Mohamed Amara

Sur un ensemble remarquable de nombres algébriques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 6, n° 2 (1964-1965), exp. n° 10, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1964-1965__6_2_A1_0>

15 mars 1965

SUR UN ENSEMBLE REMARQUABLE DE NOMBRES ALGÉBRIQUES

par Mohamed AMARA

Nous nous proposons de déterminer les plus petits éléments de l'ensemble fermé S_q des nombres algébriques réels supérieurs à l'unité, étudié par C. PISOT. De plus, nous établirons quelques propriétés des ensembles dérivés $S_q^{(n)}$, et nous en déduirons en particulier que S_q ne possède pas de dérivé d'ordre transfini.

Rappelons que tout nombre θ de S_q est défini par la fraction rationnelle :

$$\frac{A(z)}{Q(z)} = u_0 + u_1 z + \ldots + u_n z^n + \ldots = (u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots) ,$$

$$Q(o) = q \text{ entier positif non nul} \quad \text{et} \quad u_0 \geqslant 1 ,$$

ayant un seul pôle $\frac{1}{\theta}$ dans $|z| \leqslant 1$, vérifiant $|A(z)| \leqslant |Q(z)|$ sur $|z| = 1$. De plus, les polynômes $A(z)$ et $Q(z)$ sont pris à coefficients entiers rationnels.

C. PISOT a étudié les développements $(1, \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \ldots)$, et a montré que les éléments de S_q correspondants sont les nombres θ', θ'_n, et $\hat{\theta}'_n$, respectivement zéros des polynômes :

$$P'(z) \equiv q + z - qz^2$$

$$P'_n(z) \equiv q(1 - z^2) + z^n[q + z - qz^2] , \qquad n \geqslant 1$$

$$\hat{P}'_n(z) \equiv q(1 - z^2) - z^n[q + z - qz^2] , \qquad n \geqslant 1 .$$

Le nombre θ' est le seul point d'accumulation des nombres θ'_n et $\hat{\theta}'_n$, et nous avons :

$$\ldots < \theta'_n < \theta'_{n+1} < \ldots < \theta' < \ldots < \hat{\theta}'_{n+1} < \hat{\theta}'_n < \ldots .$$

Nous noterons par T_1, l'ensemble des nombres θ', θ'_n, $\hat{\theta}'_n$. Nous verrons plus tard comment, à partir de l'étude de T_1, C. PISOT a déterminé les quatre plus petits éléments de S_q.

Nous dépasserons ses résultats en nous intéressant, en plus de l'ensemble T_1, aux éléments de S_q définis par les développements $(1, \frac{1}{q}, \frac{2}{q^2}, \ldots, u_n, \ldots)$. Nous considérerons en particulier les nombres θ_n et $\hat{\theta}_n$, zéros des polynômes $P_n(z)$ et $\hat{P}_n(z)$ définis par les relations suivantes :

$$(1-z^2)P_{2n}(z) \equiv A^*(z)-z^{2n}P^*(z) \ , \ n \geqslant 1 \ ; \quad (1-z)P_{2n+1}(z) \equiv A^*(z)-z^{2n+1}\, P^*(z) , \quad n \geqslant 0$$

$$\hat{P}_{2n}(z) \equiv A^*(z)+z^{2n}P^*(z) \ , \ n \geqslant 1 \ ; \quad (1+z)\hat{P}_{2n+1}(z) \equiv A^*(z)+z^{2n+1}P^*(z) \ , \quad n \geqslant 0$$

où $P^*(z)$ et $A^*(z)$ désignent respectivement les polynômes :

$$P^*(z) \equiv q - 1 + qz - (q-2)z^2 - qz^3 ,$$
$$A^*(z) \equiv q + (q-1)z - (q-1)z^2 - (q-1)z^3 .$$

Le nombre θ^* , défini par

$$\frac{A^*(z)}{Q^*(z)} \equiv (1 , \frac{1}{q} , \frac{2}{q^2} , \ldots , u_n , \ldots) \ ; \qquad Q^*(z) \equiv - z^3\, P^*(1/2) ,$$

est le seul point d'accumulation des nombres θ_n et $\hat{\theta}_n$ qui vérifient les inégalités suivantes :

$$\ldots < \theta_n < \theta_{n+1} < \ldots < \theta^* < \ldots < \hat{\theta}_{n+1} < \hat{\theta}_n .$$

Nous montrerons que la famille des éléments de S_q inférieurs à θ^* ($\theta^* = \theta'$ pour $q = 1$) contient, en plus de certains nombres θ'_n (tous les éléments θ'_n pour $q = 1$), les nombres θ_n et un nombre particulier θ'' , racine du polynôme:

$$P''(z) \equiv q - z - (q-2)z^2 - z^3 + z^3(1 + (q-2)z + 2z^2 - qz^3) .$$

Nous verrons de plus que les nombres de S_q , qui sont supérieurs à θ^* , mais suffisamment voisins de θ^* , appartiennent aux familles des $\hat{\theta}_n$ et des θ'_n (des $\hat{\theta}'_n$ pour $q = 1$). Nous en déduisons le fait que θ^* est le plus petit élément de l'ensemble dérivé S'_q , et de plus que c'est un élément isolé.

