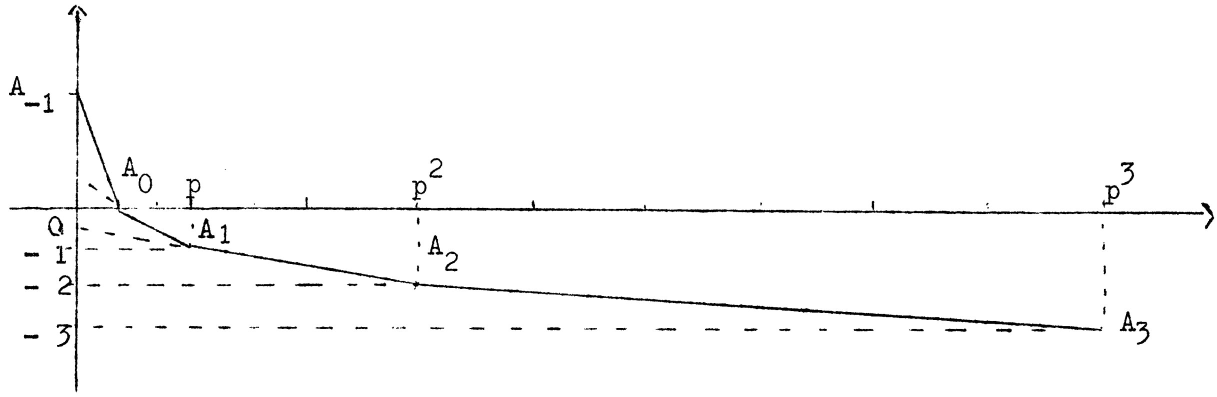
1. Etude de la fonction : $g(x) = \log(1 + x) - a$.

Si $|x|_p < 1$,

$$g(x) = -a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} .$$

Soient A_{-1} , A_0 , A_1 , ... , A_j , ... les points de coordonnées :

$$A_{-1}\left|\begin{matrix}0\\ v(a)\end{matrix}\right. , \qquad A_0\left|\begin{matrix}1\\ 0\end{matrix}\right. , \qquad A_1\left|\begin{matrix}p\\ -1\end{matrix}\right. , \qquad \ldots \qquad A_j\left|\begin{matrix}p^j\\ -j\end{matrix}\right. , \qquad \ldots$$



Si $a = 0$, le polygone de Newton de $g(x)$ est $A_0\ A_1\ A_2$ ... et

$$g(x) = x \prod_{j=0}^{\infty} Q_j(x) \quad \text{avec} \quad Q_j(x) = \frac{1}{p}\,\frac{(1+x)^{p^{j+1}} - 1}{(1+x)^{p^j} - 1} .$$

La droite $A_{j-1}\ A_j$ a pour ordonnée à l'origine : $-(j-1) + \frac{1}{p-1}$. Si

$$-j + \frac{1}{p-1} < v(a) \leqslant -(j-1) + \frac{1}{p-1} ,$$

alors le 1er côté du polygone de Newton de $g(x)$ est $A_{-1}\ A_j$, les autres étant $A_j\ A_{j+1}$, $A_{j+1}\ A_{j+2}$, etc. ; $g(x)$ admet une infinité de zéros, soit

p^j zéros de valuation $\dfrac{-j - v(a)}{p^j}$

p^{j+1} zéros de valuation $\dfrac{-1}{p^{j+1}(p-1)}$, etc.

Comme $p^{-(1/p-1)-1} \leqslant |ap^j|_p < p^{-1/(p-1)}$, $\exp ap^j$ existe.

Posons :

$$Q_{-1}(x) = 1 + x - \exp a \qquad \text{si} \quad |a|_p < p^{-1/(p-1)}$$

$$Q_0(x) = \frac{1}{p}\,\frac{(1+x)^p - \exp ap}{1 + x - \exp a} \qquad \text{si} \quad |a|_p < p^{-1/(p-1)}$$

$$Q_1(x) = \frac{1}{p}\,\frac{(1+x)^{p^2} - \exp ap^2}{(1+x)^p - \exp ap} \qquad \text{si} \quad |a|_p < p^{-(1/p-1)+1}$$

