Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Spiros P. Zervos

Une définition générale de la dimension

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 7, nº 1 (1965-1966), exp. nº 9, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1965-1966__7_1_A7_0>

UNE DÉFINITION GÉNÉRALE DE LA DIMENSION

par Spiros P. ZERVOS

Terminologie. - En général, les notations utilisées sont celles de N. BOURBAKI. De plus,

- Treillis = ensemble réticulé.
- $\overline{T}_\theta$ = nombre cardinal de θ , si θ est un ensemble non vide.
- Paire = couple non nécessairement ordonné.
- Couple = paire ordonnée.

Enfin, triple, quadruple, etc. sous-entendent : ordonné.

I. Une définition générale de la limite inférieure et de la limite supérieure.

HYPOTHÈSES (D.1). - E et M sont des ensembles non vides ; R est une partie non vide de E^2 (donc R définit une relation binaire sur E) ; $\leqslant$ est un ordre sur M ; g est une application $E \to M$.

Notations. - Etant donné un élément γ de E , on désignera par E_γ l'ensemble des éléments γ^* de E tels que $(\gamma^* , \gamma) \in R$. L'ensemble des éléments γ de E , tels que $E_\gamma \neq \emptyset$, sera noté $E^{(2)}$; puisque $R \neq \emptyset$, $E^{(2)} \neq \emptyset$. Si, pour un $\gamma \in E^{(2)}$ donné, $\inf_{(\gamma^* \in E_\gamma)} g(\gamma^*)$ (resp. $\sup_{(\gamma^* \in E_\gamma)} g(\gamma^*)$) existe, on le désignera par $\underline{\mu}_\gamma$ (resp. $\overline{\mu}_\gamma$).

DÉFINITION (D.1). - Si, pour chaque $\gamma \in E^{(2)}$, $\underline{\mu}_\gamma$ (resp. $\overline{\mu}_\gamma$) existe, et si $\sup_{(\gamma \in E^{(2)})} \underline{\mu}_\gamma$ (resp. $\inf_{(\gamma \in E^{(2)})} \overline{\mu}_\gamma$) existe, on appellera $\sup_{(\gamma \in E^{(2)})} \underline{\mu}_\gamma$ (resp. $\inf_{(\gamma \in E^{(2)})} \overline{\mu}_\gamma$) "limite inférieure (resp. supérieure) de g suivant (E , R) " ; on la désignera par " $\liminf_{(E,R)} g$ " (resp. " $\limsup_{(E,R)} g$ ") ou, par " $\liminf g$ " (resp. " $\limsup g$ ").

Abréviations : $\underline{\mu} = \liminf g$; $\overline{\mu} = \limsup g$.

Note : Dans le cas particulier où R est une relation d'ordre filtrant à gauche, la définition (D.1) coïncide avec celle de E. J. McSHANE ([5], p. 14-16).

Remarques.

1° Si M est complet par rapport à son ordre (c'est-à-dire si $(M, \leq)$ est un **treillis complet**) $\underline{\mu}$ et $\overline{\mu}$ existeent toujours.

2° En plus des hypothèses (D.1), on utilise l'hypothèse que E' est un ensemble tel que $E^{(2)} \subset E' \subseteq E$.

Conclusion : La **lim inf** (resp. lim sup) suivant (E', R) et celle suivant (E, R) sont : soit toutes les deux définies (et dans ce cas elles sont égales), soit toutes les deux non définies.

Définition. - Une relation binaire R sur un ensemble non vide E $(\emptyset \subset R \subseteq E^2)$ sera dite "filtrante à gauche" si, quels que soient les éléments γ_1 et γ_2 de $pr_2\, R$, il existe au moins un élément γ^* de E tel que (γ^*, γ_1) et (γ^*, γ_2) appartiennent à R.

Définition analogue pour les relations filtrantes à droite.

La définition précédente généralise la notion d'ordre filtrant.

PROPOSITION 1.

Hypothèses : Faisons les hypothèses (D.1), et l'hypothèse que R est transitive, filtrante à gauche et telle que, si $\gamma \in pr_1\, R$, $\gamma \in pr_2\, R$ (en d'autres termes, si $\gamma \in pr_1\, R$, $E_\gamma \neq \emptyset$).

Conclusion : Si $\underline{\mu}$ et $\overline{\mu}$ existent, on a $\underline{\mu} \leqslant \overline{\mu}$.

Démonstration. - Supposons que $\underline{\mu}$ et $\overline{\mu}$ existent ; il suffit alors de montrer que, pour toute paire γ_1, γ_2 d'éléments de $E^{(2)}$, $\inf g(E_{\gamma_1}) \leqslant \sup g(E_{\gamma_2})$ (avec d'autres notations, $\inf g(\gamma_1^*) \leqslant \sup g(\gamma_2^*)$, donc $\underline{\mu}_{\gamma_1} \leqslant \overline{\mu}_{\gamma_2}$). Or, les hypothèses entraînent l'existence d'au moins un $\gamma_3 \in E^{(2)}$ tel que $(\gamma_3, \gamma_1) \in R$, $(\gamma_3, \gamma_2) \in R$ et, pour tout $\gamma_3^* \in E_{\gamma_3}$, $(\gamma_3^*, \gamma_1) \in R$ et $(\gamma_3^*, \gamma_2) \in R$. Or, il est alors immédiat que $\underline{\mu}_{\gamma_1} \leqslant \underline{\mu}_{\gamma_3}$ (puisque $E_{\gamma_3} \subseteq E_{\gamma_1}$), que $\underline{\mu}_{\gamma_3} \leqslant \overline{\mu}_{\gamma_3}$ (puisqu'on a toujours $\inf g(E_{\gamma_2}) \leqslant \sup g(E_{\gamma_3})$) et que $\overline{\mu}_{\gamma_3} \leqslant \overline{\mu}_{\gamma_2}$ (puisque $E_{\gamma_3} \subseteq E_{\gamma_2}$). Donc, $\underline{\mu}_{\gamma_1} \leqslant \overline{\mu}_{\gamma_2}$.

Note. - La proposition 1, dans laquelle on ne suppose pas que R est un ordre ou même un préordre (puisqu'on ne suppose ni réflexivité, ni anti-symétrie de la part de R), généralise la proposition analogue de [5], p. 14-16, pour un ordre filtrant à gauche.

Remarque. - Les considérations précédentes incitent à introduire une notion de limite suivant une relation binaire R vérifiant les hypothèses de la proposition 1. On dira que, sous ces hypothèses, " g possède la limite μ suivant R ", si et seulement si $\underline{\mu}$ et $\overline{\mu}$ existent et $\underline{\mu} = \overline{\mu} = \mu$.

Cette définition de la limite d'une application à valeurs dans un ensemble ordonné généralise la définition correspondante de McSHANE [5] de la même façon que la proposition 1 généralise sa proposition correspondante [5].