Tous ces résultats seront basés sur le problème des coefficients, étudié par J. DUFRESNOY et C. PISOT, d'une fonction $f(z)$ méromorphe dans $|z| \leqslant 1$, ayant le pôle simple et unique $\frac{1}{\theta}$ dans $|z| \leqslant 1$, et vérifiant $|f(z)| \leqslant 1$ sur $|z| = 1$.

Soit $(u_0 , u_1 , \ldots , u_n , \ldots)$ le développement de $f(z)$ autour de l'origine. Nous savons que l'on peut trouver deux polynômes $E_n(z)$ et $E^*_n(z)$, avec $E_n(o)=1$ et $E^*_n(o) = -1$, de degré n tel que, si l'on pose

$$D_n(z) = - z^n\, E_n(1/z) ,$$
$$D^*_n(z) \equiv z^n\, E^*_n(1/z) ,$$

les développements de $\frac{D_n}{E_n}$ et $\frac{D^*_n}{E^*_n}$ coïncident avec celui de $f(z)$ jusqu'au terme en z^{n-1} , et que

$$\frac{D_n(z)}{E_n(z)} \equiv (u_0 , u_1 , \dots , u_{n-1} , w_n , \dots)$$

$$\frac{D_n^*(z)}{E_n^*(z)} \equiv (u_0 , u_1 , \dots , u_{n-1} , w_n^* , \dots) ,$$

w_n et w_n^* étant déterminés de manière unique, et vérifiant

$$w_n \leqslant u_n \leqslant w_n^* .$$

De plus, les polynômes $D_n(z)$ et $D_n^*(z)$ ont chacun un zéro, et un seul, extérieur au cercle-unité. Ces zéros τ_n et τ_n^* vérifient les inégalités

$$1 < \tau_n \leqslant \theta \leqslant \tau_n^* .$$

Ces résultats sont valables pour $n \geqslant 3$, et seulement pour $s \geqslant n \geqslant 3$, dans le cas où la fonction $f(z)$ s'écrit

$$f(z) \equiv \frac{u(z)}{u(z)} \qquad \text{avec} \quad u(z) = \varepsilon z^s \, \nu(1/z) , \qquad \varepsilon = \pm 1$$

($f(z)$ étant dite de rang fini s), et certains le restent même pour $n = 1$ et $n = 2$.

Etant donné θ de S_q , défini par le développement $(u_0 , u_1 , u_n , \dots)$, nous formons les polynômes D_n , D_n^* correspondants, et nous utiliserons les deux propriétés suivantes :

Première propriété. - Lorsque $u_0 , u_1 , \dots , u_{n-1}$ sont connus et que $s \geqslant n$ (dans le cas où θ est défini par une fraction de rang fini s), nous déterminons le polynôme $D_n(z)$. Nous en déduirons la valeur de w_n . Nous devons avoir $u_n \geqslant w_n$, l'égalité entraînant $\theta = \tau_n$.

Deuxième propriété. - Nous formons ensuite le polynôme $D_{n+1}(z)$ par la relation de récurrence

$$D_{n+1}(z) \equiv (1 + z) \, D_n(z) - z \, \frac{u_n - w_n}{u_{n-1} - w_{n-1}} \, D_{n-1}(z) .$$

Nous devons avoir $D_{n+1}(1) \geqslant 0$, condition équivalente à $u_n \leqslant w_n^*$, l'égalité entraînant

$$\theta = \tau_n^* \qquad \text{et} \qquad D_{n+1}(z) \equiv (1 - z) \, D_n^*(z) .$$

Si les deux inégalités strictes, $u_n > w_n$ et $D_{n+1}(1) > 0$, sont satisfaites, nous avons $s \geqslant n + 1$, dans le cas où $f(z)$ est de rang fini.

Nous allons maintenant appliquer systématiquement les propriétés des polynômes $D_n(z)$ et $D_n^*(z)$ associés aux fractions rationnelles définissant les nombres de S_q inférieurs à $\hat{\theta}_1$, zéro du polynôme :

$$\hat{P}_1(z) \equiv \frac{A^*(z) + z\,P^*(z)}{1 + z} \equiv q + (q - 2)z - (q - 3)z^2 - qz^3 .$$

Signalons les inégalités :

$$\hat{\theta}_1 < \theta' < 1 + \frac{1}{q} \qquad \text{pour} \quad q \geqslant 2 ,$$

$$\theta' = \theta^* < \hat{\theta}_1 < 2 \qquad \text{pour} \quad q = 1 .$$

LEMME 1. - <u>La fraction rationnelle, associée à tout nombre</u> θ <u>de</u> S_q <u>inférieur à</u> $\hat{\theta}_1$, <u>admet, au voisinage de l'origine, le développement suivant</u> :

$$\frac{A(z)}{Q(z)} = (1\ ,\ \frac{1}{q}\ ,\ u_2\ ,\ \dots\ ,\ u_n\ ,\ \dots) \qquad \text{avec} \quad 1 \leqslant q^2\,u_2 \leqslant 2 .$$

Pour tout élément de S_q , les coefficients u_n sont tels que $q^{n+1}\,u_n$ est entier rationnel, et il en est de même pour $q^n\,u_n$, si $u_0 = 1$.