$$\vdots$$

$$Q_j(x) = \frac{1}{p}\,\frac{(1+x)^{p^{j+1}} - \exp ap^{j+1}}{(1+x)^{p^j} - \exp ap^j} \qquad \text{si} \quad |a|_p < p^{-(1/p-1)+j}$$

et

$$P_{-1}(x) = Q_{-1}(x)$$

$$P_0(x) = Q_{-1}(x)\, Q_0(x) = \frac{1}{p}\left[(1+x)^p - \exp ap\right]$$

$$\vdots$$

$$P_j(x) = Q_{-1}(x)\, Q_0(x)\, Q_1(x) \ldots Q_j(x) = \frac{1}{p^{j+1}}\left[(1+x)^{p^{j+1}} - \exp ap^{j+1}\right],$$

$P_j(x)$ est défini si $|a|_p < p^{-(1/p-1)+j+1}$, alors si

$$p^{-(1/p-1)-1} \leqslant |ap^j|_p < p^{-1/(p-1)}$$

on a :

$$g(x) = P_{j-1}(x) \prod_{k=j-1}^{\infty} Q_k(x) \,.$$

Pour démontrer cette égalité, on pourra remarquer d'abrod que les polygones de Newton des polynômes P_{j-1} , Q_{j-1} , Q_j , etc. sont des segments parallèles et égaux aux côtés du polygone de $g(x)$. Il est facile de montrer que le produit infini

$$P_{j-1}(x) \prod_{k=j-1}^{\infty} Q_k(x)$$

converge pour $|x|_p < 1$. La limite est $g(x)$, car la différence :

$$|f(x) - P_{j-1}(x) \prod_{k=j-1}^{J} Q_k(x)| = |f(x) - P_J(x)|_p$$

tend vers 0 lorsque J devient infini.

Par conséquent, les seules déterminations possibles de $\exp a$ sont de la forme $\exp a = 1 + x$ où x est racine de l'équation $g(x) = 0$, c'est-à-dire où x est zéro de l'un des polynômes P_{j-1}, Q_{j-1}, Q_j, etc. : il y a une infinité de déterminations. C'est dans cet ensemble de racines que nous allons choisir les valeurs possibles de $\exp a$, de manière à ce que la relation fonctionnelle soit respectée.

2. Déterminations de la fonction exponentielle sur $\mathbb{Q}_p$.

Nous noterons " $\exp a$ " la fonction cherchée, et e^a la somme de la série pour $|a|_p < p^{-1/(p-1)}$.

Si $|a - b|_p < p^{-1/(p-1)}$, $\exp b = \exp a \; e^{b-a}$ d'après la relation fonctionnelle. Donc, si $\exp a$ est connue, $\exp b$ est connue pour tout b de la boule ouverte de centre a et de rayon $p^{-1/(p-1)}$.

Nous allons recouvrir tout sous-ensemble borné de $\mathbb{Q}_p$ par un nombre fini de boules de rayon $p^{-1/(p-1)}$, puis nous allons fixer, en un point de chacune de ces boules, une valeur de l'exponentielle de manière à ce que la relation fonctionnelle soit vérifiée.

Le groupe des valuations de $\mathbb{Q}_p$ est $\mathbb{Z}$:

$$p^{k-(1/p-1)} \leqslant |a|_p < p^{k+1-(1/p-1)} \qquad \text{si et seulement si} \qquad |a|_p = p^k$$

(ou p^{k-1} si $p = 2$). En particulier, $|a|_p < p^{-1/(p-1)}$ si et seulement si $|a|_p < 1$ (ou p^{-1} si $p = 2$). Dans ce dernier cas, e^a existe. Il reste à déterminer $\exp a$ pour $|a|_p = p^0, p^1, \dots, p^k, \dots$ (et p^{-1} si $p = 2$).

Premier cas. - $p \neq 2$: $|a|_p = p^0 = 1$. Soient

$$A_0 = \{a \mid a \in \mathbb{Q}_p \,,\; |a|_p \leqslant 1\}$$
$$P_0 = \{a \mid a \in \mathbb{Q}_p \,,\; |a|_p < 1\} \,,$$

A_0/P_0 a p éléments. A_0 est donc recouvert par p disques ouverts de rayon 1. Soient $0, 1, 2, \dots, p-1$ des représentants commodes de ces p disques.

$$\exp 0 = e^0 = 1$$

$\exp 1$ doit vérifier l'équation $(\exp 1)^p - e^p = 0$.

