

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

JEAN CHAUVINEAU

***C*-équirépartition modulo 1 en *p*-adique**

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 7, n° 1 (1965-1966),
exp. n° 2, p. 1-21

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1965-1966__7_1_A1_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1965-1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

C-ÉQUIRÉPARTITION MODULO 1 EN p-ADIQUE

par Jean CHAUVINEAU

1. Notations.

$\underline{\mathbb{N}}, \underline{\mathbb{Z}}, \underline{\mathbb{Q}}, \underline{\mathbb{R}}, \underline{\mathbb{C}}$ sont les ensembles numériques couramment désignés par ces lettres ($0 \notin \underline{\mathbb{N}}, \underline{\mathbb{Z}}^+ = \underline{\mathbb{N}} \cup \{0\}$) ; $\underline{\mathbb{T}}$ désigne le cercle unité. p est un nombre premier. $\underline{r}_p^{(h)}$, où $h \in \underline{\mathbb{N}}$, désigne l'ensemble des rationnels de $]0, 1[$ qui, après réduction, ont pour dénominateur p^h ; on pose

$$\underline{r}_p^{(0)} = \{0\}, \quad \underline{r}_p^k = \bigcup_{0 \leq h \leq k} \underline{r}_p^{(h)} \quad \text{pour tout } k \in \underline{\mathbb{Z}}^+, \quad \underline{r}_p = \bigcup_{h \geq 0} \underline{r}_p^{(h)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{r}_p^k.$$

$\underline{\mathbb{Q}}_p, \underline{\mathbb{Z}}_p, \underline{\mathbb{U}}_p$ désignent respectivement le corps des nombres p -adiques, l'anneau des entiers de $\underline{\mathbb{Q}}_p$, le groupe des unités de $\underline{\mathbb{Q}}_p$, et μ désigne la mesure de Haar sur $\underline{\mathbb{Q}}_p$ normalisée sur $\underline{\mathbb{Z}}_p$. Si $E \subset \underline{\mathbb{C}}$, on pose

$$E^* = \underline{\mathbb{C}}_E \setminus \{0\} = E - \{0\} \quad (E \subset \underline{\mathbb{C}} \text{ ou } E \subset \underline{\mathbb{Q}}_p).$$

Si $x \in \underline{\mathbb{Q}}_p^*$, sa valuation p -adique est notée $v(x)$, où l'indice p est sous-entendu. ψ_E est la fonction caractéristique de E ($E \subset \underline{\mathbb{C}}$ ou $E \subset \underline{\mathbb{Q}}_p$). Enfin $\text{Isom}(E, F)$ désigne la classe des applications isométriques de $E \subset \underline{\mathbb{Q}}_p$ dans $F \subset \underline{\mathbb{Q}}_p$.

\underline{r}_p est un système de représentants du groupe additif $\underline{\mathbb{Q}}_p / \underline{\mathbb{Z}}_p$ des p -adiques modulo 1. Tout $x \in \underline{\mathbb{Q}}_p$ admet une décomposition unique

$$x = [x]_p + \langle x \rangle_p \quad \text{où } [x]_p \in \underline{\mathbb{Z}}_p, \quad \langle x \rangle_p \in \underline{r}_p;$$

$[x]_p, \langle x \rangle_p$ sont dits respectivement partie entière, partie principale de x . On a, pour x_1, x_2, y dans $\underline{\mathbb{Q}}_p$:

$$\langle (x_1 + x_2)y \rangle_p \equiv \langle x_1 y \rangle_p + \langle x_2 y \rangle_p \pmod{1},$$

et $x \longmapsto \langle xy \rangle_p$, où $y \in \underline{\mathbb{Q}}_p$, est un homomorphisme continu du groupe additif $\underline{\mathbb{Q}}_p$ dans le groupe additif $\underline{\mathbb{T}} = \underline{\mathbb{R}} / \underline{\mathbb{Z}}$ des réels modulo 1 ; de plus

$$(x_1 - x_2)y \in \underline{\mathbb{Z}}_p \implies \langle x_1 y \rangle_p = \langle x_2 y \rangle_p \quad \text{pour } x_1, x_2, y \in \underline{\mathbb{Q}}_p$$

et

$$\langle xy \rangle_p = \langle x \langle y \rangle_p \rangle_p \quad \text{pour } x \in \underline{\mathbb{Z}}_p, \quad y \in \underline{\mathbb{Q}}_p.$$

On pose, pour tout $x \in \underline{\mathbb{R}}$:

$$e(x) = \exp 2i\pi x ,$$

et, pour tout $x \in \underline{\mathbb{Q}}_p$:

$$e_p(x) = \exp 2i\pi \langle x \rangle_p ,$$

de sorte que $e_p(x) = e(x)$ pour tout $x \in \underline{\mathbb{r}}_p + \underline{\mathbb{Z}}$.

2. Définition.

Soit Δ une partie μ -mesurable de $\underline{\mathbb{Q}}_p$ telle que $\mu(\Delta) > 0$, et soit F une application μ -mesurable de Δ dans $\underline{\mathbb{Q}}_p$, de sorte que l'ensemble

$$\{x \in \Delta \mid F(x) \in \alpha + p^k \underline{\mathbb{Z}}_p\}$$

est μ -mesurable quels que soient $\alpha \in \underline{\mathbb{Q}}_p$, $k \in \underline{\mathbb{Z}}$. Pour tout $T \in \underline{\mathbb{Z}}$, on pose

$$\Delta_T = \Delta \cap p^{-T} \underline{\mathbb{Z}}_p ,$$

et, pour tout couple réel (a, b) tel que $0 \leq a < b \leq 1$:

$$(T, a, b)_F^\Delta = \mu(\{x \in \Delta_T \mid a \leq \langle F(x) \rangle_p < b\}) ,$$

de sorte que

$$(T, a, b)_F^\Delta = \sum_{\substack{r \in \underline{\mathbb{r}}_p \\ a \leq r < b}} \mu(\{x \in \Delta_T \mid F(x) \in r + \underline{\mathbb{Z}}_p\}) .$$

La fonction F est dite C-équirépartie (mod 1) [C-e. r. (mod 1)] si et seulement si, pour tout couple réel (a, b) tel que $0 \leq a < b \leq 1$, on a

$$(1) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(T, a, b)_F^\Delta}{\mu(\Delta_T)} = b - a$$

Cette définition n'est effective que si $\mu(\Delta) = \infty$. En effet, si $0 < \mu(\Delta) < \infty$, alors (1) exige que l'on ait, pour tout $x \in \underline{\mathbb{r}}_p$ et pour tout $\alpha \in]0, 1 - r[$:

$$\mu(\{x \in \Delta \mid r \leq \langle F(x) \rangle_p < r + \alpha\}) = \alpha \mu(\Delta) ,$$

d'où, quand $0 < \alpha \rightarrow 0$:

$$m(r) = \mu(\{x \in \Delta \mid \langle F(x) \rangle_p = r\}) = 0 ,$$

où $m(r)$ désigne la masse de répartition (mod 1) de F au point r , en contradiction avec $\sum_{r \in \underline{\mathbb{r}}_p} m(r) = \mu(\Delta) > 0$.

Si $\Delta = \underline{\mathbb{Q}}_p$, d'où $\Delta_T = p^{-T} \underline{\mathbb{Z}}_p$, l'indice supérieur $\underline{\mathbb{Q}}_p$ sera sous-entendu dans

la notation $(T, a, b)_F$, et la définition (1) s'écrira

$$(1') \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(T, a, b)_F}{p^T} = b - a \quad .$$

Rappelons que tout ouvert Δ de \mathbb{Q}_p , c'est-à-dire toute réunion, finie ou infinie, de boules ouvertes de \mathbb{Q}_p , est μ -mesurable, avec $\mu(\Delta) > 0$, et que toute fonction F continue sur un ouvert Δ de \mathbb{Q}_p est μ -mesurable sur Δ . La définition (1) intéresse donc notamment toute fonction F continue sur un ouvert Δ de \mathbb{Q}_p .

3. Critères de C-équirépartition (mod 1).

3.1. - Soit $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ la classe des fonctions à valeurs complexes continues sur \mathbb{T} .