Nous formons le polynôme $D_1(z) = u_0 - z$. Nous en déduisons que $\tau_1 = u_0 < \theta$; comme $\theta < \hat{\theta}_1 < 1 + \frac{1}{q}$, nous obtenons $qu_0 < q\theta < q + 1$. Or, par définition même de S_q , $qu_0 \geqslant q$, il s'ensuit que

$$u_0 = 1 .$$

Nous déterminons ensuite le polynôme $D_2(z) \equiv 1 + \frac{u_1}{2}\,z - z^2$, et nous obtenons $w_2 = \frac{u_1^2}{2}$. $D_2(z)$ admettant une seule racine τ_2 vérifiant, pour $q \geqslant 2$,

$$\tau_2 < \theta < \hat{\theta}_1 < \theta' ,$$

nous obtenons :

$$qD_2(\theta') \equiv (q\,\frac{u_1}{2} - 1)\theta' < 0 ,$$

soit

$$qu_1 < 2 .$$

Puisque qu_1 est un entier rationnel non nul (car, si $u_1 = 0$, $\frac{A(z)}{Q(z)}$, en appliquant le théorème de Rouché au polynôme $A(z) - Q(z)$, admettrait au moins deux pôles à l'intérieur du cercle-unité, ce qui est impossible), nous obtenons

$$qu_1 = 1 ;$$

mais, si $q = 1$, nous écrivons que $D_2(2) < 0$, ce qui donne $1 \leqslant u_1 \leqslant 2$.

Nous utilisons ensuite le polynôme $D_3(z)$:

$$D_3(z) = (1 + z)(1 + \frac{u_1}{2} z - z^2) - z \frac{u_2 - u_1^2/2}{u_1} (1 - z) .$$

Pour $u_1 = 2$ et $u_2 \geqslant 3$, $D_3(z)$ admettrait un zéro supérieur à $\hat{\theta}_3$. En limitant, pour $q = 1$, notre étude aux nombres $\theta < \hat{\theta}_3$, nous obtenons $u_2 \leqslant 2$. De plus, nous avons $u_2 \geqslant w_2 = \frac{u_1^2}{2} = 2$, soit en définitive $w_2 = u_2 = 2$ et $\theta = \theta'$.

qu_1 étant égal à l'unité, l'expression du polynôme $D_3(z)$ devient

$$D_3(z) \equiv (1 + z)(1 + \frac{1}{2q} z - z^2) - z(qu_2 - \frac{1}{2q})(1 - z) .$$

A partir de la relation

$$\hat{P}_1(z) - q\, D_3(z) \equiv (q^2 u_2 - 3)\, z(1 - z) ,$$

nous en déduisons, pour $q^2 u_2 \geqslant 3$, les inégalités

$$\hat{\theta}_1 \leqslant \tau_3 < \theta .$$

Puisque nous limitons notre étude aux nombres de S_q inférieurs à $\hat{\theta}_1$, il s'ensuit que

$$q^2 u_2 \leqslant 2 .$$

De plus, nous savons que $u_2 \geqslant w_2 = \frac{u_1^2}{2} = \frac{1}{2q^2}$, soit en définitive

$$1 \leqslant q^2 u_2 \leqslant 2 .$$

LEMME 2. - <u>Les seuls éléments de S_q définis par les développements</u>

$$(1 , \frac{1}{q} , \frac{1}{q^2} , \ldots , u_n , \ldots)$$

<u>sont les nombres</u> θ' , θ'_n , <u>et</u> $\hat{\theta}'_n$.

Soit $f(z) = \frac{A(z)}{Q(z)} = (1 , \frac{1}{q} , \frac{1}{q^2} , \ldots , u_n , \ldots)$.

Effectuons sur $f(z)$ la transformation suivante :

$$f_1(z) \equiv \frac{(q - z - qz^2)\, f(z) - q(1 - z^2)}{(q + z - qz^2) - q(1 - z^2)\, f(z)} = \frac{\lambda z^3 + \ldots}{-\frac{1}{q} z^2 + \ldots} .$$

Sur $|z| = 1$, nous avons

$$|q + z - qz^2| = |1 - q(z - \frac{1}{z})| > q|z - \frac{1}{z}| = q|1 - z^2| ,$$

et $|f_1(z)| \leqslant 1$. D'après le théorème de Rouché, le dénominateur de $f_1(z)$, après multiplication par $Q(z)$, admet dans $|z| \leqslant 1$ le même nombre de racines que $Q(z)(q + z - qz^2)$, soit deux racines. Or, il en a déjà deux racines en $z = 0$, donc il n'en a pas d'autres. En simplifiant par z^2 , $f_1(z)$ devient holomorphe dans, et sur, le cercle-unité. De plus, après multiplication par $Q(z)$, numérateur et dénominateur de $f_1(z)$ sont des polynômes à coefficients entiers rationnels, et le terme constant du dénominateur vaut 1 . Donc, le développement de Taylor de $f_1(z)$ est à coefficients entiers rationnels, et comme $f_1(z)$ est holomorphe et borné par 1 dans $|z| \leqslant 1$, il s'ensuit, d'après le principe du maximum, que

$$f_1(z) \equiv 0 \qquad \text{ou} \qquad f_1(z) = \varepsilon z^n \quad (\varepsilon = \pm 1) .$$

