Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Michel Mendès France

Quelques remarques sur la répartition modulo 1 de la suite $x\theta^p$

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 6, n° 2 (1964-1965), exp. n° 11, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1964-1965__6_2_A2_0>

Séminaire DELANGE-PISOT
(Théorie des nombres)
6e année, 1964/65, n° 11

22 mars 1965

QUELQUES REMARQUES
SUR LA RÉPARTITION MODULO 1 DE LA SUITE $x\theta^p$

par Michel MENDÈS FRANCE

1. Généralités.

On connait divers types de résultats sur la répartition modulo 1 de la suite $x\theta^p$ $(p = 1, 2, \ldots)$. Le théorème de Koksma-Weyl affirme que, pour presque tous les couples (x, θ) $(\theta > 1)$, la suite $x\theta^p$ est équirépartie modulo 1. En sens inverse, on sait que si θ est un nombre de Pisot et si x appartient au corps algébrique de θ, la suite $x\theta^p$ n'est pas équirépartie modulo 1 : on dira qu'elle est mal répartie. Le but de cet exposé est de donner quelques renseignements sur la répartition de la suite $x\theta^p$ lorsque x est un élément de l'ensemble de Cantor $C(\theta)$ construit sur l'intervalle $[0, 1]$ et à dissection $\frac{1}{\theta}$. On considèrera deux cas selon que θ est ou non un nombre de Pisot.

Dans tout ce qui suit, S désigne l'ensemble des entiers algébriques plus grands que 1 dont tous les conjugués sont à l'intérieur du cercle unité (nombres de Pisot) [3], [5], [6].

2. Résultats obtenus.

Soit $\theta > 2$ un nombre réel, et soit $C(\theta)$ l'ensemble de Cantor à dissection $1/\theta$, construit sur l'intervalle $[0, 1]$. En d'autres termes, $C(\theta)$ est l'ensemble de tous les nombres x de la forme

$$x = (\theta - 1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_p}{\theta^p} ,$$

où les ε_p sont égaux soit à 0, soit à 1.

Considérons le groupe abélien $G = (\underset{\sim}{Z}/2\underset{\sim}{Z})^{\underset{\sim}{N}}$. A chaque élément $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots) \in G$ $(\varepsilon_n = 0$ ou $1)$, on peut faire correspondre un élément $x(\varepsilon) \in C(\theta)$ par la formule

$$x(\varepsilon) = (\theta - 1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_p}{\theta^p} .$$

On munit le groupe G de la topologie discrète, ce qui en fait un groupe compact. La mesure de Haar, normalisée sur G, induit une mesure μ sur l'ensemble de Cantor $C(\theta)$. Appelons alors $\mathcal{P}(\theta)$ l'implication

$$x \in C(\theta) \implies x\theta^p \text{ équirépartie } \pmod 1 \ \mu\text{-presque partout.}$$

Nous démontrerons le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Presque tous les $\theta > 2$ vérifient $\mathcal{P}(\theta)$.

D'une façon plus précise, on verra d'une part, que si $\theta > 2$ est un nombre réel et si, pour tout entier $k \neq 0$, la série

(1) $$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \left| \prod_{m=0}^{p} \cos \pi k(\theta - 1)\theta^m \right|$$

est convergente, alors l'implication $\mathcal{P}(\theta)$ est vraie.

D'autre part, on démontrera que la série précédente est convergente pour presque tous les $\theta > 1$.

Remarque. - On sait qu'une caractérisation de l'ensemble S est la suivante :

(2) $$\theta \in S \iff \prod_{m=0}^{\infty} \cos \pi k(\theta - 1)\theta^m$$

est un produit infini convergent [5]. Cela montre que si θ est un élément de S , alors la série (1) est divergente. Cela nous amène à étudier la répartition de la suite $x\theta^p$ (mod 1) lorsque $\theta \in S$.

THÉORÈME 2. - Si $\theta > 2$ est un nombre de l'ensemble S , l'implication $\mathcal{P}(\theta)$ n'a pas lieu.