Des questions relatives à cette limite seront étudiées ailleurs.

PROPOSITION 2.

Hypothèses : Faisons les hypothèses (D.1), et l'hypothèse que $(M , \leqslant)$ est totalement ordonné.

Conclusion : Quand $\underline{\mu}$ existe, il a la propriété : L'ensemble Σ des éléments r de M , tels que, pour tout $\gamma \in E^{(2)}$, il existe $\gamma^* \in E_\gamma$ avec $g(\gamma^*) \leqslant r$, possède (dans M) une borne inférieure égale à $\underline{\mu}$.

Proposition duale pour $\overline{\mu}$.

Démonstration. - Montrons, en premier lieu, qu'il ne peut pas exister d'élément r de Σ tel que $r < \underline{\mu}$. Supposons, pour cela, qu'un tel r existe ; alors, pour tout $\gamma \in E^{(2)}$, il existerait au moins un $\gamma^* \in E_\gamma$ tel que $g(\gamma^*) \leqslant r$, ce qui impliquerait $\inf g(E_\gamma) \leqslant r$, c'est-à-dire $\underline{\mu}_\gamma \leqslant r$, donc aussi $\sup\limits_{(\gamma\in E^{(2)})} \underline{\mu}_\gamma \leqslant r$, c'est-à-dire $\underline{\mu} < r$, contrairement à l'hypothèse $r < \underline{\mu}$.

Conséquence : $r \in \Sigma$ implique $\underline{\mu} \leqslant r$.

Montrons maintenant que tout élément de M , strictement plus grand que $\underline{\mu}$, appartient à Σ . Considérons, pour cela, un élément quelconque ρ de M tel que $\underline{\mu} < \rho$. Si l'on avait $\rho \notin \Sigma$, il existerait un élément γ de $E^{(2)}$ tel qu'il n'existe pas de $\gamma^* \in E_\gamma$ satisfaisant à $g(\gamma^*) \leqslant \rho$; or, comme il est supposé totalement ordonné, cela impliquerait que l'on ait, pour tout $\gamma^* \in E_\gamma$, $g(\gamma^*) > \rho$, donc aussi $\inf g(E_\gamma) \geqslant \rho$, c'est-à-dire $\underline{\mu}_\gamma \geqslant \rho$, donc, a fortiori, $\sup\limits_{(\gamma\in E^{(2)})} \mu_\gamma \geqslant \rho$, c'est-à-dire $\underline{\mu} \geqslant \rho$, contrairement à l'hypothèse $\underline{\mu} < \rho$.

Conséquence : L'hypothèse que $\rho \in M$ et $\mu < \rho$ implique que $\rho \in \Sigma$.

Les deux conséquences, démontrées et soulignées ci-dessus, démontrent la proposition 2, sauf pour le cas où $\underline{\mu}$ est l'élément maximum de M ; or, dans ce cas, on a, quel que soit $\gamma \in E^{(2)}$ et quel que soit $\gamma^* \in E_\gamma$, $g(\gamma^*) \leqslant \mu$, donc $\mu \in \Sigma$ et, d'ailleurs, $\Sigma = \{\mu\}$. Ceci achève la démonstration de la proposition 2.

Note : La proposition 2 généralise une proposition bien connue pour les suites dénombrables de nombres réels (voir, par exemple, [9], p. 44).

Remarque. - Dans le cas réel cité en note ci-dessus, la proposition 2 possède une réciproque bien connue, dont la validité ne peut pas être étendue au cas général considéré dans la proposition 2, dans lequel l'ensemble totalement ordonné M n'est pas supposé nécessairement complet. D'autre part, quand M est complet, cette réciproque est conséquence immédiate de la proposition 2.

II. Une définition générale de la dimension.

Notation : $\mathcal{P}(E)$ = ensemble des parties de E .

1. Préliminaires.

HYPOTHÈSES (D.2). - Les hypothèses (D.1) ; et de plus : $(M , \leqslant)$ est un treillis complet ; $\mathcal{P}_0(E)$ est une partie de $\mathcal{P}(E)$ telle que si $\Delta \in \mathcal{P}_0(E)$ et $\Delta \neq \emptyset$, $R \cap \Delta^2 \neq \emptyset$ (donc aussi $\Delta \cap E^{(2)} \neq \emptyset$) ; h est une application $\mathcal{P}_0(E) \to M$, définie par les conditions : Si $\Delta = \emptyset$ et $\Delta \in \mathcal{P}_0(E)$, $h(\Delta) = \inf M$; si $\Delta \neq \emptyset$ et $\Delta \in \mathcal{P}_0(E)$, $h(\Delta) = \liminf\limits_{(\Delta, R\cap\Delta^2)} g$.

DÉFINITION (D.2). - Sous les hypothèses (D.2), la valeur $h(\Delta)$ de l'application h en Δ sera appelée " g-prédimension de Δ ".

Cette terminologie nous semble justifiée par la suite.

2. Application aux sef [1] ; la notion de g-dimension.

Soit $\Gamma = (A , \Theta , B , s)$ une sef . Faisons les hypothèses (D.2) en prenant Θ pour E et l'ensemble des $\check{\Theta}(\beta)$ $(\beta \in B)$ pour $\mathcal{P}_0(E)$; R peut être une partie non vide quelconque de E^2 qui vérifie les hypothèses (D.2).

DÉFINITION (D.3). - On appellera " g-dimension de β " la g-prédimension de $\check{\Theta}(\beta)$, et on la notera " g-dim β ".

---

[1] On aura besoin ici de la notion de sef et d'isomorphisme entre sef . Ces notions, qui ont été introduites dans [10], sont rappelés dans l'appendice du présent exposé. On renvoie également à cet appendice pour les notations utilisées ci-dessous.

Considérons les automorphismes de Γ préservant la relation binaire définie par R sur Θ (c'est-à-dire induisant une application $R \to R$). Ils forment un sous-groupe du groupe G_0 de tous les automorphismes de Γ . Soit $\overline{G}_0$ un sous-groupe de ce sous-groupe de G_0 . Si, pour chaque $\beta \in B$, tous les automorphismes appartenant à $\overline{G}_0$ laissent invariante la g-dimension de β , on dira que la g-dimension h est " $\overline{G}_0$-invariante".

On a, jusqu'ici, considéré la notion de g-dimension par rapport à une seule sef . On peut étendre cette notion à un ensemble non vide quelconque de sef , pourvu qu'elles soient deux à deux isomorphes.