Prenons $\exp 1 = 1 + x_0$, tel que $(1 + x_0)^p = e^p$ (il y a p choix possibles pour x_0), alors

$$\exp 2 = (1 + x_0)^2$$
$$\vdots$$
$$\exp (p - 1) = (1 + x_0)^{p-1}$$

et quel que soit a de A_0 , il existe $i = 0 , 1 , \dots , p - 1$ unique tel que :

$$|a - i|_p < 1$$

donc

$$\exp a = \exp i \; e^{a-i} = (1 + x_0)^i \, e^{a-i} .$$

Il reste à vérifier la relation fonctionnelle : soient a et b deux éléments de A_0 . Il existe

$$i = 0 , \dots , p - 1 \text{ tel que } |a - i|_p < 1$$
$$j = 0 , \dots , p - 1 \text{ tel que } |b - j|_p < 1$$

donc

$$|(a + b) - (i + j)|_p < p^{-1/(p-1)} ,$$

$$\exp a = \exp i \; e^{a-i} ,$$
$$\exp b = \exp j \; e^{b-j} ,$$
$$\exp a \exp b = \exp (i + j) \; e^{a+b-(i+j)} = \exp (a + b) .$$

<u>Deuxième cas</u>. - $p = 2$; posons

$$A_{-1} = \{a \mid |a|_p \leqslant p^{-1}\}$$
$$P_{-1} = \{a \mid |a|_p < p^{-1}\}$$

A_{-1}/P_{-1} ont deux éléments, dont nous prendrons pour représentant 0 et p , et $\exp p$ sera solution de l'équation :

$$(\exp p)^p = e^{(p^2)} .$$

<u>Cas général</u>. - $|a|_p = p^k$. Supposons qu'une détermination de l'exponentielle ait été choisie pour $|a|_p = p^0 , p^1 , \dots , p^{k-1}$.

$$A_k = \{a \mid |a|_p \leqslant p^k\}$$
$$P_k = \{a \mid |a|_p < p^k\}$$

A_k/P_k a p éléments. Soient $0 , \frac{1}{p^k} , \frac{2}{p^k} , \ldots , \frac{p-1}{p^k}$ des représentants commodes de ces p éléments

$$\exp \frac{1}{p^k} = 1 + x_k$$

tel que

$$(1 + x_k)^{p^{k+1}} = e^p$$
$$(1 + x_k)^{p^k} = \exp 1 = 1 + x_0$$
$$(1 + x_k)^{p^{k-1}} = \exp \frac{1}{p} = 1 + x_1$$
$$\vdots$$
$$(1 + x_k)^p = \exp \frac{1}{p^{k-1}} = 1 + x_{k-1}$$

$1 + x_0 , 1 + x_1 , \ldots , 1 + x_{k-1}$ ayant été choisis, nous choisirons $1 + x_k$ parmi les p solutions de l'équation :

$$(1 + x)^p = 1 + x_{k-1} .$$

Pour $j = 2 , \ldots , p - 1$,

$$\exp \frac{j}{p^k} = (\exp \frac{1}{p^k})^j = (1 + x_k)^j$$

exp a sera donc connue pour tout élément de A_k ; il est facile de voir que la relation exponentielle est vérifiée.

Si nous appelons E_k l'ensemble des fonctions exponentielles qu'on peut définir sur A_k , il est facile de voir que $\{E_k\}$ forme un système projectif :

$$E = \varprojlim E_k$$

est l'ensemble des fonctions "exponentielles" qu'on peut définir sur $\mathbb{Q}_p$.

3. Déterminations de la fonction exponentielle sur une extension finie de $\underset{\sim}{Q}_p$.

Soit K_p une extension algébrique finie de degré n de $\underset{\sim}{Q}_p$. Nous voulons déterminer une fonction " exp a " sur $\underset{\sim}{Q}_p$ qui vérifie les conditions :

1° La restriction de la fonction à $D \cap K_p$ est la fonction exp a ordinaire ; la restriction de la fonction à $\underset{\sim}{Q}_p$ est une fonction exponentielle sur $\underset{\sim}{Q}_p$.