THÉORÈME 1. - Pour que F , μ -mesurable sur une partie μ -mesurable Δ de \mathbb{Q}_p telle que $\mu(\Delta) > 0$, soit C-e. r. (mod 1), il faut et il suffit que, pour toute $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$, on ait

$$(2) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} f(\langle F(x) \rangle_p) dx = \int_0^1 f(t) dt \quad .$$

Dans les conditions précisées, l'intégrale de Haar qui figure au premier membre existe ; en effet, d'une part Δ_T est borné et μ -mesurable, d'autre part l'application $f \circ \langle F \rangle_p$ de Δ_T dans $f(\mathbb{r}_p) \subset \mathbb{C}$ est bornée sur Δ_T , puisque f est bornée sur \mathbb{T} , et elle est aussi μ -mesurable sur Δ_T , car, si $\alpha \in f(\mathbb{r}_p)$ et si l'on pose $f^{-1}(\alpha) = \{r \in \mathbb{r}_p \mid f(r) = \alpha\}$, on a

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in \Delta_T \mid f(\langle F(x) \rangle_p) = \alpha\}) &= \mu(\{x \in \Delta_T \mid F(x) \in f^{-1}(\alpha) + \mathbb{Z}_p\}) \\ &= \sum_{r \in f^{-1}(\alpha)} \mu(\{x \in \Delta_T \mid F(x) \in r + \mathbb{Z}_p\}) \quad . \end{aligned}$$

Le procédé de Lebesgue fournit alors l'intégrale de Haar.

Il suffit d'établir le théorème pour les $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$.

Nécessité. - Partageons $[0, 1[$ en n intervalles égaux $[a_k, b_k[$, $k = 1, 2, \dots, n$, et soit M_k [resp. m_k] la borne supérieure [resp. inférieure] de f sur $[a_k, b_k[$. On a, pour tout $x \in \Delta_T$:

$$\sum_{1 \leq k \leq n} m_k \psi_{[a_k, b_k[}(\langle F(x) \rangle_p) \leq f(\langle F(x) \rangle_p) \leq \sum_{1 \leq k \leq n} M_k \psi_{[a_k, b_k[}(\langle F(x) \rangle_p) \quad .$$

Divisons par $\mu(\Delta_T)$ et intégrons sur Δ_T , en remarquant que

$$\int_{\Delta_T} \psi_{\{a_k, b_k\}}(\langle F(x) \rangle_p) dx = (T, a_k, b_k)_{\mathbb{F}}^{\Delta} ;$$

il vient :

$$\sum_{1 \leq k \leq n} m_k \frac{(T, a_k, b_k)_{\mathbb{F}}^{\Delta}}{\mu(\Delta_T)} \leq \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} f(\langle F(x) \rangle_p) dx \leq \sum_{1 \leq k \leq n} M_k \frac{(T, a_k, b_k)_{\mathbb{F}}^{\Delta}}{\mu(\Delta_T)} .$$

Quand $T \rightarrow \infty$, le 1er et le 3e membre tendent respectivement vers $\sum_{1 \leq k \leq n} m_k (b_k - a_k)$ et $\sum_{1 \leq k \leq n} M_k (b_k - a_k)$, et ces sommes, quand $n \rightarrow \infty$, tendent l'une et l'autre vers $\int_0^1 f(t) dt$; il en résulte qu'on a (2).

Suffisance. - Soit $0 \leq a \leq b \leq 1$; il existe deux suites de fonctions ℓ_k, L_k de $\mathcal{C}(\underline{T}, \mathbb{R})$ qui encadrent $\psi_{\{a, b\}}$ sur \underline{T} et dont les intégrales sur \underline{T} tendent l'une et l'autre vers $\int_0^1 \psi_{\{a, b\}}(t) dt = b - a$ quand $k \rightarrow \infty$. On a, pour tout $x \in \Delta_T$:

$$\ell_k(\langle F(x) \rangle_p) \leq \psi_{\{a, b\}}(\langle F(x) \rangle_p) \leq L_k(\langle F(x) \rangle_p) .$$

Divisons par $\mu(\Delta_T)$ et intégrons sur Δ_T ; il vient :

$$\frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} \ell_k(\langle F(x) \rangle_p) dx \leq \frac{(T, a, b)_{\mathbb{F}}^{\Delta}}{\mu(\Delta_T)} \leq \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} L_k(\langle F(x) \rangle_p) dx .$$

Quand $T \rightarrow \infty$, le 1er et le 3e membre tendent respectivement vers $\int_0^1 \ell_k(t) dt$ et $\int_0^1 L_k(t) dt$, et ces intégrales, quand $k \rightarrow \infty$, tendent l'une et l'autre vers $b - a$; il en résulte qu'on a (1).

3.2. - On en déduit un critère de Weyl :

THÉOREME 2. - Pour que F , μ -mesurable sur une partie μ -mesurable Δ de \mathbb{Q}_p telle que $\mu(\Delta) > 0$, soit C-e. r. (mod 1), il faut et il suffit que, pour tout $h \in \mathbb{N}$, on ait

$$(3) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} e_p(hF(x)) dx = 0 .$$

Nécessité. - Prenant $f(t) = e(ht)$, où $h \in \mathbb{Z}^*$, la condition (2) donne (3), puisque

$$e(h\langle F(x) \rangle_p) = e_p(hF(x)) \quad \text{et} \quad \int_0^1 e(ht) dt = \left[\frac{e(ht)}{2i\pi h} \right]_0^1 = 0 .$$

Suffisance. - $\mathcal{C}(\underline{T}, \underline{\mathbb{C}})$ est un espace vectoriel sur le corps $\underline{\mathbb{C}}$, que nous munissons de la norme de la convergence uniforme $\|f\| = \sup_{t \in \underline{T}} |f(t)|$. Soit $\mathcal{C}(\underline{T})$ l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques, c'est-à-dire des combinaisons linéaires à coefficients complexes des fonctions $t \mapsto e(ht)$, où $h \in \underline{\mathbb{Z}}$. On sait que $\mathcal{C}(\underline{T})$ est un sous-espace de $\mathcal{C}(\underline{T}, \underline{\mathbb{C}})$ partout dense dans $\mathcal{C}(\underline{T}, \underline{\mathbb{C}})$.

Soit $f \in \mathcal{C}(\underline{T}, \underline{\mathbb{C}})$; il existe une suite de fonctions $f_k \in \mathcal{C}(\underline{T})$, soit

$$f_k(t) = \sum_{-H \leq h \leq H} \gamma_h e(ht),$$

qui converge uniformément vers f sur \underline{T} quand $k \rightarrow \infty$. On a

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} f_k(\langle F(x) \rangle_p) dx = \sum_{-H \leq h \leq H} \gamma_h \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} e_p(hF(x)) dx = \gamma_0,$$

et d'autre part

$$\int_0^1 f_k(t) dt = \sum_{-H \leq h \leq H} \gamma_h \int_0^1 e(ht) dt = \gamma_0,$$

de sorte que f_k vérifie la condition (2).

Soit $\varepsilon > 0$; il existe un entier K_ε tel que, pour $k > K_\varepsilon$, on ait

$$f_k(\langle F(x) \rangle_p) - \varepsilon < f(\langle F(x) \rangle_p) < f_k(\langle F(x) \rangle_p) + \varepsilon \quad \text{pour tout } x \in \Delta_T.$$

Divisant par $\mu(\Delta_T)$, et intégrant sur Δ_T , il vient

$$\frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} f_k(\langle F(x) \rangle_p) dx - \varepsilon \leq \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} f(\langle F(x) \rangle_p) dx \leq \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} f_k(\langle F(x) \rangle_p) dx + \varepsilon.$$

Quand $T \rightarrow \infty$, le 1er membre et le 3e membre tendent respectivement vers

$$\int_0^1 f_k(t) dt - \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_0^1 f_k(t) dt + \varepsilon,$$

et ces quantités, quand $k \rightarrow \infty$, tendent respectivement vers

$$\int_0^1 f(t) dt - \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_0^1 f(t) dt + \varepsilon;$$

puisque $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, il en résulte que f vérifie la condition (2). Dès lors, la suffisance de (2) entraîne celle de (3).