Considérons, en effet, un ensemble non vide $\mathcal{C}$, de sef Γ_λ $(\lambda \in \Lambda)$, et un ensemble Φ d'isomorphismes entre éléments de $\mathcal{C}$ possédant les propriétés suivantes :

1° Pour chaque couple $(\mu , \nu) \in \Lambda^2$, Φ contient exactement un isomorphisme $\Gamma_\mu \to \Gamma_\nu$, qui sera noté $\varphi_{\nu,\mu}$; $\varphi_{\nu,\mu} = \varphi^{-1}_{\mu,\nu}$.

2° Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, $\varphi_{\lambda,\lambda}$ est l'isomorphisme (automorphisme) identique.

3° Pour tout triple $(\mu , \nu , \rho) \in \Lambda^3$, $\varphi_{\rho,\mu} = \varphi_{\rho,\nu} \circ \varphi_{\nu,\mu}$.

$(\mathcal{C} , \Phi)$ est alors une catégorie. On appliquera à chaque $\Gamma_\lambda \in \mathcal{C}$ les hypothèses (D.2) comme dans le début du II, § 2, avec les restrictions suivantes :

1° L'ensemble des R_λ est choisi de manière que chaque $\varphi_{\mu,\nu}$ soit compatible avec R_ν et R_μ (c'est-à-dire de manière que $\varphi_{\mu,\nu}$ induise un isomorphisme entre les ensembles Θ_ν et Θ_μ munis respectivement des relations R_ν et R_μ).

2° Le treillis complet $(M , \leqslant)$ est le même pour tous les λ .

3° Une <u>seule</u> (indifféremment laquelle) des applications $g_\lambda : \Theta_\lambda \to M$, par exemple g_ν , est choisie arbitrairement, les autres étant définies à partir de celle-ci par $g_\lambda = g_\nu \circ \varphi^{(1)}_{\nu,\lambda}$.

Soit $G_0^{(\lambda)}$ le groupe des automorphismes de Γ_λ $(\lambda \in \Lambda)$. Considérons le sous-groupe de $G_0^{(\nu)}$ que constituent les automorphismes de Γ_ν compatibles avec R_ν , et soit $\overline{G}_0^{(\nu)}$ un sous-groupe de ce sous-groupe. Pour chaque λ , on associera à $\overline{G}_0^{(\nu)}$ le groupe $\varphi^{-1}_{\nu,\lambda}\ \overline{G}_0^{(\nu)}\ \varphi_{\nu,\lambda}$, noté $\overline{G}_0^{(\lambda)}$, qui est constitué d'automorphismes de Γ_λ compatibles avec R_λ .

PROPOSITION 3. - <u>Sous ces hypothèses, si</u> β_μ <u>et</u> β_ρ <u>sont respectivement des images par</u> $\varphi_{\mu,\nu}$ <u>et</u> $\varphi_{\rho,\nu}$ <u>d'un même élément de</u> B_ν , <u>la</u> g_μ<u>-dimension de</u> β_μ <u>est égale à la</u> g_ρ<u>-dimension de</u> β_ρ . <u>La</u> g_μ<u>-dimension est</u> $\overline{G}_0^{(\mu)}$<u>-invariante si, et seulement si, la</u> g_ρ<u>-dimension est</u> $\overline{G}_0^{(\rho)}$<u>-invariante ; il suffit donc qu'une</u> g_λ<u>-dimen-</u>

sion soit $\overline{G}_0^{(\lambda)}$-invariante pour que toute autre g_μ-dimension $(\mu \in \Lambda)$ soit $\overline{G}_0^{(\mu)}$-invariante.

Démonstration. - Soient $\theta_\mu \in \check{\Theta}_\mu(\beta_\mu)$, $\theta_\rho \in \check{\Theta}_\rho(\beta_\rho)$, $\theta_\nu \in \check{\Theta}_\nu(\beta_\nu)$,

$$\theta_\mu = \varphi^{(1)}_{*\,\mu,\nu}(\theta_\nu) , \qquad \theta_\rho = \varphi^{(1)}_{*\,\rho,\nu}(\theta_\nu) .$$

Alors,

$$g(\theta_\mu) = g \circ \varphi^{(1)}_{*\,\mu,\nu}(\theta_\nu) = g \circ \varphi^{(1)}_{*\,\mu,\nu}(\varphi^{(1)}_{*\,\nu,\rho}(\theta_\rho)) = g \circ (\varphi^{(1)}_{*\,\mu,\nu} \circ \varphi^{(1)}_{*\,\nu,\rho})(\theta_\rho) = g_\rho(\theta_\rho) .$$

Cas particulier : $\nu = \rho$.

D'autre part, comme $\varphi^{(1)}_{*\,\mu,\rho}$ est une bijection de $\check{\Theta}_\rho(\beta_\rho)$ sur $\check{\Theta}_\mu(\beta_\mu)$, compatible avec R_ρ et R_μ , l'extension canonique de $\varphi^{(1)}_{*\,\mu,\rho}$ aux ensembles produits $\check{\Theta}^2_\rho(\beta_\rho)$ et $\check{\Theta}^2_\mu(\beta_\mu)$ applique bijectivement $R_\rho \cap \check{\Theta}^2_\rho(\beta_\rho)$ sur $R_\mu \cap \check{\Theta}^2_\mu(\beta_\mu)$.

Si les éléments correspondants θ_ρ et θ_μ appartiennent respectivement à $pr_2(R_\rho \cap \check{\Theta}^2_\rho(\beta_\rho))$ et à $pr_2(R_\mu \cap \check{\Theta}^2_\mu(\beta_\mu))$, on désignera par E_{θ_ρ} (resp. E_{θ_μ}) l'ensemble des éléments $\theta^*_\rho \in \check{\Theta}_\rho(\beta_\rho)$ tels que $(\theta^*_\rho , \theta_\rho) \in R_\rho$ (resp. $\theta^*_\mu \in \check{\Theta}_\mu(\beta_\mu)$ tels que $(\theta^*_\mu , \theta_\mu) \in R_\mu$), conformément aux notations générales déjà introduites (E_γ = ensemble des $\gamma^* \in E$ tels que $(\gamma^* , \gamma) \in R$).