Le premier cas donne $\frac{A(z)}{Q(z)} \equiv \frac{q(1 - z^2)}{q - z - qz^2}$, qui correspond à $\theta = \theta'$; les autres cas donnent

$$\frac{A(z)}{Q(z)} \equiv \frac{q(1 - z^2) + \varepsilon z^n(q + 2 - qz^2)}{(q - z - qz^2) + \varepsilon q z^n(1 - z^2)} ,$$

qui correspondent à θ'_n pour $\varepsilon = + 1$, et à $\hat{\theta}'_n$ pour $\varepsilon = - 1$.

Les nombres θ , définis par les développements $(1 , \frac{1}{q} , \frac{1}{q^2} , \ldots , u_n , \ldots)$, étant complètement déterminés, nous nous intéresserons dorénavant à l'ensemble T_2 des éléments de S_q définis par $(1 , \frac{1}{q} , \frac{2}{q^2} , \ldots)$ et inférieurs à $\hat{\theta}_1$.

Remarquons que nous avons la relation

$$P_2(z) - q\, D_3(z) \equiv (q^2 u_2 - 2)\, z(1 - z) .$$

Nous en déduisons que, si θ est inférieur à θ_2 , il appartient à l'ensemble T_1, et un calcul simple montre que les seuls nombres de T_2 , inférieurs à θ_2 , sont $\theta_1 = \theta'_1$, θ'_2 , et θ'_3 . Nous obtenons ainsi les quatre plus petits éléments de S_q, à savoir θ'_1 , θ'_2 , θ'_3 , et θ_2 , déterminés déjà par C. PISOT.

Avant de poursuivre l'étude de l'ensemble T_2 , nous établissons le lemme suivant :

LEMME 3. - Soient $A(z)$, $A_1(z)$, $Q(z)$, $Q_1(z)$, polynômes à coefficients entiers rationnels tels que :

$$\frac{A(z)}{Q(z)} = (u_0 , u_1 , \dots , u_n , \dots)$$

$$\frac{A_1(z)}{Q_1(z)} = (u_0^{(1)} , u_1^{(1)} , \dots , u_n^{(1)} , \dots)$$

$$Q(z) = q + q_1 z + \dots$$

$$Q_1(z) = q + q_1^{(1)} z + \dots .$$

Supposons que $u_n = u_n^{(1)}$, pour $n < N$, et $u_N \neq u_N^{(1)}$. Nous avons alors $k_N = q^2(u_N - u^{(1)})$ entier rationnel, et il en est de même pour

$$k_{N+1} = q^2(u_{N+1} - u_{N+1}^{(1)}) - 4\frac{k_N}{q} ,$$

si $\dfrac{A_1(z)}{Q_1(z)} \equiv \dfrac{A^*(z)}{Q^*(z)}$ et $N \geqslant 3$.

Posons :

$$K_N(z) = \frac{1}{z^N}[AQ_1 - QA_1] = k_N + k'_N z + \dots ,$$

$$H(z) = Q(z).Q_1(z) = q^2 + q(q_1 + q_1^{(1)})z + \dots .$$

Les polynômes $K_N(z)$ et $H(z)$ sont à coefficients entiers rationnels tels que

$$\frac{K_N(z)}{H(z)} = (u_N - u_N^{(1)} , u_{N+1} - u_{N+1}^{(1)} , \dots) .$$

Comme $H(o) = q^2$, nous avons $K_N(o) = k_N = q^2(u_N - u_N^{(1)})$ entier rationnel. De plus,

$$k'_N = q^2(u_{N+1} - u_{N+1}^{(1)}) + \frac{k_N}{q}(q_1 + q_1^{(1)}) ,$$

ou encore

$$k'_N = k_{N+1} + k_N\left(\frac{4 + q_1 + q_1^{(1)}}{q}\right) .$$

Or, si nous supposons que $\dfrac{A_1(z)}{Q_1(z)} = \dfrac{A^*(z)}{Q^*(z)}$ et $N \geqslant 3$, nous obtenons

$$q_1^{(1)} = q - 2 ,$$

$$\frac{A(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots}{q + q_1 z + q_2 z^2 + \dots} = (1 , \frac{1}{q} , \frac{2}{q^2} z^2 , \dots) ,$$

soit, par identification,

$$q(a_2 - q_2) = q_1 + 2 ,$$

et l'expression de k'_N devient

$$k'_N = k_{N+1} + (1 + a_2 - q_2)k_N ,$$

et il s'ensuit que k_{N+1} est entier rationnel.