Si $\Delta = \underline{\mathbb{Q}}_p$, la condition (3) s'écrit

$$(3') \quad \lim_{T \rightarrow \infty} p^{-T} \int_{p^{-T} \underline{\mathbb{Z}}_p} e_p(hF(x)) dx = 0.$$

On remarquera que, si $\mu(\Delta) < \infty$, on sait que la condition

$$\int_{\Delta} e_p(hF(x)) dx = 0 \quad \text{pour tout } h \in \mathbb{N}$$

n'est vérifiée par aucune fonction F .

Pour l'application du critère de Weyl, on posera dans tout ce qui suit

$$\sigma_T^{\Delta}(F, h) = \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} e_p(hF(x)) dx,$$

et si $\Delta = \mathbb{Q}_p$:

$$\sigma_T(F, h) = p^{-T} \int_{p^{-T}\mathbb{Z}_p} e_p(hF(x)) dx.$$

Ce critère est applicable en particulier à toute fonction F continue sur un ouvert Δ de \mathbb{Q}_p .

4. Quelques propriétés élémentaires.

4.1. - Il est immédiat que si F , μ -mesurable sur une partie μ -mesurable Δ de \mathbb{Q}_p , est C-e. r. (mod 1), alors $F + \alpha$, où $\alpha \in \mathbb{Q}_p$, est C-e. r. (mod 1).

4.2. - Si G , μ -mesurable sur une partie μ -mesurable Δ de \mathbb{Q}_p , est C-e. r. (mod 1) et si $|F(x) - G(x) - \alpha|_p \leq 1$, où $\alpha \in \mathbb{Q}_p$, quand $x \in \Delta$, $|x|_p \rightarrow \infty$, alors F est C-e. r. (mod 1).

G , définie sur Δ , est C-e. r. (mod 1), ce qui exige d'abord $\mu(\Delta) = \infty$. D'après 4.1, il suffit d'établir la propriété pour $\alpha = 0$. Il existe T_0 tel qu'on ait $|F(x) - G(x)|_p \leq 1$ pour $x \in \Delta - \Delta_{T_0}$. Dès lors, on a, pour $T > T_0$, $h \in \mathbb{N}$:

$$\sigma_T^{\Delta}(F, h) = \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_{T_0}} e_p(hF(x)) dx + \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T - \Delta_{T_0}} e_p(hG(x)) dx = A_T + \sigma_T^{\Delta}(G, h),$$

en posant

$$A_T = \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_{T_0}} (e_p(hF(x)) - e_p(hG(x))) dx.$$

Comme $\sigma_T^{\Delta}(G, h) \rightarrow 0$ et $|A_T| \leq \frac{2\mu(\Delta_{T_0})}{\mu(\Delta_T)} \rightarrow 0$ quand $T \rightarrow \infty$, on voit que $\lim_{T \rightarrow \infty} \sigma_T^{\Delta}(F, h) = 0$ pour tout $h \in \mathbb{N}$.

5. Intégrales remarquables sur \mathbb{Z}_p et sur \mathbb{U}_p .

5.1. - Rappelons deux résultats de F. BERTRANDIAS [1] ;

(a) Soit $I(y) = \int_{\mathbb{Z}_p} e_p(yx) dx$, où $v(y) = -k$, $k \geq 1$. On a alors,

si $y \in \frac{h}{p^k} + \mathbb{Z}_p$:

$$I(y) = \frac{1}{p^k} \sum_{0 \leq n \leq p^{k-1}} e_p(ny) = \frac{1}{p^k} \sum_{0 \leq n \leq p^{k-1}} e\left(\frac{nh}{p^k}\right) = \frac{1}{p^k} \frac{e(h) - 1}{e(hp^{-k}) - 1} = 0 .$$

Donc, si $y \in \mathbb{Q}_p - \mathbb{Z}_p$, alors $I(y) = 0$.

(b) Soit $I_\varphi(y) = \int_{\mathbb{Z}_p} e_p(y\varphi(x)) dx$, où $v(y) = -k$, $k \geq 1$, et $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$, de sorte qu'il existe $r \in \mathbb{Z}_p$ tel que φ soit une application isométrique de \mathbb{Z}_p sur la boule $r + \mathbb{Z}_p$, donc de chacune des boules $B(h, k)$ de \mathbb{Z}_p sur chacune des boules $B(r+h, k)$ de $r + \mathbb{Z}_p$, avec $\varphi(h) = r + \alpha_\ell$, où $\alpha_\ell \in B(\ell, k)$. On a alors

$$\begin{aligned} I_\varphi(y) &= \frac{1}{p^k} \sum_{0 \leq h \leq p^{k-1}} e_p(y\varphi(h)) = \frac{1}{p^k} \sum_{0 \leq \ell \leq p^{k-1}} e_p(yr + y\alpha_\ell) \\ &= \frac{e_p(yr)}{p^k} \sum_{0 \leq \ell \leq p^{k-1}} e_p(y\alpha_\ell) = 0 . \end{aligned}$$

Donc, si $y \in \mathbb{Q}_p - \mathbb{Z}_p$ et $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$, alors $I_\varphi(y) = 0$.

5.2.

(a) Soit $J(y) = \int_{\mathbb{U}_p} e_p(yx) dx$, où $v(y) \leq -2$. On a, d'après 5.1 (a):

$$J(y) = \int_{\mathbb{Z}_p} e_p(yx) dx - \int_{p\mathbb{Z}_p} e_p(yx) dx = \int_{\mathbb{Z}_p} e_p(yx) dx - p^{-1} \int_{\mathbb{Z}_p} e_p(pyx) dx = 0 .$$

Donc, si $y \in \mathbb{Q}_p - p^{-1}\mathbb{Z}_p$, alors $J(y) = 0$.

(b) Soit $J_\varphi(y) = \int_{\mathbb{U}_p} e_p(y\varphi(x)) dx$, où $v(y) \leq -2$ et $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{U}_p, \mathbb{Q}_p)$. Soit φ^* un prolongement de φ sur \mathbb{Z}_p tel que $\varphi^* \in \text{Isom}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$; alors $x \mapsto \frac{\varphi^*(px)}{p}$ est une application isométrique de \mathbb{Z}_p dans \mathbb{Q}_p . On a, d'après 5.1 (b) :

$$\begin{aligned} J_\varphi(y) &= \int_{\mathbb{Z}_p} e_p(y\varphi^*(x)) dx - \int_{p\mathbb{Z}_p} e_p(y\varphi^*(x)) dx \\ &= \int_{\mathbb{Z}_p} e_p(y\varphi^*(x)) dx - p^{-1} \int_{\mathbb{Z}_p} e_p(py \frac{\varphi^*(pz)}{p}) dz = 0 . \end{aligned}$$

Donc, si $y \in \mathbb{Q}_p - p^{-1}\mathbb{Z}_p$ et $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{U}_p, \mathbb{Q}_p)$, alors $J_\varphi(y) = 0$.

6. Exemples.

6.1. - Posons $F(x) = \alpha x$, où $\alpha \in \mathbb{Q}_p^*$, pour tout $x \in \mathbb{Q}_p$; on a, pour $h \in \mathbb{N}$, en posant $x = p^{-T} y$:

$$\sigma_T(F, h) = p^{-T} \int_{p^{-T} \mathbb{Z}_p} e_p(h\alpha x) dx = \int_{\mathbb{Z}_p} e_p(h\alpha p^{-T} y) dy,$$

et cette intégrale est nulle si $v(h\alpha) - T \leq -1$, c'est-à-dire si $T \geq v(h\alpha) + 1$; il en résulte que $\lim_{T \rightarrow \infty} \sigma_T(F, h) = 0$ pour tout $h \in \mathbb{N}$. On voit finalement que la fonction $x \rightsquigarrow \alpha_1 x + \alpha_0$, où $\alpha_1 \in \mathbb{Q}_p^*$, $\alpha_0 \in \mathbb{Q}_p$, est C-e. r. (mod 1).