Puisque les ensembles E_{θ_ρ} et E_{θ_μ} se correspondent bijectivement, et puisque, dans la correspondance $\theta^*_\rho \longmapsto \theta^*_\mu$, $g_\rho(\theta^*_\rho) = g_\mu(\theta^*_\mu)$, il est manifeste que

$$\inf_{(\theta^*_\rho \in E_{\theta_\rho})} g_\rho(\theta^*_\rho) = \inf_{(\theta^*_\mu \in E_{\theta_\mu})} g_\mu(\theta^*_\mu) .$$

Posons

$$E^{(2)}_\lambda = pr_2(R_\lambda \cap \check{\Theta}^2_\lambda(\beta_\lambda)) \qquad (\lambda \in \Lambda) .$$

Le fait que $\varphi^{(1)}_{*\,\mu,\rho}$ transforme bijectivement $E^{(2)}_\rho$ en $E^{(2)}_\mu$, et l'égalité

$$\inf_{(\theta^*_\rho \in E_{\theta_\rho})} g_\rho(\theta^*_\rho) = \inf_{(\theta^*_\mu \in E_{\theta_\mu})} g_\mu(\theta^*_\mu) ,$$

démontrée ci-dessus, montrent que

$$\sup_{(\theta_\rho \in E_\rho^{(2)})} \ \inf_{(\theta_\rho^* \in E_{\theta_\rho})} g_\rho(\theta_\rho^*) = \sup_{(\theta_\mu \in E_\mu^{(2)})} \ \inf_{(\theta_\mu^* \in E_{\theta_\mu})} g_\mu(\theta_\mu^*) \ .$$

Donc,

$$g_\rho - \dim \beta_\rho = g_\mu - \dim \beta_\mu \ .$$

Ceci achève la démonstration de la première assertion de la proposition 3. Sa seconde assertion est conséquence de la première et du raisonnement général, très simple, suivant :

On considère une famille d'applications $(\sigma_\lambda : B_\lambda \to M \quad (\lambda \in \Lambda))$ telle que, quels que soient les éléments ρ et μ de Λ,

$$\sigma_\mu(\varphi_{\mu,\rho}^{(2)}(\beta_\rho)) = \sigma_\rho(\beta_\rho) \ , \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \sigma_\mu(\beta_\mu) = \sigma_\rho(\beta_\rho)$$

(puisque nous avons essentiellement supposé plus haut que $\beta_\mu = \varphi_{\mu,\rho}^{(2)}(\beta_\rho)$, quand β_μ et β_ρ étaient considérés comme des éléments correspondants dans l'isomorphisme $\varphi_{\mu,\rho}$). On considère ensuite un automorphisme f de Γ_ρ laissant invariante $\sigma_\rho(\beta_\rho)$; si donc $\beta'_\rho = f^{(2)}(\beta_\rho)$, on aura $\sigma_\rho(\beta'_\rho) = \sigma_\rho(\beta_\rho)$. L'automorphisme de Γ_μ, $\varphi_{\rho,\mu}^{-1} f \varphi_{\rho,\mu}$, transforme $\beta_\mu = \varphi_{\mu,\rho}^{(2)}(\beta_\rho)$ en l'élément

$$(\varphi_{\rho,\mu}^{(2)^{-1}} f^{(2)} \varphi_{\rho,\mu}^{(2)}) \circ \varphi_{\mu,\rho}^{(2)}(\beta_\rho) = \varphi_{\mu,\rho}^{(2)} \circ (f^{(2)}(\beta_\rho)) = \varphi_{\mu,\rho}^{(2)}(\beta_\mu) \ ,$$

que l'on désignera par β'_μ. On a, maintenant, les égalités

$$\sigma_\mu(\beta_\mu) = \sigma_\rho(\beta_\rho) \qquad \text{et} \qquad \sigma_\mu(\beta'_\mu) = \sigma_\rho(\beta'_\rho)$$

(en vertu de la première assertion de la proposition 3) d'une part, et

$$\sigma_\rho(\beta'_\rho) = \sigma_\rho(\beta_\rho)$$

(hypothèse de l'invariance par f) d'autre part ; donc, $\sigma_\mu(\beta'_\mu) = \sigma_\mu(\beta_\mu)$ et, par conséquent, l'automorphisme de Γ_μ, $\varphi_{\rho,\mu}^{-1} f \varphi_{\rho,\mu}$, laisse $\sigma_\mu(\beta_\mu)$ invariante.

L'application $\sigma_\lambda : B_\lambda \to M$, définie par $\sigma_\lambda(\beta_\lambda) = g_\lambda - \dim \beta_\lambda$, vérifie les hypothèses posées ; d'où la seconde assertion de la proposition 3. La troisième assertion est alors immédiate.

Remarque. - La démonstration précédente montre que la proposition 3 est un cas particulier d'une proposition plus générale ; on l'obtient en remplaçant

$$\sup_{(\theta_\lambda \in E_\lambda^{(2)})} \ \inf_{(\theta^* \in E_{\theta_\lambda})} g(\theta_\lambda^*)$$

par lui-même, ou par l'un quelconque des

$$\inf_{(\theta_\lambda \in E_\lambda^{(2)})} \sup_{(\theta_\lambda^* \in E_{\theta_\lambda})} g(\theta_\lambda^*) \;, \quad \inf_{(\theta_\lambda \in E_\lambda^{(2)})} \inf_{(\theta_\lambda^* \in E_{\theta_\lambda})} g(\theta_\lambda^*) \;, \quad \sup_{(\theta_\lambda \in E_\lambda^{(2)})} \sup_{(\theta_\lambda^* \in E_{\theta_\lambda})} g(\theta_\lambda^*) \;.$$

On pourrait penser à d'autres fonctions σ_λ .

III. Applications de la notion de g-dimension.

1. Dimension topologique ; définition de Lebesgue.

Suivant l'habitude, on appellera "ordre" d'un recouvrement fini d'un ensemble non vide, le plus grand entier n pour lequel existent n éléments de ce recouvrement ayant une intersection non vide.

Notation. - Si l'on désigne par θ ce recouvrement, on posera

$$\text{ord } \theta = \text{ordre de } \theta \;.$$

Soit S un espace topologique non vide. Soient A_1 (resp. A_2) = l'ensemble des ouverts (resp. fermés) de S ; $A = A_1 \cup A_2$; $T = \emptyset$; Θ_1 (resp. Θ_2) = l'ensemble des recouvrements ouverts (resp. fermés) finis de L ; $\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2$; $B = \{L\}$; $s((a_\iota)_{\iota \in I_\theta}) = \bigcup_{\iota \in I_\theta} a_\iota = L$.

Alors, $\beta \in B$ implique $\beta = L$, donc $\check{\Theta}(\beta) = \Theta$;

$$\Gamma = (A \;,\; \Theta \;,\; B \;,\; s) = (A_1 \cup A_2 \;,\; \Theta_1 \cup \Theta_2 \;,\; \{L\} \;,\; s) \;.$$

Prenons $M = \{-1\} \cup \underset{\sim}{N} \cup \{+\infty\}$, muni du prolongement évident de l'ordre naturel $(n < +\infty)$. On définira $g : \Theta \rightarrow M$ par la condition : Si $\text{ord } \theta = n$ ($\text{ord } \theta$ est nécessairement $< +\infty$, puisque le recouvrement θ est fini), $g(\theta) = n - 1$. On prendra pour R la relation : $(\theta^* , \theta) \in R$ si, et seulement si, $\theta^* \in \Theta_2$ et $\theta \in \Theta_1$, et le recouvrement θ^* est plus fin que le recouvrement θ . ("Plus fin" signifie, comme d'habitude, que tout élément de θ^* est contenu dans un élément de θ .)