2° La relation fonctionnelle $\exp(a + b) = \exp a \exp b$ est vérifiée.

Le groupe des valuations de K_p est :

$$\Gamma := \{\frac{m}{e} \mid m \in \underset{\sim}{Z}\} \qquad (e \text{ divise } n) .$$

Soient :

$$A_k = \{a \mid a \in K_p , |a|_p \leqslant p^{k/e}\} = P_{k+1}$$

$$P_k = \{a \mid a \in K_p , |a|_p < p^{k/e}\} = A_{k-1}$$

$A_k/P_k \simeq A_0/P_0$, A_k/P_k a p^f éléments. On sait que : $n = ef$.

LEMME 1. - Si une fonction exponentielle est connue en un point de chacune des classes de A_k modulo P_k , et sur P_k , elle est connue sur A_k .
(La démonstration est immédiate.)

LEMME 2. - Il existe f éléments indépendants $\omega_1^k , \omega_2^k , \ldots , \omega_f^k$ de A_k tels que chaque classe de A_k modulo P_k ait pour représentant une combinaison linéaire à coefficients entiers, compris entre 0 et $p - 1$, des

$$\omega_1^k , \omega_2^k , \ldots , \omega_f^k .$$

Indication de la démonstration. - Soient $B_0 = P_k$, B_1 , B_2 , ... , B_{p^f-1} , les p^f boules ouvertes de rayon $p^{k/e}$ qui recouvrent A_k .

Prenons $\omega_1^k \in B_1$, $\omega_1^k \notin \underset{\sim}{Q}_p$, alors

$$2\omega_1^k , 3\omega_1^k , \ldots , (p - 1)\omega_1^k$$

sont les représentants de B_2 , B_3 , ... , B_{p-1} .

Soit $\omega_2^k \in B_p$, $\omega_2^k \notin Q_p$, ω_1^k et ω_2^k sont indépendants, alors

$$2\omega_2^k , 3\omega_2^k , \ldots , (p - 1)\omega_2^k \qquad \text{et} \qquad \lambda_1 \omega_1^k + \lambda_2 \omega_2^k ,$$

où $1 \leqslant \lambda_i \leqslant p-1$, sont des représentants des boules suivantes, et nous prendrons ω_3^k dans une boule qui n'a pas encore de représentant de la forme

$$\lambda_1 \omega_1^k + \lambda_2 \omega_2^k , \text{ etc.}$$

Soit m le quotient entier de e par $p-1$:

$$p^{(-m-1)/e} < p^{-1/(p-1)} \leqslant p^{-m/e} ,$$

LEMME 3. - <u>Il existe sur chaque boule</u> A_{-m} , A_{-m+1} , ... , A_{-m+e-1} , f <u>éléments indépendants</u> (ω_i^k) <u>qui vérifient les conditions du lemme 2 et qui sont tous indépendants entre eux : il s'agit donc de</u> $ef = n$ <u>éléments indépendants qui forment une base de</u> K_p .
(La démonstration est immédiate.)

THÉORÈME 1. - <u>En choisissant pour chaque</u> ω_i^k , <u>tel que</u> $1 \leqslant i \leqslant f$, $-m \leqslant k \leqslant -m+e-1$, <u>une valeur correspondante de</u> $\exp \omega_i^k$ <u>parmi les solutions de l'équation</u> $X^p = \exp \omega_i^k p$, <u>on obtient, sur tout</u> A_k , <u>pour</u>

$$-m \leqslant k \leqslant -m+e-1 ,$$

<u>une fonction qui vérifie les conditions 1° et 2°.</u>

$e^{\omega_i^k p}$ existe puisque, pour chaque ω_i^k :

$$|\omega_i^k|_p \leqslant p^{(-m+e-1)/e} = p^{(-m-1/e)+1} < p^{-(1/p-1)+1}$$

donc

$$|\omega_i^k p|_p < p^{-1/(p-1)} .$$

Nous prendrons $\exp \omega_i^k = 1 + x_i^k$ avec

$$(1 + x_i^k)^p = e^{\omega_i^k p}$$

(il y a p choix distincts pour $\exp \omega_i^k$).