6.2. - Soit f une application μ -mesurable de \mathbb{Z}_p dans \mathbb{Q}_p , et posons

$$F_\alpha(x) = \alpha x + f([x]_p), \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{Z}_p, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{Q}_p.$$

Si $\alpha = 0$, la fonction F_0 n'est pas C-e. r. (mod 1); en effet, en posant

$$(a, b)_f^{\mathbb{Z}_p} = \mu(\{x \in \mathbb{Z}_p \mid a \leq \langle f(x) \rangle_p < b\}),$$

on a $(T, a, b)_{F_0} = p^T (a, b)_f^{\mathbb{Z}_p}$ pour $0 \leq a < b \leq 1$, $T \geq 0$; si F_0 , définie sur \mathbb{Q}_p , était C-e. r. (mod 1), alors f , définie sur \mathbb{Z}_p , le serait elle aussi, et cela est impossible, puisque $\mu(\mathbb{Z}_p) = 1$.

Si $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$, formons, pour $h \in \mathbb{N}$, $T \geq 0$:

$$\sigma_T(F_\alpha, h) = p^{-T} \sum_{r \in \mathbb{Z}_p^T} \int_{r + \mathbb{Z}_p} e_p(h\alpha x) e_p(hf([x]_p)) dx,$$

d'où, en posant $x = r + y$:

$$\sigma_T(F_\alpha, h) = p^{-T} \int_{\mathbb{Z}_p} e_p(hF_\alpha(y)) dy \sum_{r \in \mathbb{Z}_p^T} e_p(h\alpha r).$$

Ce dernier \sum , qui s'écrit $\sum_{0 \leq k \leq p^T - 1} e_p(h\alpha k p^{-T})$, est égal, si $T > v(h\alpha)$, à $\frac{e_p(h\alpha) - 1}{e_p(h\alpha p^{-T}) - 1} = 0$, de sorte que $\sigma_T(F_\alpha, h) = 0$ pour $T > v(h\alpha)$; donc

$\lim_{T \rightarrow \infty} \sigma_T(F_\alpha, h) = 0$ pour tout $h \in \mathbb{N}$. Ainsi, la fonction F_α , où $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$, est C-e. r. (mod 1).

En particulier, la fonction $x \rightsquigarrow \alpha_1 \langle x \rangle_p + \alpha_0$, où $\alpha_1 \in \mathbb{Z}_p^*$, $\alpha_0 \in \mathbb{Q}_p$, est C-e. r. (mod 1).

6.3. - Comme $\cotg \frac{\alpha}{x} - \frac{x}{\alpha}$ et $\operatorname{cosec} \frac{\alpha}{x} - \frac{x}{\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{Q}_p^*$, continues en x sur l'ouvert $\mathbb{Q}_p - p^{v(\alpha)} \mathbb{Z}_p$ de \mathbb{Q}_p , tendent vers 0 quand $|x|_p \rightarrow \infty$, il résulte de 4.2 que les fonctions $x \rightsquigarrow \cotg \frac{\alpha}{x}$, $x \rightsquigarrow \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{x}$, où $\alpha \in \mathbb{Q}_p^*$, sont C-e. r. (mod 1).

On notera que $x \rightsquigarrow \cotg \frac{\alpha}{x}$, $x \rightsquigarrow \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{x}$, où $\alpha \in \mathbb{Q}_p^*$, sont deux applications homométriques de $\mathbb{Q}_p - p^{v(\alpha)} \mathbb{Z}_p$ sur $\mathbb{Q}_p - \mathbb{Z}_p$.

6.4. - Soit $E_p = \{k \in \mathbb{Z}^* \mid (k, p) = (k, p-1) = 1\}$. Si $n \in E_p$, tout $x \in \mathbb{U}_p$ admet une seule racine n -ième dans \mathbb{U}_p , donc tout $x \in V_p(n) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} p^{kn} \mathbb{U}_p$ admet une seule racine n -ième dans \mathbb{Q}_p , notée $x^{1/n}$.

Soit alors $E_p^+ = E_p \cap \mathbb{N}$, et posons $F(x) = \alpha x^{1/n}$, où $\alpha \in \mathbb{Q}_p^*$, $n \in E_p^+$, pour tout $x \in V_p(n)$; la fonction F est continue sur l'ouvert $\Delta = V_p(n)$ de \mathbb{Q}_p . Posons $x = p^{-nt} y$, de sorte que y décrit \mathbb{U}_p quand x décrit $p^{-nt} \mathbb{U}_p$. Calculons, pour $h \in \mathbb{N}$:

$$I_t = \int_{p^{-nt} \mathbb{U}_p} e_p(hF(x)) dx = p^{nt} \int_{\mathbb{U}_p} e_p(h\alpha p^{-t} y^{1/n}) dy.$$

Comme $x \rightsquigarrow x^{1/n}$ est une isométrie de \mathbb{U}_p (cf. [2]), on sait, d'après 5.2 (b), que cette dernière intégrale est nulle si $v(h\alpha) - t \leq -2$, c'est-à-dire si $t \geq v(h\alpha) + 2$. Posant $t_1 = v(h\alpha) + 1$, on voit que $I_t = 0$ pour $t > t_1$.

Cela étant, pour $T \geq n(t_1 + 1)$, $h \in \mathbb{N}$, on a $\sigma_T^\Delta(F, h) = A_T + B_T$, en posant

$$\left| \begin{aligned} A_T &= \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_{nt_1}} e_p(hF(x)) dx \\ B_T &= \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \sum_{t_1+1 \leq t \leq [T/n]} I_t \end{aligned} \right. .$$

D'après ce qui précède, on a $B_T = 0$; d'autre part $|A_T| \leq \frac{p^{nt_1}}{\mu(\Delta_T)}$ qui tend vers 0 quand $T \rightarrow \infty$, car $\mu(\Delta) = \infty$. Finalement donc $\lim_{T \rightarrow \infty} \sigma_T^\Delta(F, h) = 0$, et cela pour tout $h \in \mathbb{N}$, d'où :

THÉORÈME 3. - La fonction F , définie sur $V_p(n)$ par $F(x) = \alpha x^{1/n}$, où $\alpha \in \mathbb{Q}_p^*$, $n \in E_p^+$, est C-e. r. (mod 1).

6.5. - Posons $F(x) = \frac{\alpha}{x}$, où $\alpha \in \mathbb{U}_p$, pour tout $x \in \mathbb{Z}_p^*$; on sait que F n'est pas C-e. r. (mod 1). Soit $m(r)$ la masse de répartition (mod 1) de F au point $r \in \mathbb{r}_p$.

Pour que $\frac{\alpha}{x} \in \mathbb{Z}_p$, il faut et il suffit que $x \in U_p$; donc $m(0) = \mu(U_p) = \frac{p-1}{p}$.
 Soit $r \neq 0$; pour que $\frac{\alpha}{x} \in r + \mathbb{Z}_p$, il faut et il suffit que $v(x) = -v(r)$ et que $\alpha \in rx + p^{-v(r)} \mathbb{Z}_p$, c'est-à-dire que $x \in \frac{\alpha}{r} + p^{-2v(r)} \mathbb{Z}_p$; donc $m(r) = p^{2v(r)}$.

Finalement, on obtient

$$m(r) = |r|_p^{-2} \quad \text{si } r \in \mathbb{Z}_p^*, \quad m(0) = (p-1)p^{-1},$$

et on vérifie aussitôt que

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}_p} m(r) = (p-1) \sum_{k \in \mathbb{N}} p^{-k} = 1.$$

7. Condition suffisante de C-équirépartition (mod 1).

7.1. - Soit F une application de \mathbb{Q}_p dans \mathbb{Q}_p , et soit B une boule ouverte de \mathbb{Q}_p . La fonction F est dite homométrique sur B si et seulement si

$$\left| \frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2} \right|_p$$

est constant quels que soient $x_1 \in B$, $x_2 \in B$, $x_1 \neq x_2$; cette constante, dite rapport d'homométrie de F sur B , est notée $|F, B|_p$. Si $0 \notin B$, tous les points de B ont une même valeur absolue p -adique > 0 , notée $|B|_p$.