Sous ces hypothèses, on posera la définition suivante.

DÉFINITION (D.4). - La g-dimension de S sera appelée "dimension de Lebesgue" de l'espace topologique S .

Justification : D'après la proposition 2, la lim sup $g(\theta^*)$ (c'est-à-dire la g-dimension de S) est égale à la borne inférieure des éléments $m \in M$ tels que, pour chaque m et pour chaque recouvrement ouvert θ de S, il existe un recouvrement fermé θ^* de S plus fin que θ et d'ordre $\leqslant m+1$. Or, quand S est <u>compact</u>, cette borne inférieure coïncide avec la <u>dimension topologique</u> de S, définie par Henri LEBESGUE ([1], p. 32-37).

Soient S et S' deux espaces topologiques homéomorphes, et considérons les sef respectives Γ et Γ'. Tout homéomorphisme

$$f^{(1)} : S \to S'$$

(resp. $\varphi^{(1)} : S' \to S$) induit un isomorphisme

$$f = (f^{(1)} , f^{(2)} : \{L\} \to \{L'\}) : \Gamma \to \Gamma'$$

(resp. $f' = (f'^{(1)} , f'^{(2)} : \{L'\} \to \{L\}) : \Gamma' \to \Gamma$), qu'on appellera aussi, pour abréger, "homéomorphisme" $\Gamma \to \Gamma'$ (resp. $\Gamma' \to \Gamma$). Si l'on prend alors pour $\overline{G}_0$ le groupe des homéomorphismes de Γ, on voit que la g-dimension de L est $\overline{G}_0$-invariante. D'autre part, si φ est un homéomorphisme $\Gamma' \to \Gamma$,

$$\overline{G}'_0 = \varphi^{-1}\, \overline{G}_0\, \varphi$$

est le groupe des homéomorphismes de Γ'. D'où :

<u>La dimension de Lebesgue d'un espace topologique est un invariant topologique</u>.

Ce qui, dans le cas des compacts, redonne un fait bien connu [1].

<u>Note</u> : Si l'on considérait le <u>complété de Kurepa</u> d'un ensemble totalement ordonné, on pourrait remplacer, dans M, $\{+\infty\}$ par $\{\aleph_0^-\}$, c'est-à-dire poser

$$M = \{-1\} \cup \underset{\sim}{N} \cup \{\aleph_0^-\} .$$

Comme ce complété, qui a été introduit par KUREPA et étudié par KRASNER, sera utilisé ci-dessous, nous rappelons sa définition dans le cas particulier des nombres cardinaux, qui nous intéresse ici. Soit m un nombre cardinal, et soit K l'ensemble totalement ordonné des cardinaux $\leqslant \overline{m}$. Si on laisse tels quels les cardinaux non limites, si l'on remplace chaque cardinal limite p par la paire p^-, p, et si l'on prolonge à l'ensemble ainsi obtenu l'ordre total de K $(p^- < p , \ldots)$, de façon évidente, on obtient le complété de Kurepa de K ; on désignera ce complété par $[0 , \overline{m}]$; on choisira $\overline{m}$ aussi grand qu'il faut. $[0 , \overline{m}]$ est manifestement bien ordonné.

2. Dimension de quasi-compacité.

Cette "dimension", introduite dans [12] pour une sef quelconque, est aussi une g-dimension. Pour le voir, rappelons la définition posée dans [12]. On a considéré une sef quelconque $\Gamma = (A , \Theta , B , s)$, avec les notations usuelles, et l'ordre suivant, noté $<$, sur Θ . Quand $T = \emptyset$ (resp. $\neq \emptyset$), pour tous θ^* , $\theta \in \Theta$, on a $\theta^* < \theta$ si, et seulement si, l'ensemble des a^*_ι est contenu dans l'ensemble des a_ι (resp. et si, de plus, $\tau^* = \tau$). Alors, on pose :

1° Si $\check{\Theta}(\beta) = \emptyset$, $\dim \beta = 0$ $(0 \in (0 , \overline{\overline{m}}))$;

2° Si $\check{\Theta}(\beta) \neq \emptyset$, $\dim \beta =$ la borne inférieure de l'ensemble Σ des éléments $\rho \in (0 , \overline{\overline{m}})$ tels que, pour tout $\theta \in \check{\Theta}(\beta)$, il existe $\theta^* \in \check{\Theta}(\beta)$ satisfaisant à $\theta^* < \theta$ et à $\overline{\overline{I}}_{\theta^*} \leqslant \rho$ (cette borne inférieure existe toujours, car $\Sigma \neq \emptyset$, puisque $\overline{\overline{m}}$ peut être choisi aussi grand que l'on veut, et $(0 , \overline{\overline{m}})$ est bien ordonné). $\dim \beta$ a été appelé dans [12] "dimension de quasi-compacité" de β , pour des raisons exposées là.

Le fait que l'application $B \to M$, définie par $\beta \longmapsto \dim \beta$, est une g-dimension est manifeste ; il suffit de prendre l'ordre $<$ pour relation R , l'ensemble $(0 , \overline{\overline{m}})$ pour M , et l'application $\Theta \to M$, définie par $\theta \longmapsto \overline{\overline{I}}_\theta$, pour application g , et d'utiliser la proposition 2.

Dans le cas particulier où Γ représente le treillis des ouverts d'un espace topologique, la g-dimension considérée est un invariant topologique.

Rappelons que, suivant [12], le théorème de Weierstrass, pour la préservation de la quasi-compacité par les surjections continues, prend la forme plus générale suivante :

Les surjections continues n'augmentent pas la dimension de quasi-compacité d'un espace topologique (c'est-à-dire, la dimension de l'espace-image est $\leqslant$ de la dimension de l'espace de départ).

3. Dimension "d'ascension" et dimension "de descente" d'un élément dans un ensemble ordonné.

Soit A un ensemble ordonné non vide quelconque, et soit a un élément donné de A . On appellera "chaîne ascendante (resp. descendante) de a dans A " tout ensemble totalement ordonné θ_1 (resp. θ_2) d'éléments de A tel que :

1° tous les éléments de θ_1 (resp. θ_2) sont distincts,

2° ils sont tous strictement plus grands (resp. petits) que a , 3° il n'existe pas de sous-ensemble totalement ordonné (dans l'ordre de A) de A satisfaisant aux deux conditions précédentes et étant un sur-ensemble propre de θ_1 (resp. θ_2).

De telles chaînes existent toujours puisque l'ensemble des ensembles ordonnés vérifiant les deux premières des trois conditions précitées étant inductif, on peut lui appliquer le lemme de Zorn. La terminologie utilisée généralise celle de [3] (p. 61-63).