La fonction choisie sera égale à la fonction ordinaire, $\exp a$, pour P_{-m} . D'après le lemme 1, si nous choisissons une valeur de $\exp \omega_i^{-m}$, pour chaque ω_i^{-m} , la fonction exponentielle correspondante sera connue sur A_{-m} quel que soit a de A_{-m} , il existe un système unique de f entiers n_i tels que a et

$$\sum_{i=1}^{f} n_i \, \omega_i^{-m}$$

appartiennent à la même boule de rayon $p^{-m/e}$:

$$|a - \sum_{i=1}^{f} n_i \, \omega_i^{-m}|_p < p^{-m/e} .$$

D'où

$$\exp a = \exp \sum_{i=1}^{f} n_i \, \omega_i^{-m} \exp \left(a - \sum_{i=1}^{f} n_i \, \omega_i^{-m}\right)$$

$$\exp a = \prod_{i=1}^{f} (\exp \omega_i^{-m})^{n_i} \exp \left(a - \sum_1^f n_i \, \omega_i^{-m}\right)$$

$$\exp a = \prod_{i=1}^{f} (1 + x_i^{-m})^{n_i} \exp \left(a - \sum_1^f n_i \, \omega_i^{-m}\right) .$$

De même, pour tout k tel que $-m \leqslant k \leqslant -m + e - 1$, si une fonction exponentielle est choisie sur P_k , une fonction exponentielle pourra être choisie sur A_k de la manière suivante : si $|a|_p = p^{k/e}$, il existe un système unique de f entiers n_i^k tels que :

$$|a - \sum_{i=1}^{f} n_i^k \, \omega_i^k|_p < p^{k/e}$$

$$\exp a = \exp \sum_{i=1}^{n=f} n_i^k \, \omega_i^k \underbrace{\exp \left(a - \sum_{i=1}^{f} n_i^k \, \omega_i^k\right)}_{\substack{\text{exponentielle d'un} \\ \text{élément de } P_k}}$$

$$\exp a = \prod_{i=1}^{f} (1 + x_i^k)^{n_i^k} \exp \left(a - \sum_{i=1}^{f} n_i^k \, \omega_i^k\right) .$$

Les fonctions trouvées vérifient bien la condition 1°.

Voyons si elles vérifient la condition 2°. Soient a et b deux éléments de A_{-m+e-1} . Il existe un système unique d'entiers (n_i^k) , $1 \leqslant i \leqslant f$, $-m \leqslant k \leqslant -m + e - 1$ tels que $0 \leqslant n_i^k \leqslant p - 1$:

$$|a - \sum_{k=-m}^{-m+e-1} \sum_{i=1}^{f} n_i^k \, \omega_i^k|_p < p^{-1/(p-1)} .$$

Il existe un système unique d'entiers (m_i^k) , $1 \leqslant i \leqslant f$,

$$- m \leqslant k \leqslant - m + e - 1 \ ,$$

tels que $0 \leqslant m_i^k < p - 1$:

$$|b \sum_{k=-m}^{-m+e-1} \sum_{i=1}^{f} m_i^k \omega_i^k|_p < p^{-1/(p-1)}$$

$$\exp a = \prod_{i,k} (1 + x_i^k)^{n_i^k} \exp (a - \sum n_i^k \omega_i^k)$$

$$\exp b = \prod_{i,k} (1 + x_i^k)^{m_i^k} \exp (b - \sum m_i^k \omega_i^k)$$

$$(\exp a)(\exp b) = \prod_{i,k} (1 + x_i^k)^{n_i^k+m_i^k} \exp (a + b - \sum (n_i^k + m_i^k) \omega_i^k$$

$$\exp a \exp b = \exp (a + b) \ .$$

LEMME 3 bis. - <u>En prenant</u>

$$\omega_i^k = \frac{\omega_i^{-m+r}}{p^q}$$

<u>chaque fois que</u> $k = - m + eq + r$ $(r < e)$, <u>on obtient</u> f <u>éléments indépendants sur</u> A_k <u>qui vérifient les conditions du lemme 2</u>.

Si $k > - m$,

$$|\omega_i^k|_p = p^{k/e} = p^{(-m+t)/e} \quad \text{pour } \omega_i^k \in A_k \ , \quad t = eq + r \ , \quad 0 \leqslant r < e$$

$$|\omega_i^k|_p = p^{(-m+eq+r)/e} = p^{(-m+r)/e} \, p^q$$

$$|\omega_i^k|_p = \left|\frac{\omega_i^{-m+r}}{p^q}\right|_p \ .$$

On vérifie facilement que les éléments $\omega_i^k = \dfrac{\omega_i^{-m+r}}{p^q}$ vérifient les conditions du lemme 2.