THÉOREME 4. - Soit une partition de \mathbb{Q}_p^* en boules ouvertes B , et soit F une fonction μ -mesurable sur une partie μ -mesurable Δ de \mathbb{Q}_p telle que $B \subset \Delta$ quand $|B|_p \rightarrow \infty$; si F est homométrique sur B quand $|B|_p \rightarrow \infty$ et si

$$(4) \quad \lim_{|B|_p \rightarrow \infty} \mu(B) |F, B|_p = \infty,$$

alors F est C-e. r. (mod 1).

Il existe t_1 tel que, pour $t > t_1$, la fonction F soit homométrique sur toute boule B de la couronne $p^{-t} U_p$; or cette couronne, étant fermée, contient un nombre fini de boules B (on le voit aussitôt par l'absurde), disons K_t boules

$$B_{k,t} = a_{k,t} p^{-t} + p^{-l_{k,t}} \mathbb{Z}_p,$$

où $k = 1, \dots, K_t$, avec $a_{k,t} \in U_p$ et $l_{k,t} \leq t-1$ pour $k = 1, \dots, K_t$.
 On pose

$$x = a_{k,t} p^{-t} + p^{-\ell_{k,t}} y ,$$

de sorte que y décrit $\underline{\mathbb{Z}}_p$ quand x décrit $B_{k,t}$. Posons d'autre part

$$|F, B_{k,t}|_p = p^{\lambda_{k,t}} \quad \text{pour } t > t_1, \quad k = 1, \dots, K_t,$$

et soit φ l'application de $\underline{\mathbb{Z}}_p$ dans $\underline{\mathbb{Q}}_p$ définie par

$$\varphi(y) = p^{\lambda_{k,t} + \ell_{k,t}} F(x) .$$

Prenant $y_1 \in \underline{\mathbb{Z}}_p$, $y_2 \in \underline{\mathbb{Z}}_p$, auxquels correspondent $x_1 \in B_{k,t}$, $x_2 \in B_{k,t}$, on a

$$\varphi(y_1) - \varphi(y_2) = p^{\lambda_{k,t} + \ell_{k,t}} (F(x_1) - F(x_2)) ,$$

d'où

$$|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)|_p = p^{-\ell_{k,t}} |x_1 - x_2|_p = |y_1 - y_2|_p ,$$

ce qui montre que φ est une application isométrique de $\underline{\mathbb{Z}}_p$ dans $\underline{\mathbb{Q}}_p$.

Dès lors, calculons, pour $t > t_1$, $h \in \underline{\mathbb{N}}$:

$$I_{k,t} = \int_{B_{k,t}} e_p(hF(x)) dx = p^{\ell_{k,t}} \int_{\underline{\mathbb{Z}}_p} e_p(h p^{-\lambda_{k,t} - \ell_{k,t}} \varphi(y)) dy .$$

On sait, d'après 5.1 (b), que cette dernière intégrale est nulle si

$$v(h) - \lambda_{k,t} - \ell_{k,t} \leq -1 \quad \text{c'est-à-dire si} \quad \lambda_{k,t} + \ell_{k,t} \geq v(h) + 1 .$$

Comme par hypothèse $\lim_{t \rightarrow \infty} (\lambda_{k,t} + \ell_{k,t}) = \infty$ quel que soit $k = 1, \dots, K_t$, on voit que, h étant fixé, il existe $t_2 \geq t_1$ tel que, pour $t > t_2$, cette condition soit vérifiée, et alors $I_{k,t} = 0$ pour $t > t_2$, $k = 1, \dots, K_t$.

Cela étant, pour $T > t_2$, $h \in \underline{\mathbb{N}}$, on a $\sigma_T^\Delta(F, h) = A_T + B_T$, en posant

$$\left| \begin{array}{l} A_T = \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_{t_2}} e_p(hF(x)) dx \\ B_T = \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \sum_{t_2+1 \leq t \leq T} \sum_{1 \leq k \leq K_t} I_{k,t} . \end{array} \right.$$

D'après ce qui précède, on a $B_T = 0$; d'autre part, $|A_T| \leq \frac{p^{t_2}}{\mu(\Delta_T)}$ qui tend vers 0 quand $T \rightarrow \infty$. Finalement donc $\lim_{T \rightarrow \infty} \sigma_T(F, h) = 0$, et cela pour tout $h \in \underline{\mathbb{N}}$, ce qui établit le théorème 4.

Soit m entier ≥ 0 ; si la partition envisagée de \mathbb{Q}_p^* est la réunion des partitions de toutes les couronnes $p^{-t} \mathbb{U}_p$ en $K_t = (p-1)p^m$ boules égales $B_{k,t}$ (en particulier, la réunion de toutes les boules maximales de \mathbb{Q}_p^*), alors $l_{k,t} = t - m - 1$, $\mu(B) = p^{t-m-1} = p^{-m-1} |B|_p$, et la condition (4) s'écrit

$$(4') \quad \lim_{|B|_p \rightarrow \infty} |B|_p |F, B|_p = \infty .$$

7.2. - Soit F une application de \mathbb{Q}_p dans \mathbb{Q}_p , et soit $x \in \mathbb{Q}_p$. Si F est strictement dérivable et régulière au point x (cf. [4]), c'est-à-dire si

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (x, x)} \frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2} = F'(x) \neq 0 ,$$

alors il existe une boule ouverte $B(x)$ telle que, pour $x_1 \in B(x)$, $x_2 \in B(x)$, $x_1 \neq x_2$, on ait

$$\left| \frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2} \right|_p = |F'(x)|_p ,$$

c'est-à-dire que F est homométrique au voisinage de x . Soit $B_0(x)$ la boule maximale d'homométrie de F au voisinage de $x \in \mathbb{Q}_p^*$ qui ne contient pas 0 ; son rayon sera noté $\rho_F(x)$, de sorte que $\rho_F(x) \leq p^{-1} |x|_p$. Dès lors, on a :

COROLLAIRE 1. - Soit F une fonction μ -mesurable sur une partie μ -mesurable Δ de \mathbb{Q}_p telle que $x \in \Delta$ quand $|x|_p \rightarrow \infty$; si F est strictement dérivable et régulière quand $|x|_p \rightarrow \infty$ et si

$$(5) \quad \lim_{|x|_p \rightarrow \infty} \rho_F(x) |F'(x)|_p = \infty ,$$

alors F est C-e. r. (mod 1) .

En effet, pour $|x|_p > p^{t_1}$, l'ensemble des boules $B_0(x)$ distinctes constitue une partition de $\mathbb{Q}_p - p^{-t_1} \mathbb{Z}_p$ en boules ouvertes ; F est homométrique sur $B_0(x)$ quand $|x|_p \rightarrow \infty$, et l'on a

$$\mu(B_0(x)) = \rho_F(x) \quad \text{et} \quad |F, B_0(x)|_p = |F'(x)|_p ;$$

La condition (4) donne alors (5).

Soit $m \in \mathbb{N}$; si $\rho_F(x) \geq p^{-m} |x|_p$ quand $|x|_p \rightarrow \infty$, la condition (5) est vérifiée dès qu'on a

$$(5') \quad \lim_{|x|_p \rightarrow \infty} |xF'(x)|_p = \infty ,$$

ce qui fournit un analogue p -adique d'un théorème de L. KUIPERS [3].

Le théorème 4 et le corollaire 1 sont applicables en particulier à toute fonction F continue sur un voisinage ouvert Δ du point à l'infini de \mathbb{Q}_p .

8. Applications.

8.1. - C-équirépartition (mod 1) des polynômes $P(x)$ non constants.

Posons

$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 ,$$

où $\alpha_k \in \mathbb{Q}_p$ pour $k = 0, 1, \dots, n$, avec $\alpha_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{Q}_p$: la fonction P est continue sur \mathbb{Q}_p .