Soit θ un élément de l'ensemble T_2 ; pour calculer les polynômes $D_n(z)$ et $D^*_n(z)$ associés à la fraction rationnelle $\frac{A(z)}{Q(z)}$ définissant θ , nous utilisons les polynômes $P_n(z)$ et $\hat{P}_n(z)$ dont les expressions ont été données dans l'introduction.

Considérons les développements en série entière suivants :

$$\frac{A(z)}{Q(z)} \equiv (1 , \frac{1}{q} , \frac{2}{q^2} , \ldots , u_n , \ldots) ,$$

$$\frac{A^*(z)}{Q^*(z)} \equiv (1 , \frac{1}{q} , \frac{2}{q^2} , \ldots , v_n , \ldots) .$$

Soit N un entier tel que $u_n = v_n$ pour $n < N$, et $u_N \neq v_N$. Nous voyons que $N \geqslant 3$. D'autre part, si $\frac{A(z)}{Q(z)}$ est de rang fini s , nous avons $s \geqslant N$. Pour cela, il suffit d'appliquer le théorème de Rouché au polynôme

$$A(z).Q^*(z) - A^*(z).Q(z) \equiv q^2(u_N - v_N)z^N + \ldots ; \qquad A(z) = \varepsilon z^s\, Q(1/z) .$$

Puisque $N \geqslant 3$ et $s \geqslant N$, dans le cas où $\frac{A(z)}{Q(z)}$ est de rang fini, les polynômes $D_N(z)$ et $D^*_N(z)$ sont déterminés d'une manière unique, et admettent sans aucune restriction les propriétés signalées.

Nous devons distinguer deux cas, suivant que N est pair ou impair.

(A) <u>Premier cas</u>. - $N = 2p$ avec $p \geqslant 2$.

Il est facile de vérifier que

$$q(1 + z)\, D_{2p}(z) \equiv P_{2p}(z) + \frac{p + 2}{p + 1}\, z.P_{2p-2}(z) ,$$

$$w_{2p} = v_{2p} - \frac{1}{q^2}\,\frac{p + 2}{p + 1} .$$

Il résulte, d'après la première propriété des $D_n(z)$, que

$$u_{2p} \geqslant w_{2p} = v_{2p} - \frac{1}{q^2}\frac{p+2}{p+1} ,$$

soit

$$q^2(u_{2p} - v_{2p}) \geqslant - \frac{p+2}{p+1} ;$$

or, $k_{2p} = q^2(u_{2p} - v_{2p})$ est entier rationnel, d'après le lemme 3 ; il vient que

$$-1 \leqslant k_{2p} .$$

Nous formons ensuite le polynôme

$$D_{2p+1}(z) \equiv (1 + z)\, D_{2p}(z) - z\, \frac{u_{2p} - w_{2p}}{u_{2p-1} - w_{2p-1}}\, D_{2p-1}(z) ,$$

avec $q.D_{2p-1}(z) \equiv P_{2p-2}(z)$ et $u_{2p-1} - w_{2p-1} \equiv v_{2p-1} - w_{2p-1} = \frac{1}{q^2}$. En utilisant la deuxième propriété, soit $D_{2p+1}(1) \geqslant 0$, il s'ensuit que

$$k_{2p} \leqslant \frac{p}{p-1} .$$

Sauf dans le cas $p = 2$, où l'égalité $k_{2p} = 2$ est possible, l'entier k_{2p} admet seulement les valeurs -1 et $+1$.

(a) $k_{2p} = 2$ avec $p = 2$. - Mais nous avons alors $D_{2p+1}(1) = 0$, et la 2e propriété des $D_n(z)$ donne

$$D_{2p+1}(z) \equiv (1 - z)\, D^*_{2p}(z) \qquad \text{et} \qquad \theta = \tau^*_{2p} ,$$

et un calcul simple montre que

$$D_{2p+1}(z) \equiv \hat{P}_{2p-1}(z) - z\, P_{2p-2}(z) .$$

Soit $D_5(\hat{\theta}_1) > -\hat{\theta}_1\, P_2(\hat{\theta}_1) > 0$; il en résulte que $D^*_4(\hat{\theta}_1) < 0$, condition équivalente à $\hat{\theta}_1 < \tau^*_4 = \theta$. Le cas $k_{2p} = 2$ est à éliminer, puisque nous limitons notre étude aux nombres $\theta < \hat{\theta}_1$.