On désignera par $\Theta_1(a)$ (resp. $\Theta_2(a)$) l'ensemble des chaînes ascendantes (resp. descendantes) de a dans A . Soit $\overline{m}$ un nombre cardinal assez grand, et considérons le complété de Kurepa $[0 , \overline{m}]$.

Considérons l'application

$$g_{1,a} : \Theta_1(a) \to [0 , \overline{m}] \qquad (\text{resp. } g_{2,a} : \Theta_2(a) \to [0 , \overline{m}]) ,$$

définie par $\theta_1 \longmapsto \overline{\overline{I}}_{\theta_1}$ (resp. $\theta_2 \longmapsto \overline{\overline{I}}_{\theta_2}$). Posons maintenant :

$$\Theta = \bigcup_{a \in A} \Theta_1(a) \qquad (\text{resp. } \Theta = \bigcup_{a \in A} \Theta_2(a)) ,$$

et définissons l'application $g : \Theta \to M$ par $g(\theta_1(a)) = g_{1,a}(\theta_1(a))$ (resp. $g(\theta_2(a)) = g_{2,a}(\theta_2(a))$), quel que soit $a \in A$.

Alors, pour chaque $a \in A$,

$$\sup_{(\theta_1(a) \in \Theta_1(a))} g(\theta_1(a)) \qquad (\text{resp. } \sup_{(\theta_2(a) \in \Theta_2(a))} g(\theta_2(a)))$$

est un élément de $[0 , \overline{m}]$, qui sera appelé "dimension d'ascension" (resp. de descente) de a dans A . Définition évidente de l'application de même nom. On peut mettre cette application sous la forme d'une g-dimension, de la manière suivante : On considèrera $\Gamma = (A , \Theta , B , s)$, où A et Θ sont définis comme ci-dessus, $B = A$, $T = \emptyset$, et $s : \Theta \to B$ est définie par $s(\theta_1(a)) = a$; R = la relation $\theta_1^*(a) \subseteq \theta_1(a)$ $(\theta_1^*(a) , \theta_1(a) \in \Theta_1(a))$, ce qui implique ici $\theta_1^*(a) = \theta_1(a)$, donc que R soit la diagonale de Θ^2 ; $M = [0 , \overline{m}]$, et g est définie comme ci-dessus. Alors, pour chaque $\theta_1(a)$,

$$\inf_{(\theta_1^*(a) \in E_{\theta_1(a)})} g(\theta_1^*(a)) = g(\theta_1(a)) \qquad (\text{puisque } E_{\theta_1(a)} = \{\theta_1(a)\}) ,$$

donc

$$g - \dim a = \sup_{(\theta_1(a) \in \Theta_1(a))} g(\theta_1(a)) = \text{dimension d'ascension de } a \ .$$

On démontrerait de la même manière le résultat analogue pour la dimension de descente.

Note : Dans le cas où la dimension de descente de a est un nombre fini n , a possède la "dimension" ou "hauteur" $n + 1$ dans la terminologie de Garrett BIRKHOFF ([2], p. 11 et p. 66-68).

Remarques.

1° On peut étendre, sans difficulté, l'addition des cardinaux aux éléments de $[0 , \overline{m}]$. Si p et q sont des cardinaux infinis appartenant à $[0 , \overline{m}]$, on posera :

Si $p = q$, $p^- + q = q + p^- = q$ (donc aussi $p + q^- = q^- + p = p$; $p = q$) et

$$p^- + q^- = q^- + p^- = p^- \qquad \text{(donc aussi } = q^- \text{)} \ ;$$

Si $p < q$, $p^- + q = q + p^- = q$, $p + q^- = q^- + p = q^-$ et

$$p^- + q^- = q^- + p^- = q^- \ .$$

Si p est fini et si q est un cardinal infini appartenant à $[0 , \overline{m}]$, on posera

$$p + q^- = q^- + p = q^- \ .$$

2° Ces conventions et les définitions précédentes entraînent la proposition :

Si l'ensemble ordonné A possède un élément minimum 0 (resp. maximum X), on a, pour tout $a \in A$, l'inégalité (entre éléments de $[0 , \overline{m}]$) :

$$\text{d-asc } a + \text{d-desc } a \leqslant \text{d-asc } 0 \qquad (\text{resp. d-desc } X) \ .$$

On a utilisé les abréviations :

$$\begin{cases} \text{d-asc } a = \text{dimension d'ascension de } a \\ \text{d-desc } a = \text{dimension de descente de } a \ . \end{cases}$$

3° Dans le cas particulier où A est un treillis modulaire, et où toute chaîne (ascendante ou descendante) entre deux éléments quelconques de A est finie, on a, pour toute paire a , b d'éléments de A , l'égalité :

$$\text{d-desc } a + \text{d-desc } b = \text{d-desc } \sup\{a , b\} + \text{d-desc } \inf\{a , b\} \ .$$

En effet, puisque cette égalité est vraie, sous ces hypothèses, pour la "dimension" (= "hauteur") de Birkhoff [2], elle le reste quand on diminue cette dimension de 1 , c'est-à-dire quand on l'applique à la d-desc .

4. Dimension et rang d'un idéal premier dans un anneau commutatif.

Plaçons-nous, par exemple, dans les hypothèses classiques, considérées dans NORTHCOTT ([6], p. 57 et 63) ; l'anneau considéré est commutatif et possède un élément unité.

On désignera par A l'ensemble des idéaux premiers de l'anneau considéré ; ordonné par l'inclusion ensembliste, A est un treillis. Si l'on applique à A les considérations du numéro précédent, et si on les compare avec les définitions de dimension et de rang de [6], convenablement généralisées à $(0 , \bar{m})$, on voit que, pour tout idéal premier a , on a

$$\text{d-asc } a = \text{dimension de } a \ ,$$

$$\text{d-desc } a = \text{rang de } a \ .$$

Remarque. - Dans le cas où l'anneau considéré est local, on appelle [6] "dimension" de cet anneau la d-asc de l'idéal (0) . L'inégalité de la remarque 2° du numéro précédent redonne alors, pour tout idéal premier p , l'inégalité classique

$$\dim p + \text{rang } p \leqslant \dim (0) \quad [6] \ .$$

5. Dimension linéaire d'un espace vectoriel.

On désignera par A l'ensemble des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel considéré ; ordonné par l'inclusion ensembliste, A est un treillis. Si l'on applique à A les considérations du numéro 3, on voit que, pour tout élément a de A , on a

$$\text{d-desc } a = \text{dimension linéaire de } a \ .$$

Remarque. - Le cas des espaces vectoriels est un cas où l'inégalité de la remarque 2° du numéro 3 devient une égalité.