Ce résultat est précisé par les théorèmes 3 et 4.

THÉORÈME 3 (SALEM, ZYGMUND). - Il existe un entier $\lambda \neq 0$ du corps de θ ($\theta \in S$, $\theta > 2$) tel que, pour tout x de $C(\theta)$, la suite $\lambda x\theta^p$ ($p = 1, 2, \ldots$) ne soit pas équirépartie (mod 1) .

On pourra trouver une démonstration de ce théorème dans [3], p. 75-78, ou [8] (voir aussi [1]).

Avant d'énoncer le théorème 4, nous devons introduire de nouvelles notations. On désigne par $[t]$ (resp. $\{t\}$) la partie entière (resp. fractionnaire) du nombre réel t . Appelons $E(\theta)$ l'ensemble des nombres x de la forme

$$x = x_\varphi = (\theta - 1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{[2\{\varphi(p)\}]}{\theta^p} ,$$

où φ est un polynôme réel. Il est bien évident que $E(\theta) \subset C(\theta)$, que $E(\theta)$ est dense dans $C(\theta)$ et qu'enfin l'intersection de toute portion non vide de $C(\theta)$ avec $E(\theta)$ a la puissance du continu. Toutefois, on peut démontrer que la dimension de Hausdorff de $E(\theta)$ est nulle, alors qu'il est connu que celle de $C(\theta)$ est positive.

THÉORÈME 4. - θ étant un nombre de la classe S (non nécessairement supérieur à 2), la suite $x\theta^p$ $(p = 1, 2, \ldots)$ est mal répartie modulo 1 pour tous les nombres x de l'ensemble $E(\theta)$. De plus, la fermeture $A(x)$ de l'ensemble des points $x\theta^p$ modulo 1 $(p \in \mathbb{N})$ a une dimension de Hausdorff nulle.

Ce théorème et les remarques qui précèdent, généralisent les résultats obtenus dans [4].

Remarque. - En modifiant légèrement la démonstration du théorème 4, on peut facilement démontrer que si $\theta \in S$ a tous ses conjugués dans le cercle $|z| < \frac{1}{2}$, l'implication $\{x \in C(\theta) \Longrightarrow x\theta^p$ mal répartie $\}$ **est vraie. En particulier** si $\theta > 2$ est **une** unité quadratique de S , le résultat précédent a lieu (cf. [7], p. 598).

3. Démonstration du théorème 1.

Nous nous appuyons sur quatre lemmes.

LEMME 1. - α_j et β_j $(j = 1, 2, \ldots, t)$ étant des nombres réels, l'inégalité suivante

$$\left|\prod_{j=1}^{t} (\beta_j + \cos \alpha_j)\right| \leq \left|\prod_{j=1}^{t} \cos \alpha_j\right| + \prod_{j=1}^{t} (1 + |\beta_j|) - 1$$

a lieu.

(Démonstration évidente.)

Posons

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^{N} \exp 2i\pi x\theta^p$$

et

$$I_N(k) = \int_0^1 |\sigma_N(kx)|^2 \, d\mu(x) ,$$

où k est un entier rationnel non nul.

LEMME 2. - Si pour tout entier $k \neq 0$, la série $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} I_N(k)$ est convergente, alors la suite $x\theta^p$ est équirépartie modulo 1 pour μ-presque tous les x .

Nous ne rétablirons pas ce résultat dû à DAVENPORT, ERDÖS et LEVEQUE [2].

Remarque. - Supposons que l'on ait mis $I_N(k)$ sous la forme

$$I_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} A_n(k) \quad \text{où} \quad A_n(k) \geq 0 \ .$$

Les égalités

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} I_N(k) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(k) \sum_{N=n}^{\infty} \frac{1}{N^2}$$

et

$$\sum_{N=n}^{\infty} \frac{1}{N^2} = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$$

montrent que la condition du lemme 2 s'écrit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} A_n(k) < \infty \quad \text{pour tout entier} \quad k \neq 0 \ .$$

LEMME 3. - $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \left| \prod_{m=0}^{p} \cos \pi k(\theta - 1)\theta^m \right| < \infty \implies \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} I_N(k) < \infty$.