Montrons d'abord que P est homométrique sur $B_{k,t} = v_k p^{-t} + p^{-t+2} \mathbb{Z}_p$ quand $t \rightarrow \infty$, où v_k désigne le k -ième entier naturel non divisible par p , avec $k = 1, 2, \dots, p(p-1)$. Prenons x_1, x_2 dans $B_{k,t}$, et posons

$$x_1 - x_2 = p^{-t+2} y, \quad \text{où } y \in \mathbb{Z}_p .$$

On a alors, quel que soit $m \in \mathbb{N}$:

$$x_1^m - x_2^m = \sum_{1 \leq h \leq m} \binom{m}{h} x_2^{m-h} p^{h(-t+2)} y^h = (x_1 - x_2) \sum_{1 \leq h \leq m} \binom{m}{h} x_2^{m-h} p^{(h-1)(-t+2)} y^{h-1} .$$

De $\binom{m}{h} = \frac{m}{h} \binom{m-1}{h-1}$, on déduit $v\left(\binom{m}{h}\right) \geq v(m) - v(h) \geq v(m) - h + 1$ pour $1 \leq h \leq m$. Dès lors, on a, pour $1 \leq h \leq m$:

$$\begin{aligned} v\left(\binom{m}{h} x_2^{m-h} p^{(h-1)(-t+2)} y^{h-1}\right) &\geq v(m) - (m-h)t + (h-1)(-t+1+v(y)) \\ &= v(m) - (m-1)t + (h-1)(1+v(y)) , \end{aligned}$$

et pour $h = 1$:

$$v\left(\binom{m}{1} x_2^{m-1}\right) = v(m) - (m-1)t .$$

Comme $v(y) \geq 0$, on voit que $(h-1)(1+v(y)) \geq 1$ pour $h \geq 2$, de sorte que

$$v\left(\binom{m}{h} x_2^{m-h} p^{(h-1)(-t+2)} y^{h-1}\right) > v\left(\binom{m}{1} x_2^{m-1}\right) \quad \text{pour } 2 \leq h \leq m .$$

Il en résulte qu'on a, pour $x_1 \in B_{k,t}$, $x_2 \in B_{k,t}$, $x_1 \neq x_2$, quel que soit $m \in \mathbb{N}$:

$$v\left(\frac{x_1^m - x_2^m}{x_1 - x_2}\right) = v(m) - (m-1)t .$$

Formons

$$\frac{P(x_1) - P(x_2)}{x_1 - x_2} = \sum_{1 \leq h \leq n} \alpha_h \frac{x_1^h - x_2^h}{x_1 - x_2} .$$

Puisque

$$v\left(\alpha_h \frac{x_1^h - x_2^h}{x_1 - x_2}\right) = v(\alpha_h) + v(h) - (h-1)t ,$$

il existe t_1 tel que, pour $t > t_1$, la valuation du dernier terme soit strictement inférieure à celles des termes précédents, donc tel qu'on ait

$$v\left(\frac{P(x_1) - P(x_2)}{x_1 - x_2}\right) = v(\alpha_n) + v(n) - (n-1)t$$

quels que soient $x_1 \in B_{k,t}$, $x_2 \in B_{k,t}$, $x_1 \neq x_2$; ainsi P est homométrique sur $B_{k,t}$ pour $t > t_1$, quel que soit $k = 1, 2, \dots, p(p-1)$.

Il en résulte que la condition (4') est applicable à P , avec ici $m = 1$. Or $|B_{k,t}|_p |P|_p = |\alpha_n|_p p^{nt} \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow \infty$, puisque $n \geq 1$; on a donc :

THÉORÈME 5. - Toute fonction polynomiale non constante définie sur \mathbb{Q}_p et à coefficients dans \mathbb{Q}_p est C-e. r. (mod 1).

8.2. - C-équirépartition (mod 1) des fractions rationnelles $F(x)$ telles que
 $\lim_{|x|_p \rightarrow \infty} |F(x)|_p = \infty$.

Soit $F(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ irréductible, où $A(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} \alpha_k x^k$, $B(x) = \sum_{0 \leq h \leq m} \beta_h x^h$,
 $\alpha_k, \beta_h \in \mathbb{Q}_p$ pour $k = 0, \dots, n$ et $h = 0, \dots, m$, avec $\alpha_n \neq 0$, $\beta_m \neq 0$,
 $n > m \geq 0$; F est définie et continue sur l'ouvert $\Delta = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid B(x) \neq 0\}$ de \mathbb{Q}_p , et $\mu(\mathbb{Q}_p - \Delta) = 0$.

Si $m = 0$, alors F , définie sur \mathbb{Q}_p , est C-e. r. (mod 1) (théorème 5).

Si $m \geq 1$, la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ donne, pour $x \in \mathbb{Q}_p$:

$$A(x) - B(x) Q(x) = R(x) = \sum_{0 \leq k \leq r} \gamma_k x^k \quad \text{où } 0 \leq r < m, \gamma_r \neq 0 ,$$

d'où, pour $x \in \Delta$:

$$F(x) - Q(x) = \frac{R(x)}{B(x)} \quad \text{irréductible .}$$

Pour $x \in \Delta$, $|x|_p$ assez grand, on a

$$|F(x) - Q(x)|_p = \left| \frac{\gamma_r}{\beta_m} x^{r-m} \right|_p$$

qui tend vers 0 quand $|x|_p \rightarrow \infty$, de sorte que $|F(x) - Q(x)|_p \leq 1$ pour $x \in \Delta$, $|x|_p \rightarrow \infty$. Comme $\deg Q = n - m \geq 1$, la fonction Q définie sur \mathbb{Q}_p , donc aussi sa restriction à Δ , sont C-e. r. (mod 1); dès lors, d'après 4.2, on obtient :

COROLLAIRE 2. - Toute fonction fraction rationnelle irréductible F définie sur \mathbb{Q}_p sauf en ses pôles dans \mathbb{Q}_p et à coefficients dans \mathbb{Q}_p , telle que

$$\lim_{|x|_p \rightarrow \infty} |F(x)|_p = \infty ,$$

est C-e. r. (mod 1) .

8.3. - A tout $x \in \mathbb{U}_p$ est associée une racine $(p-1)$ -ième de 1, soit ζ_x , telle que $\zeta_x x \in 1 + p\mathbb{Z}_p$; rappelons (cf. [2]) qu'alors la fonction

$$x \mapsto \log \zeta_x |x|_p^{-x|x|_p} ,$$

définie sur \mathbb{Q}_p^* , fournit un prolongement continu du logarithme sur \mathbb{Q}_p^* ; c'est cette fonction prolongée qui sera notée \log dans ce qui suit.

Soit

$$P(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} \alpha_k x^k , \quad \text{où } \alpha_k \in \mathbb{Q}_p \text{ pour } k=0, \dots, n, \text{ avec } \alpha_n \neq 0, n \in \mathbb{N} ,$$

et posons

$$F(x) = P(x) \log x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{Q}_p^* ;$$

F est définie et continue sur l'ouvert $\Delta = \mathbb{Q}_p^*$ de \mathbb{Q}_p , voisinage du point à l'infini.

Montrons d'abord que F est homométrique sur $B_{k,t} = kp^{-t} + p^{-t+1}\mathbb{Z}_p$ quand $t \rightarrow \infty$, quel que soit $k = 1, \dots, p-1$. On sait (cf. [2]) que $x \mapsto x \exp x$ est une isométrie de $p\mathbb{Z}_p$; on a donc, pour $x_1 \in \mathbb{Q}_p^*$, $x_2 \in \mathbb{Q}_p^*$ et pour tout $h \in \mathbb{Z}$:

$$v(\log x_1^h \exp \log x_1^h - \log x_2^h \exp \log x_2^h) = v(\log x_1^h - \log x_2^h) ,$$

d'où

$$v(\log x_1 \exp \log x_1^h - \log x_2 \exp \log x_2^h) = v(\log x_1 - \log x_2) .$$