Une autre manière de mettre la dimension linéaire d'un espace vectoriel sous la forme d'une g-dimension est la suivante : Soient A = espace vectoriel ; $T = \emptyset$; Θ = l'ensemble de toutes les familles non vides d'éléments de A ; B = l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de A ; $s((a_\iota)_{\iota \in I_\theta}) = Va_\iota \quad (\iota \in I_\theta)$, où Va_ι est le sous-espace vectoriel de A engendré par $(a_\iota)_{\iota \in I_\theta}$. $\Gamma = (A , \Theta , B , s)$.

Soient R = l'ordre $<$, défini par $(a_\iota^*) < (a_\iota)$ si, et seulement si, l'ensemble des a_ι^* est contenu dans l'ensemble des a_ι ; M = le segment des nombres cardinaux $\leqslant \overline{m}$, où $\overline{m}$ est un nombre cardinal suffisamment grand ; $g(\theta) = \overline{\overline{I}}_\theta$. On peut alors appliquer la définition (D.3). Or, pour chaque $\theta \in \check{\Theta}(\beta)$, $\mu_\theta = \inf\limits_{(\theta^* \in E_\theta)} g(\theta^*)$ (qui existe puisque M est bien ordonné) est la dimension linéaire de β . Donc, si β étant fixe θ décrit $\Theta(\beta)$, μ_θ reste constant et, par conséquent,

$$\sup_{\theta \in \Theta(\beta)} \mu_\theta = \mu_\theta = \text{Cte} , \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \lim_{(\theta \in \Theta(\beta))} \inf_{(\theta^* \in E_\theta)} g(\theta^*) = \text{Cte} .$$

Donc, la g-dimension de β coïncide avec la dimension linéaire de β .

Conséquences évidentes :

1° L'invariance de cette dimension par les automorphismes et les isomorphismes surjectifs d'espace vectoriel ;

2° Cette démonstration entraîne que la dimension linéaire soit toujours un nombre cardinal.

6. Dimension algébrique.

Ici, corps = corps commutatif. Soient A_0 = corps ; A = surcorps de A_0 ; $T = \emptyset$; Θ = l'ensemble des familles non vides d'éléments de A ; B = l'ensemble des surcorps de A_0 contenus dans A ; $s(\theta)$ = la plus grande extension algébrique de $A_0(\theta)$ contenue dans A . $\Gamma = (A , \Theta , B , s)$.

Soient M , le même que dans le numéro 5 ; $g(\theta) = \overline{\overline{T}}_\theta$; R = la relation $(\theta^* , \theta) \in R$ si, et seulement si, $\theta^* < \theta$ (comme dans le n° 5), et θ^* est algébriquement libre sur A_0 . Alors, les mêmes remarques que dans le n° 5 montrent que la g-dimension de A coïncide avec la dimension algébrique de A .

Conséquence évidente : L'invariance de cette g-dimension par les A_0-automorphismes, etc.

7. Dimension d'une variété algébrique (d'après CHEVALLEY).

Dans ses Fondements de la géométrie algébrique ([4], p. 97), CHEVALLEY appelle "dimension" d'une variété U , la dimension algébrique du corps F_U (des fonctions numériques sur U) sur le corps de base K . On se ramène donc au n° 6.

8. Intégrale supérieure (resp. inférieure) de Darboux.

Soient $A = [c\ ,\ d] \subset \underset{\sim}{R}$; Θ = l'ensemble des familles non vides d'éléments de A ; on suppose que chacune d'elles contient c et d ; $B = \Theta$; $s(\theta) = \theta$. $\Gamma = (A\ ,\ \Theta\ ,\ B\ ,\ s)$. Soient $M = \underset{\sim}{R}$; R = l'ordre opposé à l'ordre $<$ (considéré dans 5 et 6) sur Θ . Considérons maintenant une fonction bornée $\sigma : [c\ ,d] \to \underset{\sim}{R}$, et désignons par $g(\theta)$ la valeur de la somme $\sum (a_{\iota+1} - a_\iota)M_\iota$, où M_ι est la borne supérieure de σ sur $[a_\iota\ ,\ a_{\iota+1}]$ et $\theta = (a_\iota)$. Le théorème de Darboux affirme alors que

$$\mu_\theta = \inf_{(\theta^* \in E_\theta)} g(\theta^*)$$

est une fonction constante de $\theta \in \Theta$; sa valeur est donc égale à

$$\lim_{(\theta\in\Theta)} \ \inf_{(\theta^*\in E_\theta)} g(\theta^*) \ .$$

Par conséquent, l'intégrale supérieure de Darboux est une g-dimension.

L'intégrale inférieure de Darboux est donnée par

$$\lim_{(\theta\in\Theta)} \ \sup_{(\theta^*\in E_\theta)} g(\theta^*) \ , \qquad \text{où } g(\theta) = \sum (a_{\iota+1} - a_\iota)\mu_\iota \ ,$$

μ_ι étant la borne inférieure de σ sur $[a_\iota\ ,\ a_{\iota+1}]$. Si l'on munit $\underset{\sim}{R}$ de l'ordre opposé à son ordre usuel, on a une lim inf à la place de la lim sup cité ci-dessus ; par conséquent, l'intégrale inférieure de Darboux peut elle aussi être mise sous la forme d'une g-dimension.

Remarques.

1° Au fond, c'est l'élargissement de la définition de limite inférieure (définition (D.1)), qui a permis d'englober dans une même notion générale, la notion classique ([5], p. 14-16) de limite inférieure suivant un ordre filtrant et diverses notions classiques de dimension. Ainsi, on doit plutôt dire que ces dimensions ont été mises sous forme de lim inf .

2° On peut également mettre sous la forme d'une lim inf (d'une g-dimension) :

(a) l'intégrale de Lebesgue d'une fonction réelle bornée d'une variable réelle (exposée, par exemple, dans [8], p. 133-134),

(b) la dimension de Hausdorff d'une partie compacte de la droite réelle $\underset{\sim}{R}$ ([7], p. 26-27).

Un résumé de certains résultats du présent exposé a paru dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris [13]. L'exposé actuel est une étape plus développée du travail commencé dans [12] et [13], et contient certaines définitions, remarques et résultats nouveaux.

Appendice : Définition des sef .

Terminologie.

Indice = paramètre ; des ensembles non vides quelconques peuvent être appelés "ensembles d'indices".

Si $\emptyset \subset A_1 \subseteq A$, $\emptyset \subset A'_1 \subseteq A'$ et $f : A \to A'$, application telle que

$$f(A_1) \subseteq A'_1 \quad ;$$

l'application $g : A_1 \to A'_1$, telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$, sera appelée "restriction de f à (A_1 , A'_1) " et sera aussi notée f .