En effet, la formule classique [3] :

$$\int_0^1 e^{2i\pi ux} \, d\mu(x) = e^{i\pi u} \prod_{j=1}^{\infty} \cos \pi(1 - \frac{1}{\theta}) \frac{u}{\theta^{j-1}} \tag{3}$$

montre que l'on a :

$$I_N(k) = \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{1 \leq q < p \leq N} \cos \pi k(\theta^p - \theta^q) \prod_{j=0}^{\infty} \cos \pi k(\theta^p - \theta^q)(1 - \frac{1}{\theta}) \frac{1}{\theta^j} \ .$$

Appelons $L_N(k)$ la somme $\displaystyle\frac{2}{N^2} \sum_{1 \leq q < p \leq N}$ qui apparait au second membre de l'équation. Les deux séries $\sum \frac{1}{N} I_N(k)$ et $\sum \frac{1}{N} L_N(k)$ étant de même nature, il suffit de montrer que, sous l'hypothèse du lemme 3, la série $\sum \frac{1}{N} L_N(k)$ converge.

De l'égalité

$$\sum_{1 \leq q < p \leq N} = \sum_{t=1}^{N-1} \sum_{q=1}^{N-t} ,$$

on déduit les inégalités

$$\begin{aligned} |L_N(k)| &\leq \frac{2}{N^2} \sum_{t=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} \left| \prod_{j=0}^{\infty} \cos \pi k \theta^{q-j} (1 - \frac{1}{\theta})(\theta^t - 1) \right| \\ &\leq \frac{2}{N^2} \sum_{t=1}^{N} N \left| \prod_{j=0}^{\infty} \cos \pi k \theta^{1-j} (1 - \frac{1}{\theta})(\theta^t - 1) \right| \ . \end{aligned}$$

Afin d'alléger l'écriture, on pose $\lambda = \pi k(\theta - 1)$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} |L_N(k)| &\leq \frac{2}{N} \sum_{t=1}^{N} \left| \prod_{j=0}^{\infty} \cos \lambda \theta^{-j} (\theta^t - 1) \right| \\ &\leq \frac{2}{N} \sum_{t=1}^{N} \left| \prod_{\sqrt{t} \leq j \leq t} \cos \lambda (\theta^{t-j} - \theta^{-j}) \right| \ . \end{aligned}$$

Il est pratique d'effectuer le changement de notation $t - j = m$, de sorte que

$$|L_N(k)| \leqslant \frac{2}{N} \sum_{t=1}^{N} \Big| \prod_{0 \leqslant m \leqslant t-\sqrt{t}} \cos \lambda(\theta^m - \frac{1}{\theta^{t-m}})\Big| .$$

Posons

$$A_t(k) = \Big| \prod_{0 \leqslant m \leqslant t-\sqrt{t}} \cos \lambda(\theta^m - \frac{1}{\theta^{t-m}})\Big| .$$

La remarque qui suit le lemme 2 montre que la convergence de la série $\sum_t \frac{1}{t} A_t(k)$ entraîne celle de la série $\sum_N \frac{1}{N}|L_N(k)|$. On est ainsi ramené à l'étude de la série $\sum_t \frac{1}{t} A_t(k)$. Or

$$|\cos \lambda(\theta^m - \frac{1}{\theta^{t-m}})| \leqslant |\cos \lambda\theta^m| + \frac{\lambda}{\theta^{t-m}} .$$

Le lemme 1 nous permet alors d'écrire :

$$A_t(k) \leqslant \Big| \prod_{0 \leqslant m \leqslant t-\sqrt{t}} \cos \lambda\theta^m\Big| + y(t)$$

où $y(t) = \left(1 + \frac{\lambda}{\theta^{\sqrt{t}}}\right)^{t-\sqrt{t}} - 1$. La série $\sum \frac{1}{t} y(t)$ étant évidemment convergente, on est conduit à l'étude de la convergence de la série

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t}\Big| \prod_{0 \leqslant m \leqslant t-\sqrt{t}} \cos \lambda\theta^m\Big| ,$$

c'est-à-dire (après changement de variable) de la série

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p}\Big| \prod_{m=0}^{p} \cos \lambda\theta^m\Big| .$$

Ceci démontre le lemme.