THÉORÈME 2. - Pour chaque élément $\omega_i^k = \dfrac{\omega_i^{-m+r}}{p^q}$, choisissons $\exp \omega_i^k$ tel que :

$$\left(\exp \frac{\omega_i^{-m+r}}{p}\right)^p = \exp \omega_i^{-m+r}$$

$$\left(\exp \frac{\omega_i^{-m+r}}{p^2}\right)^p = \exp \frac{\omega_i^{-m+r}}{p}$$

$$\vdots$$

$$\left(\exp \frac{\omega_i^{-m+r}}{p^q}\right)^p = \exp \frac{\omega_i^{-m+r}}{p^{q-1}} \text{ , etc.}$$

On obtient alors sur tout A_k une fonction qui vérifie les conditions 1° et 2°.

D'après le lemme 2, puisque la valeur de la fonction est choisie pour tout ω_i^k , la fonction sera connue partout. Il est facile de voir que les fonctions obtenues vérifient la condition 1°.

Pour la condition 2°, il suffit de vérifier comme on l'avait fait pour le théorème 1.

En conclusion, on trouve une infinité de fonctions exponentielles sur K_p , chacune étant définie par sa restriction à A_k , quel que soit k .

4. Déterminations de l'exponentielle sur la clôture algébrique Ω_p de $\mathbb{Q}_p$.

Pour chaque boule ouverte P_k d'une extension finie K_p de $\mathbb{Q}_p$, nous connaissons l'ensemble des exponentielles définies sur P_k , il y en a un nombre fini. Ω_p est la réunion de toutes les extensions algébriques finies de $\mathbb{Q}_p$.

$$P_{K_p,k} = \{a \mid a \in K_p \ , \ |a|_p < p^{k/e}\}$$

$$\Omega_p = \cup P_{K_p,k} \text{ . Soit } \mathcal{P} = \{P_{K_p,k}\} \text{ .}$$

Soit E_P l'ensemble des fonctions exponentielles définies sur une de ces boules P : c'est un ensemble fini.

Montrons que $\{E_P\}_{P\in\mathcal{P}}$ est un système projectif d'espaces compacts.

L'ensemble $\mathcal{P}$ est ordonné par la relation :

$$P \leqslant Q \iff P \subseteq Q \text{ .}$$

$\mathcal{P}$ est un ensemble filtrant pour cette relation : si P' , P'' sont formés d'éléments de deux extensions K' et K'' de $\mathbb{Q}_p$, il existe une extension K de $\mathbb{Q}_p$ qui contient à la fois K' et K'' , donc une boule P qui contient P' et P'' . D'autre part, tous les ensembles P contiennent $D \cap \mathbb{Q}_p$.

Comme application de E_Q dans E_P , nous prendrons : si $P \leq Q$,

$$f \in E_Q \rightarrow f \mid P \in E_P .$$

Cette application de E_Q dans E_P est une surjection. Si $P = Q$, c'est l'identité.

Les E_P sont des ensembles finis, donc compacts. Soit E la limite projective des E_P : $E = \varprojlim E_P$ est non vide.

L'application canonique de E sur E_P fait correspondre à tout élément de E sa restriction à P .

L'ensemble E est l'ensemble des fonctions exponentielles qu'on peut définir sur Ω_p .

5. Détermination de l'exponentielle sur le complété $\hat{\Omega}_p$ de Ω_p .

Soit f une fonction exponentielle uniforme définie sur Ω_p . Quel que soit l'élément a de $\hat{\Omega}_p$, a est limite d'éléments de Ω_p : il existe un élément b de Ω_p tel que $|a - b|_p < p^{-1/(p-1)}$.

Nous définirons donc $f(a)$ par

$$f(a) = f(b) \exp (a - b)$$

puisque $\exp (a - b)$ existe.

Il est facile de vérifier que la fonction obtenue est une fonction exponentielle sur $\hat{\Omega}_p$ et qu'elle vérifie bien :

$$f(a + b) = f(a) \times f(b) .$$