(b) $k_{2p} = +1$. - Dans ce cas, le polynôme $D_{2p+1}(z)$ se met sous la forme plus simple :

$$q.D_{2p+1}(z) \equiv P_{2p}(z) - z\, P_{2p-2}(z) \equiv \hat{P}_{2p-1}(z) ;$$

nous en déduisons :

$$w_{2p+1} = v_{2p+1} - \frac{2(q-2)}{q^3} ,$$

soit, d'après la première propriété,

$$k_{2p+1} = q^2(u_{2p+1} - v_{2p+1}) - \frac{4}{q} \geqslant - 2 .$$

Nous formons ensuite le polynôme

$$D_{2p+2} \equiv (1 + z)\, D_{2p+1}(z) - z\, \frac{u_{2p+1} - w_{2p+1}}{u_{2p} - w_{2p}}\, D_{2p}(z) \ ;$$

il en résulte, d'après la deuxième propriété,

$$k_{2p+1} \leqslant - 2 + \frac{4p + 6}{p^2 + p - 1} .$$

k_{2p+1} étant entier rationnel d'après le lemme 3, et vérifiant les inégalités

$$- 2 \leqslant k_{2p+1} \leqslant - 2 + \frac{4p + 6}{p^2 + p - 1} ,$$

nous avons les deux cas suivants :

(α) $k_{2p+1} = - 2$, mais alors $u_{2p+1} = w_{2p+1}$, soit $\theta = \tau_{2p+1} = \hat{\theta}_{2p-1}$;

(β) $k_{2p+1} \geqslant - 1$, avec $p \leqslant 4$.

Si nous exprimons la valeur de $D_{2p+2}(z)$ pour $z = \hat{\theta}_{2p-1}$, il vient :

$$D_{2p+2}(\hat{\theta}_{2p-1}) = - \frac{p + 1}{2p + 3}\, (k_{2p+1} + 2)\, \hat{\theta}_{2p-1}\, D_{2p}(\hat{\theta}_{2p-1}) > 0 \ ;$$

il en résulte alors les inégalités

$$\theta > \tau_{2p+2} > \hat{\theta}_{2p-1} > \hat{\theta}_7 .$$

Nous éliminons ce dernier en nous bornant dorénavant aux nombres de S_q inférieurs à $\hat{\theta}_7$.

(c) $k_{2p} = - 1$. - Nous obtenons $q\, D_{2p+1}(z) \equiv P_{2p-1}(z)$, d'où

$$w_{2p+1} = v_{2p+1} + \frac{2(q - 2)}{q^3} .$$

Nous formons ensuite le polynôme :

$$D_{2p+2}(z) \equiv (1 + z)\, D_{2p+1}(z) - (p + 1)\Big(q^2(u_{2p+1} - v_{2p+1}) + \frac{4}{q} - 2\Big) z\, D_{2p}(z) .$$

Les deux principales propriétés des polynômes $D_n(z)$ donnent les inégalités :

$$2 \leqslant k_{2p+1} = q^2(u_{2p+1} - v_{2p+1}) + \frac{4}{q} \leqslant 2 + \frac{2(2p - 1)}{p^2 + p - 1} .$$

Les deux inégalités bornant les valeurs de l'entier k_{2p+1} montrent que

(α) ou bien $k_{2p+1} = 2$, soit $u_{2p+1} = w_{2p+1}$, ce qui entraîne $\theta = \theta_{2p-1}$,

(β) ou bien $k_{2p+1} \geqslant 3$, avec $p = 2$;

l'étude de ce dernier cas ($s \geqslant 2p + 2 = 6$ si $\frac{A(z)}{Q(z)}$ est de rang fini) se poursuit de la même façon. Nous obtenons :

$$q.D_6(z) \equiv q - z - (q - 2)z^2 + (q - 2)z^4 + 2z^5 - qz^6 .$$

Nous utilisons ensuite le polynôme

$$D_7(z) \equiv (1 + z)\, D_6(z) - zq^2(u_6 - w_6)\, D_5(z) .$$

L'inégalité $D_7(1)$ est équivalente à

$$q^2(u_6 - w_6) \leqslant \frac{2}{3} ,$$

et, d'après la première propriété, $q^2(u_6 - w_6) \geqslant 0$; ce nombre entier rationnel, en vertu du lemme 3, est alors nécessairement nul. Nous en concluons que $\theta = \tau_6$, racine du polynôme $D_6(z)$; c'est le nombre que nous avons représenté par θ'' dans l'introduction.

(B) <u>Deuxième cas</u>. - $N = 2p + 1$, avec $p \geqslant 1$.

Il est facile de voir que

$$q.D_{2p+1}(z) \equiv P_{2p}(z) , \qquad \text{d'où} \quad w_{2p+1} = v_{2p+1} - \frac{1}{q^2} ,$$

et nous en déduisons, à partir de la première propriété,

$$k_{2p+1} = q^2(u_{2p+1} - v_{2p+1}) \geqslant - 1 .$$

Nous formons ensuite le polynôme :

$$D_{2p+2}(z) \equiv (1 + z)\, D_{2p+1}(z) - z\, \frac{u_{2p+1} - w_{2p+1}}{w_{2p} - w_{2p}}\, D_{2p}(z) ,$$

où $D_{2p}(z)$ désigne le même polynôme que celui que nous avons utilisé au début de l'étude du premier cas.