En associant les lemmes 2 et 3, on aboutit à l'énoncé suivant :

Soit $\theta > 2$ *un nombre réel. Si, pour tout* k *entier non nul, la série*

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p}\Big| \prod_{m=0}^{p} \cos \pi k(\theta - 1)\theta^m\Big|$$

est convergente, alors l'implication $\mathcal{P}(\theta)$ *est vraie.*

Le théorème 1 découle alors du lemme suivant :

LEMME 4. - *Soit* $k \neq 0$ *un entier fixé. Presque tous les nombres* $\theta > 1$ *sont tels que la série*

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p}\Big| \prod_{m=0}^{p} \cos \pi k(\theta - 1)\theta^m\Big|$$

est convergente.

En effet, soit $\theta > 1$ un nombre tel que la suite $(\theta - 1)\theta^m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ soit équirépartie modulo 1 . ε représentant un nombre de l'intervalle $]0, 1[$, on considère l'ensemble

$$H_{p,\varepsilon} = \{m \in \mathbb{N} \mid \frac{\varepsilon}{2} \leq \{(\theta - 1)\theta^m\} < 1 - \frac{\varepsilon}{2} ; \ m \leq p\} .$$

Il contient $(1 - \varepsilon)p + o(p)$ éléments. Posons $1 - \eta = \cos \frac{\varepsilon\pi}{2}$ de sorte que $0 < 1 - \eta < 1$. On a alors l'inégalité

$$\begin{aligned} \left|\prod_{m=0}^{p} \cos \pi k(\theta - 1)\theta^m\right| &\leq \left|\prod_{m\in H_{p,\varepsilon}} \cos \pi k(\theta - 1)\theta^m\right| \\ &\leq (1 - \eta)^{(1-\varepsilon)p+o(p)} . \end{aligned}$$

La série $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p}\left|\prod_{m=0}^{p} \cos \pi k(\theta - 1)\theta^m\right|$ est alors évidemment convergente. Nous sommes ainsi arrivé à la conclusion que, si la suite $(\theta - 1)\theta^m$ est équirépartie (mod 1) , alors la série précédente converge. Le théorème de Koksma permet alors de conclure.

4. Démonstration du théorème 2.

Considérons à nouveau la somme

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^{N} \exp 2i\pi x\theta^p ,$$

et définissons l'intégrale

$$J_N = \int_0^1 \sigma_N(2x)\, d\mu(x) .$$

On suppose que $\theta > 2$ est un nombre de l'ensemble S . Pour montrer que l'implication $\mathcal{P}(\theta)$ n'a pas lieu, il suffit de montrer que, pour N infini, J_N ne tend pas vers 0 .

Or l'égalité (3) montre que

$$J_N = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^{N} \exp 2i\pi\theta^p \prod_{j=1}^{\infty} \cos 2\pi(\theta - 1)\theta^{p-j} .$$

Comme $\theta \in S$,

$$\lim_{p\to\infty} \exp 2i\pi\theta^p = 1 .$$

D'autre part,

$$\lim_{p\to\infty} \prod_{j=1}^{\infty} \cos 2\pi(\theta - 1)\theta^{p-j} = \prod_{j=-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi(\theta - 1)\theta^j .$$

Le produit infini $\prod_{-\infty}^{+\infty}$ est convergent (caractérisation de l'ensemble S).

Ainsi

$$\lim_{N\to\infty} J_N = \prod_{j=-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi(\theta - 1)\theta^j \neq 0 .$$

C. Q. F. D.

5. Démonstration du théorème 4.

Soit φ un polynôme réel de degré ν. On considère la suite de p éléments

$$[\varphi(m+1)] , [\varphi(m+2)] , \dots , [\varphi(m+p)] \pmod 2 .$$

Appelons $N_\nu(p)$ le nombre de positions distinctes que prend la suite quand m parcourt $\underset{\sim}{N}$.