DÉFINITION 1. - On appellera "structures fonctionnelles élémentaires" ou " sef " les quadruples ordonnés (A , Θ , B , s) vérifiant les hypothèses suivantes : A et B sont des ensembles non vides ; T est un ensemble éventuellement vide ; H est un ensemble non vide de familles non vides d'éléments de A ; si $T = \emptyset$, $\Theta = H$; si $T \neq \emptyset$, Θ est une partie non vide de $T \times H$; dans tous les cas, s est une application $\Theta \to B$.

Notations. - L'élément général de Θ (resp. B) sera désigné par θ (resp. b) ; on désignera par I_θ un ensemble qui ne dépend que de θ ; l'élément général de A sera désigné par a ou, si on le considère par rapport à Θ , par a_{θ_ι} ; si $T = \emptyset$, on a $\Theta = H$, donc θ est une famille d'éléments de A , qu'on désignera par $(a_{\theta_\iota})_{\iota \in I_\theta}$; si $T \neq \emptyset$, on a $\Theta \subseteq T \times H$, donc θ peut alors être écrit comme un couple $(\tau ; (a_{\theta_\iota})_{\iota \in I_\theta})$, où $\tau \in T$ et $(a_{\theta_\iota})_{\iota \in I_\theta} \in H$; notation abrégée :

$$(a_\iota)_{\iota \in I_\theta} = (a_{\theta_\iota})_{\iota \in I_\theta} \quad ; \qquad I = \bigcup_{\theta \in \Theta} \{I_\theta\} \quad .$$

Il est souvent utile de changer, de façon biunivoque, les noms de certains indices ι .

Considérons deux sef , Γ et Γ' telles que $I \subseteq I'$ et $\emptyset = T = T'$, respectivement $(\emptyset \subset T \subseteq T')$. Soit $f^{(1)}$ une application $A \to A'$, et faisons correspondre à chaque $\theta = (a_\iota)_{\iota\in I_\theta}$ (resp. $\theta = (\tau\ ;\ (a_\iota)_{\iota\in I_\theta})$) la famille

$$(f^{(1)}(a_\iota))_{\iota\in I_\theta}$$

(resp. le couple $(\tau\ ;\ (f^{(1)}(a_\iota))_{\iota\in I_\theta})$), qui sera notée (resp. noté) $f_*^{(1)}(\theta)$. S'il arrive que, pour tout $\theta \in \Theta$, $f_*^{(1)}(\theta) \in \Theta'$, la correspondance

$$\theta \longmapsto f_*^{(1)}(\theta)$$

définit une application $\Theta \to \Theta'$; dans ce cas, on dira que " $f^{(1)}$ induit une application $\Theta \to \Theta'$ ", notée $f_*^{(1)}$.

DÉFINITION 2. - Etant données deux sef , Γ et Γ' , telles que $I \subseteq I'$ et $\emptyset = T = T'$ (resp. $\emptyset \subset T \subseteq T'$), on appellera "application $\Gamma \to \Gamma'$ " tout couple $(f^{(1)}, f^{(2)})$ d'applications $f^{(1)} : A \to A'$ et $f^{(2)} : B \to B'$ telles que $f^{(1)}$ induise une application $\Theta \to \Theta'$.

Notation : $f = (f^{(1)}, f^{(2)})$.

Une application $f : \Gamma \to \Gamma'$ sera appelée "bijective" si $f^{(1)}$, $f_*^{(1)}$ et $f^{(2)}$ sont toutes les trois bijectives.

DÉFINITION 3. - Une application $f : \Gamma \to \Gamma'$ sera appelée "homomorphisme" si, pour tout $\theta \in \Theta$, $f^{(2)}(s(\theta)) = s'(f_*^{(1)}(\theta))$.

Tout homomorphisme bijectif sera appelé "isomorphisme" et, si Γ' et Γ coïncident, "automorphisme".

Pour les définitions et les remarques associées ainsi que pour certains développements supplémentaires, voir [10].

Plaçons-nous dans une sef , $\Gamma = (A\ ,\ \Theta\ ,\ B\ ,\ s)$, et, pour un élément donné $\beta \in B$, considérons l'équation $s(x) = \beta$. L'ensemble (éventuellement vide) des solutions de cette équation sera désigné par $\check{\Theta}(\beta)$. Certaines propriétés de telles équations ont été étudiées dans [11] et [12].

DÉFINITION 4. - Λ étant un ensemble d'indices, toute famille $(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de sef sera appelée "structure fonctionnelle" (voir [10]). Aux notations près, toute sef peut être considérée comme une structure fonctionnelle.

L'introduction des notions de sef , de structure fonctionnelle et d'homomorphisme entre sef (resp. structures fonctionnelles), se justifie par le fait que la plupart des couples particuliers "structure - morphisme", que BOURBAKI étudie, ainsi que le couple "catégorie - foncteur covariant" peuvent essentiellement être mis sous la forme de couples "structure fonctionnelle - homomorphisme".

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALEKSANDROV (P. S.). - Combinatorial topology, Vol. 1. - Rochester, Graylock Press, 1956.

[2] BIRKHOFF (Garrett). - Lattice theory. Revised edition. - New York, American mathematical Society, 1948 (American mathematical Society. Colloquium Publications, 25).

[3] CHÂTELET (Albert). - Arithmétique et algèbre modernes. Vol. 1. - Paris, Presses Universitaires de France, 1954 ("Euclide", 1re section : Mathématiques et Astronomie).

[4] CHEVALLEY (Claude). - Fondements de la géométrie algébrique. - Paris, Secrétariat mathématique, 1958.

[5] McSHANE (E. J.). - Order-preserving maps and integration processes. - Princeton, Princeton University Press, 1953 (Annals of Mathematics Studies, 31).

[6] NORTHCOTT (D. G.). - Ideal theory. - Cambridge, at the University Press, 1953 (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics, 42).

[7] SALEM (R.) et KAHANE (J.-P.). - Ensembles parfaits et séries trigonométriques. - Paris, Hermann, 1963 (Act. scient. et ind., 1301).

[8] VALIRON (Georges). - Théorie des fonctions. 2e édition. - Paris, Masson, 1948.

[9] ZERVOS (Panayiotis). - Calcul infinitésimal [en grec]. - Athènes, 1929.

[10] ZERVOS (Spiros P.). - Structures fonctionnelles et homomorphismes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260, 1965, p. 3809-3812.

[11] ZERVOS (Spiros P.). - Une généralisation du théorème de Bolzano pour la connexité, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260, 1965, p. 5979-5982.

[12] ZERVOS (Spiros P.). - Une généralisation abstraite du théorème topologique de Weierstrass pour la préservation de la quasi-compacité. Une notion de dimension de quasi-compacité, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260, 1965, p. 6781-6784.

[13] ZERVOS (Spiros P.). - Une notion abstraite de dimension, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 261, 1965, p. 859-862.