Prenons x_1, x_2 dans $B_{k,t}$; le 1er membre vaut alors

$$\begin{aligned} v(\zeta_{x_1|x_1|p}^h x_1^h |x_1|_p^h \log x_1 - \zeta_{x_2|x_2|p}^h x_2^h |x_2|_p^h \log x_2) \\ = v(\zeta_k^h x_1^h p^{ht} \log x_1 - \zeta_k^h x_2^h p^{ht} \log x_2) = v(x_1^h \log x_1 - x_2^h \log x_2) + ht , \end{aligned}$$

et le 2e membre vaut

$$v(\log \frac{x_1}{x_2}) = v(\frac{x_1}{x_2} - 1) = v(x_1 - x_2) + t ;$$

on a donc, pour $x_1 \in B_{k,t}, x_2 \in B_{k,t}, x_1 \neq x_2$, quel que soit $h \in \mathbb{Z}$:

$$v(\frac{x_1^h \log x_1 - x_2^h \log x_2}{x_1 - x_2}) = - (h - 1)t .$$

Formons

$$\frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2} = \sum_{1 \leq h \leq n} \alpha_h \frac{x_1^h \log x_1 - x_2^h \log x_2}{x_1 - x_2} .$$

Puisque

$$v(\alpha_h \frac{x_1^h \log x_1 - x_2^h \log x_2}{x_1 - x_2}) = v(\alpha_h) - (h - 1)t ,$$

il existe t_1 tel que, pour $t > t_1$, la valuation du dernier terme soit strictement inférieure à celles des termes précédents, donc tel qu'on ait

$$v(\frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2}) = v(\alpha_n) - (n - 1)t$$

quels que soient $x_1 \in B_{k,t}, x_2 \in B_{k,t}, x_1 \neq x_2$; ainsi F est homométrique sur $B_{k,t}$ pour $t > t_1$, quel que soit $k = 1, 2, \dots, p - 1$.

Il en résulte que la condition (4') est applicable à F , avec ici $m = 0$. Or $|B_{k,t}|_p |F, B_{k,t}|_p = |\alpha_n|_p p^{nt} \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow \infty$, puisque $n \geq 1$; on a donc :

THÉORÈME 6. - Si P est une fonction polynomiale non constante à coefficients dans \mathbb{Q}_p , alors la fonction F définie sur \mathbb{Q}_p^* par $F(x) = P(x) \log x$ est C-e. r. (mod 1).

8.4. - C-équirépartition (mod 1) de certaines fonctions entières.

On va démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 7. - Soit F la fonction définie sur \mathbb{Q}_p par

$$F(x) = \sum_{n \geq n_0} \frac{a_n}{kn+h} x^{kn+h}$$

où $n_0 \in \mathbb{N}$, k entier ≥ 2 , h entier $\geq 1 - kn_0$, $a_n \in \mathbb{Q}_p^*$ pour $n \geq n_0$, avec $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|_p^{-1/n} = \infty$; si l'on a, pour $n \geq n_0$:

$$v\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \notin k\mathbb{Z}, \quad v\left(\frac{a_n a_{n+2}}{a_{n+1}^2}\right) \geq 1,$$

alors γF , où $\gamma \in \mathbb{Q}_p^*$, est C-e. r. (mod 1) .

F est définie et continue sur \mathbb{Q}_p . Prenons x_1, x_2 dans

$$B_{\ell, t} = v_\ell p^{-t} + p^{-t+2} \mathbb{Z}_p,$$

où $t \in \mathbb{Z}$, $\ell = 1, 2, \dots, p(p-1)$, et formons, pour $x_1 \neq x_2$:

$$\frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2} = \sum_{n \geq n_0} \frac{a_n}{kn+h} \frac{x_1^{kn+h} - x_2^{kn+h}}{x_1 - x_2}, \quad \text{soit} \quad \sum_{n \geq n_0} A_n.$$

On a (cf. 8.1)

$$v(A_n) = v(a_n) - (kn+h-1)t,$$

d'où les différences première et seconde

$$\Delta_1 v(A_n) = v(A_{n+1}) - v(A_n) = v\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - kt$$

$$\Delta_2 v(A_n) = \Delta_1 v(A_{n+1}) - \Delta_1 v(A_n) = v\left(\frac{a_n a_{n+2}}{a_{n+1}^2}\right).$$

Puisque $\Delta_2 v(A_n) \geq 1$, on voit d'abord que, t étant fixé, $\Delta_1 v(A_n)$ est strictement croissant en n pour $n \geq n_0$; d'autre part on a $\Delta_1 v(A_n) \notin k\mathbb{Z}$, ce qui entraîne $\Delta_1 v(A_n) \neq 0$ pour $n \geq n_0$, quel que soit $t \in \mathbb{Z}$. Ainsi, quel que soit $t \in \mathbb{Z}$, la suite $(\Delta_1 v(A_n))_{n \geq n_0}$ est une suite strictement croissante de \mathbb{Z}^* , et il existe $n_t \geq n_0$ tel que $\Delta_1 v(A_{n_t})$ soit son premier terme > 0 ; on a alors :

$$\left| \begin{array}{l} v(A_{n_t}) < v(A_{n_t+1}) < v(A_{n_t+2}) < \dots & \text{si } n_t = n_0 \\ v(A_{n_0}) > v(A_{n_0+1}) > \dots > v(A_{n_t-1}) > v(A_{n_t}) < v(A_{n_t+1}) < \dots & \text{si } n_t > n_0 \end{array} \right. ,$$

ce qui entraîne

$$v\left(\frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2}\right) = v(A_{n_t}) \leq (A_{n_0}) = v(a_{n_0}) - (kn_0 + h - 1)t$$

quels que soient $x_1 \in B_{\ell,t}$, $x_2 \in B_{\ell,t}$, $x_1 \neq x_2$, et F est homométrique sur $B_{\ell,t}$ pour $t \in \mathbb{Z}$, $\ell = 1, 2, \dots, p(p-1)$.

Il en résulte que la condition (4') est applicable à F , avec ici $m = 1$. Or.

$$|B_{\ell,t}|_p |F, B_{\ell,t}|_p = p^t |A_{n_t}|_p \geq p^t |A_{n_0}|_p = |a_{n_0}|_p p^{(kn_0+h)t} \rightarrow \infty \text{ quand } t \rightarrow \infty ,$$

puisque $kn_0 + h \geq 1$; donc F est C-e. r. (mod 1), et il en est de même de γF , où $\gamma \in \mathbb{Q}_p^*$, car les conditions imposées à F sont invariantes par homothétie de rapport non nul sur les a_n .

Exemples.

(a) Prenant $k = 2\ell$, où $\ell \in \mathbb{N}$, et $a_n = \alpha^{n^r}$, où $\alpha \in p\mathbb{Z}_p^*$, $v(\alpha) \in 2\mathbb{N} - 1$, $r \in \mathbb{N} + 1$, on a

$$\frac{v(a_n)}{n} = n^{r-1} v(\alpha) \rightarrow \infty \text{ quand } n \rightarrow \infty, \quad v\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = ((n+1)^r - n^r) v(\alpha) \notin 2\mathbb{Z},$$

$$v\left(\frac{a_n a_{n+2}}{a_{n+1}^2}\right) = (n^r + (n+2)^r - 2(n+1)^r) v(\alpha) \geq 1 + 3^r - 2^{r+1} \geq 1 + 3^2 - 2^3 = 2 .$$

Donc, si l'on pose sur \mathbb{Q}_p

$$F(x) = \sum_{n \geq n_0} \frac{\alpha^{n^r}}{2\ell n + h} x^{2\ell n + h},$$

où $n_0, \ell \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{N} - 2\ell n_0$, $v(\alpha) \in 2\mathbb{N} - 1$, $r \in \mathbb{N} + 1$, alors γF , où $\gamma \in \mathbb{Q}_p^*$, est C-e. r. (mod 1).