LEMME 5. - Quand p croit indéfiniment, on a

$$N_\nu(p) = O\left(p^{(\nu+1)^2}\right) .$$

En effet, désignons par P_ν l'ensemble des polynômes réels de degré ν et à coefficients dans $[0 , 2[$. On considère la suite de p éléments

$$[\psi(1)] , [\psi(2)] , \dots , [\psi(p)] \pmod 2 .$$

Représentons par $N_\nu^*(p)$ le nombre de positions distinctes que prend la suite quand ψ parcourt P_ν. Il est clair que $N_\nu(p) \leqslant N_\nu^*(p)$. On va montrer que $N_\nu^*(p) = O\left(p^{(\nu+1)^2}\right)$ et cela démontrera le lemme.

Posons

$$\psi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_\nu x^\nu ; \qquad \alpha_j \in [0 , 2[.$$

Soit $q_1 , q_2 , \dots , q_p$ une suite d'entiers vérifiant les p inégalités

$$0 \leqslant q_n < 2(1 + n + \dots + n^\nu) \qquad n = 1 , 2 , \dots , p ,$$

de sorte que $q_n = O(p^\nu)$. Lorsque le point $\alpha = (\alpha_0 , \alpha_1 , \dots , \alpha_\nu) \in [0 , 2[^{\nu+1}$ parcourt le volume défini par

$$q_n \leqslant \alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_\nu n^\nu < q_n + 1 \qquad n = 1 , 2 , \dots , p ,$$

la suite $[\psi(1)] , [\psi(2)] , \dots , [\psi(p)]$ reste invariante. Or le nombre $N_\nu^{**}(p)$ de tels volumes est majoré par le nombre maximum de régions que l'on peut obtenir en découpant l'espace euclidien $\underset{\sim}{R}^{\nu+1}$ par les hyperplans

$$\alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_\nu n^\nu = q_n ,$$

lesquels sont au nombre de $M = pO(p^\nu) = O(p^{\nu+1})$. Il est par ailleurs connu que l'espace $\underset{\sim}{R}^{\nu+1}$ est partagé en $O(M^{\nu+1})$ régions par M hyperplans. Par suite,

$N^{**}_{\nu}(p) = O(p^{(\nu+1)^2})$. Le lemme découle alors de l'inégalité évidente

$$N^{*}_{\nu}(p) \leqslant N^{**}_{\nu}(p) .$$

LEMME 6. - Soit φ un polynôme réel de degré ν . La suite de p éléments

$$[2\{\varphi(m+1)\}] , [2\{\varphi(m+2)\}] , \ldots , [2\{\varphi(m+p)\}]$$

prend $O(p^{2(\nu+1)^2})$ positions distinctes lorsque m parcourt l'ensemble $\underset{\sim}{N}$ des entiers.

La démonstration découle immédiatement du lemme 5 et de l'égalité

$$[2\{\varphi(p)\}] = [2\varphi(p)] - 2[\varphi(p)] .$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 4. Soit $\theta > 1$ un nombre de la classe S, et soit x un élément de $E(\theta)$. Il existe donc un polynôme réel φ tel que

$$x = (\theta - 1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{[2\{\varphi(p)\}]}{\theta^p} .$$

Appelons ν le degré de φ et, pour simplifier l'écriture, posons

$$\varepsilon_p = [2\{\varphi(p)\}] \qquad (p = 1 , 2 , \ldots) .$$

Nous voulons montrer que la suite $x\theta^n$ $(n = 1 , 2 , \ldots)$ est mal répartie (mod 1)
On définit les deux quantités

$$R_p(n) = (\theta - 1)\left(\frac{\varepsilon_{n+p+1}}{\theta^{p+1}} + \frac{\varepsilon_{n+p+2}}{\theta^{p+2}} + \ldots\right)$$

$$Q_p(n) = (\theta - 1)\left(\varepsilon_1 \theta^{n-1} + \ldots + \varepsilon_{n-p-1} \theta^{p+1}\right)$$

de sorte que

$$x\theta^n = R_p(n) + Q_p(n) + (\theta - 1)\left(\varepsilon_{n-p} \theta^p + \ldots + \frac{\varepsilon_{n+p}}{\theta^p}\right) .$$