Remarquons que nous avons $u_{2p} - w_{2p} = v_{2p} - w_{2p} \equiv \frac{1}{q^2}\,\frac{p + 2}{p + 1}$, d'où

$$D_{2p+2}(z) \equiv (1 + z)\, D_{2p+1}(z) - \frac{p+1}{p+2}\,(k_{2p+1} + 1) z\, D_{2p}(z) .$$

En exprimant la deuxième propriété, soit $D_{2p+2}(1) \geqslant 0$, il vient :

$$k_{2p+1} \leqslant 1 + \frac{2(p+1)}{p^2 + p - 1} .$$

Les deux inégalités bornant les valeurs possibles de l'entier non nul k_{2p+1} montrent que nous devons examiner successivement :

(a) $k_{2p+1} = -1$, mais alors $u_{2p+1} = w_{2p+1}$, d'où $\theta = \tau_{2p+1} = \theta_{2p}$,

(b) $k_{2p+1} \geqslant 2$, avec $p \leqslant 2$.

En exprimant la valeur de $q(1 + z)\, D_{2p+2}(z)$ pour $z = \hat{\theta}_{2p}$, il vient :

$$q[1 + \hat{\theta}_{2p}]\, D_{2p+2}(\hat{\theta}_{2p}) \geqslant [1 + \hat{\theta}_{2p}(2 - \frac{p+1}{p+2}\,(k_{2p+1} + 1)) - k_{2p+1}\, \hat{\theta}^2_{2p}]\, P_{2p}(\hat{\theta}_{2p})$$
$$> 0 .$$

Nous en déduisons les inégalités

$$\theta > \tau_{2p+2} > \hat{\theta}_{2p} \geqslant \hat{\theta}_4 .$$

Ce cas doit être écarté, puisque nous avons limité notre étude aux nombres

$$\theta < \hat{\theta}_7 < \hat{\theta}_4 .$$

(c) $k_{2p+1} = 1$. - L'étude de ce cas (où $s \geqslant 2p + 2$, quand $\frac{A(z)}{Q(z)}$ est de rang fini) se poursuit toujours de la même façon. Le polynôme $D_{2p+2}(z)$ admet ici une forme plus simple, soit

$$q(1 + z)\, D_{2p+2}(z) \equiv \hat{P}_{2p}(z) + \frac{2z}{p+2}\, P_{2p}(z) ,$$

d'où

$$q^2(w_{2p+2} - v_{2p+2}) = + \frac{4}{q} - (2 + \frac{4}{p+2}) ,$$

et la première propriété donne

$$- 2 - \frac{4}{p+2} \leqslant k_{2p+2} = q^2(u_{2p+2} - v_{2p+2}) - \frac{4}{q} .$$

Nous formons ensuite le polynôme $D_{2p+3}(z)$, soit

$$q.D_{2p+3}(z) \equiv \hat{P}_{2p}(z) - z\, \frac{k_{2p+2} + 2}{2}\, P_{2p}(z) .$$

Il en résulte (deuxième propriété) :

$$k_{2p+2} \leqslant -2 + \frac{4}{p} .$$

Les deux inégalités bornant les valeurs possibles de l'entier k_{2p+2} , montrent que nous devons examiner successivement :

(α) $k_{2p+2} = -3$, avec $1 \leqslant p \leqslant 2$. - Le cas $p = 2$ nous donne $u_{2p+2} = w_{2p+2}$, soit $\theta = \tau_{2p+2} = \tau_6$; mais ce cas est à écarter puisque le polynôme $q\ D_6(z)$ n'est pas à coefficients entiers.

Tandis que, si $p = 1$, nous pouvons vérifier que

$$q(1 + \hat{\theta}_3)\ D_4(\hat{\theta}_3) = \hat{\theta}_3^2(\hat{\theta}_3^2 - 4\hat{\theta}_3 + 1)\ P^*(\hat{\theta}_3) > 0 ,$$

ce qui entraîne $\theta \geqslant \tau_4 > \hat{\theta}_3 > \hat{\theta}_7$. Notre étude étant limitée aux nombres inférieurs à $\hat{\theta}_7$, cette dernière possibilité est à éliminer.

(β) $k_{2p+2} \geqslant -1$, avec $p \leqslant 4$. - Nous avons alors

$$q\ D_{2p+3}(\hat{\theta}_{2p}) = -\hat{\theta}_{2p}\ \frac{k_{2p+2} + 2}{2}\ P_{2p}(\hat{\theta}_{2p}) > 0 ,$$

ce qui donne $\theta \geqslant \tau_{2p+3} > \hat{\theta}_{2p} \geqslant \hat{\theta}_8$. Nous éliminons ce cas, en limitant notre étude aux nombres θ inférieurs à $\hat{\theta}_8$.

(γ) $k_{2p+2} = -2$ (avec $s \geqslant 2p+3$, pour une fraction de rang fini). - Nous poursuivons notre étude de la même manière. Nous avons

$$q\ D_{2p+3}(z) = \hat{P}_{2p}(z) .$$

Nous formons ensuite le polynôme :

$$D_{2p+4} \equiv (1 + z)\ D_{2p+3}(z) - \frac{p + 2}{4}\ q^2(u_{2p+3} - w_{2p+3})z\ D_{2p+2}(z) .$$

Les deux propriétés principales des $D_n(z)$ donnent, pour l'entier $q^2[u_{2p+3}-w_{2p+3}]$,

$$0 \leqslant q^2[u_{2p+3} - w_{2p+3}] \leqslant \frac{8}{p + 1} ,$$

lesquelles inégalités nous conduisent à considérer les deux cas suivants :

- $q^2(u_{2p+3} - w_{2p+3}) = 0$, mais alors $\theta = \hat{\theta}_{2p}$,

- $q^2[u_{2p+3} - w_{2p+3}] \geqslant 1$, avec $p \leqslant 7$.