(b) Prenant $k = 2\ell$, où $\ell \in \mathbb{N}$, et $a_n = \alpha^{n^n}$, où $\alpha \in p\mathbb{Z}_p^*$, $v(\alpha) \in 2\mathbb{N} - 1$, on a

$$\frac{v(a_n)}{n} = n^{n-1} v(\alpha) \rightarrow \infty \text{ quand } n \rightarrow \infty, \quad v\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = ((n+1)^{n+1} - n^n) v(\alpha) \notin 2\mathbb{Z},$$

$$v\left(\frac{a_n a_{n+2}}{a_{n+1}^2}\right) = (n^n + (n+2)^{n+2} - 2(n+1)^{n+1}) v(\alpha) \geq 1 + 3^3 - 2^3 = 20 .$$

Donc, si l'on pose sur \mathbb{Q}_p

$$F(x) = \sum_{n \geq n_0} \frac{\alpha^{n^n}}{2^{2ln+h}} x^{2ln+h} ,$$

où $n_0, l \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{N} - 2ln_0$, $v(\alpha) \in 2\mathbb{N} - 1$, alors γ^F , où $\gamma \in \mathbb{Q}_p^*$, est C-e. r. (mod 1).

(c) Prenant $k = lp_0$, où $l \in \mathbb{N}$, p_0 premier, et $a_n = \alpha^{n^{p_0^r}}$, où $\alpha \in p\mathbb{Z}_p^*$, $p_0 \nmid v(\alpha)$, $r \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{v(a_n)}{n} = n^{p_0^r - 1} v(\alpha) \rightarrow \infty \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty ,$$

puis par application répétée de Fermat.

$$v\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = ((n+1)^{p_0^r} - n^{p_0^r}) v(\alpha) \equiv v(\alpha) \pmod{p_0} ,$$

de sorte que $v\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \notin p_0 \mathbb{Z}$, enfin $v\left(\frac{a_n a_{n+2}}{a_{n+1}^2}\right) \geq 2$ comme dans l'exemple (a).

Donc, si l'on pose sur \mathbb{Q}_p

$$F(x) = \sum_{n \geq n_0} \frac{\alpha^{n^{p_0^r}}}{\ell p_0^{n+h}} x^{\ell p_0^{n+h}} ,$$

où p_0 premier, $n_0, l, r \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{N} - \ell p_0 n_0$, $\alpha \in p\mathbb{Z}_p^*$, $p_0 \nmid v(\alpha)$, alors γ^F , où $\gamma \in \mathbb{Q}_p^*$, est C-e. r. (mod 1).

(d) Prenant $v(h) = 0$, $k = 2lp$, où $l \in \mathbb{N}$, et $a_n = \alpha^{n^r} (2lpn + h)$, où $\alpha \in p\mathbb{Z}_p^*$, $v(\alpha) \in 2\mathbb{N} - 1$, $r \in \mathbb{N} + 1$, toutes les conditions du théorème 7 sont satisfaites, comme dans l'exemple (a), puisque $v(2lpn + h) = 0$. Donc, si l'on pose sur \mathbb{Q}_p

$$F(x) = \sum_{n \geq n_0} \alpha^{n^r} x^{2lpn+h} ,$$

où $n_0, l \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{N} - 2lpn_0$, $p \nmid h$, $v(\alpha) \in 2\mathbb{N} - 1$, $r \in \mathbb{N} + 1$, alors γ^F , où $\gamma \in \mathbb{Q}_p^*$, est C-e. r. (mod 1).

(e) Soit $\alpha \in p\mathbb{Z}_p^*$, et posons $P(\alpha, x) = \prod_{s \geq 0} (1 + \alpha^{2s+1} x)$, produit infini

convergent sur \mathbb{Q}_p . De la relation fonctionnelle $P(\alpha, x) = (1 + \alpha x) P(\alpha, \alpha^2 x)$, on déduit aisément

$$\prod_{s \geq 0} (1 + \alpha^{2s+1} x) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha^{n^2} x^n}{(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^4) \dots (1 - \alpha^{2n})},$$

d'où encore, en y remplaçant x par $\alpha^{2s_0} x$, où $s_0 \in \mathbb{Z}^+$:

$$\prod_{s \geq s_0} (1 + \alpha^{2s+1} x) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha^{n(n+2s_0)} x^n}{(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^4) \dots (1 - \alpha^{2n})}.$$

Dès lors, posons sur \mathbb{Q}_p^*

$$F(x) = x^{-h} \prod_{s \geq s_0} (1 + \alpha^{2s+1} x^{2\ell p}),$$

où $s_0 \in \mathbb{Z}^+$, $\ell \in \mathbb{N}$, $v(\alpha) \in 2\mathbb{N} - 1$, $1 \leq h \leq 2\ell p - 1$, $p \nmid h$, de sorte que

$$F(x) = x^{-h} + \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha^{n(n+2s_0)} x^{2\ell p n - h}}{(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^4) \dots (1 - \alpha^{2n})}, \text{ soit } x^{-h} + G(x).$$

Pour la fonction G , avec ici $n_0 = 1$, $k = 2\ell p$, compte tenu de $v(2\ell p n - h) = 0$, on a

$$\frac{v(a_n)}{n} = (n + 2s_0) v(\alpha) \rightarrow \infty \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty,$$

$$v\left(\frac{a_{n+1}}{n}\right) = ((n+1)(n+1+2s_0) - n(n+2s_0)) v(\alpha) \notin 2\mathbb{Z}, \quad v\left(\frac{a_n a_{n+2}}{a_{n+1}^2}\right) = 2v(\alpha) \geq 2;$$

donc γG , où $\gamma \in \mathbb{Q}_p^*$, est C-e. r. (mod 1). Mais

$$|\gamma F(x) - \gamma G(x)|_p = |\gamma|_p |x|_p^{-h} \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad |x|_p \rightarrow \infty,$$

puisque $h \geq 1$; il en résulte, d'après 4.2, que γF , où $\gamma \in \mathbb{Q}_p^*$, est C-e. r. (mod 1).

8.5. - Utilisant le prolongement du logarithme sur \mathbb{Q}_p^* introduit dans 8.3, on obtient de même :

THÉORÈME 8. - Sous toutes les conditions énoncées dans le théorème 7, si F désigne maintenant la fonction définie sur \mathbb{Q}_p^* par

$$F(x) = \sum_{n \geq n_0} a_n x^{kn+h} \log x ,$$

alors γF , où $\gamma \in \mathbb{Q}_p^*$, est C-e. r. (mod 1) .

F est définie et continue sur \mathbb{Q}_p^* , et il est clair qu'on peut répéter ici la démonstration du théorème 7, car, en prenant cette fois x_1, x_2 dans

$$B_{\ell, t} = \ell p^{-t} + p^{-t+1} \mathbb{Z}_p ,$$

où $t \in \mathbb{Z}$, $\ell = 1, 2, \dots, p-1$, et en formant, pour $x_1 \neq x_2$:

$$\frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2} = \sum_{n \geq n_0} a_n \frac{x_1^{kn+h} \log x_1 - x_2^{kn+h} \log x_2}{x_1 - x_2} , \text{ soit } \sum_{n \geq n_0} A_n ,$$

on a encore (cf. 8.3)

$$v(A_n) = v(a_n) - (kn + h - 1)t .$$

Exemple. - Posons sur \mathbb{Q}_p^*

$$F(x) = (\log x) \prod_{s \geq s_0} (1 + \alpha^{2s+1} x^{2\ell}) ,$$

où $s_0 \in \mathbb{Z}^+$, $\ell \in \mathbb{N}$, $v(\alpha) \in 2\mathbb{N} - 1$. On voit comme plus haut que la fonction $\gamma(F - \log)$, où $\gamma \in \mathbb{Q}_p^*$, est C-e. r. (mod 1); comme $v(\gamma \log x) \geq 0$ si $v(\gamma) \geq -1$, il en résulte que γF , où $\gamma \in p^{-1} \mathbb{Z}_p^*$, est C-e. r. (mod 1) .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERTRANDIAS (Françoise). - Théorème de Koksma en p-adique, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 6, 1964/65, n° 3, 16 p.
- [2] CHAUVINEAU (Jean). - Quelques remarques sur les applications isométriques et la répartition dans un corps p-adique, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 6, 1964/65, n° 12, 13 p.
- [3] KUIPERS (Lauwerens). - De asymptotische verdeling modulo 1 van de waarden van meetbare functies, Thèse Sc. math. Amsterdam, 1947.
- [4] TISON (Françoise). - Comportement local d'une fonction d'une variable p-adique à valeurs p-adiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 259, 1964, p. 3154-3157.