Il est clair que $|R_p(n)| \leqslant \frac{1}{\theta^p}$. Par ailleurs, soit s le degré du nombre algébrique θ, et soit τ $(\tau \neq \theta)$ le conjugué de θ dont le module est le plus grand. Comme θ appartient à S , on a $|\tau| < 1$ et $|\theta|^q \leqslant (s - 1)|\tau|^q$ (mod 1) . Il s'ensuit que

$$|Q_p(n)| \leqslant \theta^{p+1} + 2(\theta^{p+2} + \theta^{p+3} + \ldots)$$

$$\leqslant 2(s - 1) \frac{|\tau|}{1 - |\tau|} |\tau|^p \quad (\text{mod } 1) .$$

Par suite

$$|x\theta^n - (\theta - 1)\left(\varepsilon_{n-p}\,\theta^p + \ldots + \frac{\varepsilon_{n+p}}{\theta^p}\right)| \leqslant \frac{1}{\theta^p} + 2(s - 1)\,\frac{|\tau|}{1 - |\tau|}\,|\tau|^p$$

$$|x\theta^n - (\theta - 1)\left(\varepsilon_{n-p}\,\theta^p + \ldots + \frac{\varepsilon_{n+p}}{\theta^p}\right)| = O\left(|\tau|^p\right) .$$

Ainsi, le point $x\theta^n$ se trouve à l'intérieur d'un intervalle centré au point $T_{n,p} = (\theta - 1)\left(\varepsilon_{n-p}\,\theta^p + \ldots + \frac{\varepsilon_{n+p}}{\theta^p}\right)$ et de longueur $O\left(|\tau|^p\right)$. Or d'après le lemme 6, les points $T_{n,p}$ sont au nombre de $O\left((2p + 1)^{2(\nu+1)^2}\right)$. Les points $x\theta^n$ sont donc enfermés dans une réunion d'intervalles dont la mesure totale est $O\left(|\tau|^p\, p^{2(\nu+1)^2}\right)$. Pour p suffisamment grand, cette mesure est inférieure à 1. La suite $x\theta^n$ (mod 1) n'est donc pas dense sur $[0 , 1]$ et cela démontre la première partie du théorème 4.

La seconde partie découle du fait que la mesure dans la dimension h $(0 < h \leqslant 1)$ de la réunion d'intervalles considérée précédemment est

$$O\left(|\tau|^{ph}\, p^{2(\nu+1)^2}\right) = o(1) .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARY (N. K.) [BARI (Nina)]. - A treatise on trigonometric series, Vol. 1 and 2. Translated by Margaret F. Mullins. - Oxford, London, Pergamon Press, 1964.

[2] DAVENPORT (H.), ERDÖS (P.) and LEVEQUE (W. J.). - On Weyl's criterion for uniform distribution, Mich. math. J., t. 10, 1963, p. 311-314.

[3] KAHANE (J.-P.) et SALEM (R.). - Ensembles parfaits et séries trigonométriques. - Paris, Hermann, 1963 (Act. scient. et ind., 1301).

[4] MENDÈS FRANCE (Michel). - A set of nonnormal numbers, Pacific J. Math. (à paraître).

[5] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. Scuola norm. sup. di Pisa, Série 2, t. 7, 1938, p. 205-248.

[6] PISOT (Charles). - Répartition (mod 1) des puissances successives des nombres réels, Comment. math. Helvet., t. 19, 1946-47, p. 153-160.

[7] SALEM (Raphaël). - Rectifications to the papers : Sets of uniqueness and sets of multiplicity, Trans. Amer. math. Soc., t. 63, 1948, p. 595-598.

[8] SALEM (R.) et ZYGMUND (A.). - Sur un théorème de Piatetçki-Shapiro, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 240, 1955, p. 2040-2042.