A partir de l'inégalité

$$D_{2p+4}(\hat{\theta}_{2p}) = \frac{-\hat{\theta}_{2p}^2 \, P_{2p}(\hat{\theta}_{2p})}{2(1+\hat{\theta}_{2p})} > 0 \ ,$$

nous en déduisons que

$$\theta \geqslant \tau_{2p+4} > \hat{\theta}_{2p} \geqslant \hat{\theta}_{14} \ .$$

Nous écarterons ce dernier cas, en nous limitant aux nombres de S_q inférieurs à $\hat{\theta}_{14}$.

L'ensemble de ces résultats est résumé dans le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - <u>Les nombres θ de S_q, inférieurs à $\hat{\theta}_{14}$, et qui n'appartiennent pas à l'ensemble T_1, sont les nombres θ_n, les nombres $\hat{\theta}_n$ où $n \geqslant 14$, le nombre θ''. Le nombre θ^* est le seul point d'accumulation des nombres $\theta \leqslant \hat{\theta}_{14}$.</u>

Nous allons poursuivre l'étude de l'ensemble fermé S_q par l'établissement de quelques propriétés de ces ensembles dérivés successifs $S_q^{(n)}$. R. SALEM a montré que, pour $q = 1$, les ensembles $S_q^{(n)}$ sont tous non vides, et il en sera encore de même pour $q \geqslant 1$.

Etant donnée une suite θ_μ de S tendant vers θ, nous lui associons la famille des fractions rationnelles $\frac{A_\mu(z)}{Q_\mu(z)}$ définissant les θ_μ. Nous savons que cette famille est compacte. Nous pouvons alors extraire une sous-suite tendant vers la fraction rationnelle $\frac{A(z)}{Q(z)}$, ayant $\frac{1}{\theta}$ comme unique pôle dans $|z| < 1$, et vérifiant les conditions pour que $\theta \in S_q$.

Désignons respectivement par τ et τ_μ les valeurs moyennes sur $|z| = 1$ de $|\frac{A(z)}{Q(z)}|^2$ et $|\frac{A_\mu(z)}{Q_\mu(z)}|^2$. Si nous introduisons les développements en série :

$$\left(\frac{1-\theta z}{z-\theta}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n \qquad \text{et} \qquad \frac{1-\theta z}{z-\theta} \cdot \frac{1-\theta_\mu z}{z-\theta_\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{\mu,n} z^n \ ,$$

nous obtenons, pour τ et τ_μ, les valeurs suivantes :

$$\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\sum_{p=0}^{n} \gamma_{n-p} u_p\Big]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\sum_{p=0}^{n} \gamma_{\mu,n-p} u_p\Big]^2 \ , \tag{1}$$

$$\tau_\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\sum_{p=0}^{n} \gamma_{\mu,n-p} u_{\mu,p}\Big]^2 \ . \tag{2}$$

En raison de (1), étant donné ε un nombre positif, nous pouvons déterminer un entier N tel que :

$$\sum_{n=0}^{N} [\sum_{p=0}^{n} \gamma_{n-p}\, u_p]^2 > \tau - \varepsilon .$$

Les $\gamma_{\mu,n}$ tendant vers γ_n , quel que soit n , quand μ augmente indéfiniment, on peut déterminer un entier m tel que, pour $\mu > m$, on ait :

(3)
$$\sum_{n=0}^{N} [\sum_{n=0}^{n} \gamma_{\mu,n-p}\, u_p]^2 > \tau - 2\varepsilon ,$$

d'où, en tenant compte de (2),

(4)
$$\sum_{n=N+1}^{\infty} [\sum_{p=0}^{n} \gamma_{\mu,n-p}\, u_p]^2 < 2\varepsilon .$$

Choisissons pour μ une valeur assez grande (et nécessairement supérieure à m) pour que

(5)
$$u_{\mu,p} = u_p \quad \text{pour} \quad p < N \qquad \text{et} \qquad u_{\mu,M} \neq u_M ,$$

M désignant un entier plus grand que N . Nous en déduisons, à partir du lemme 3, que

(5')
$$q^2 |u_{\mu,M} - u_M| \geqslant 1 .$$

Comme, de (5) et (5'), la relation (3) devient :

(6)
$$\sum_{n=0}^{N} [\sum_{n=0}^{n} \gamma_{\mu,n-p}\, u_{\mu,p}]^2 > \tau - 2\varepsilon ,$$

tandis que la relation

$$|\sum_{p=0}^{M} \gamma_{\mu,M-p}\, u_p| < \sqrt{2\varepsilon} ,$$

conséquence de l'inégalité (4), entraîne :

(7)
$$|\sum_{p=0}^{M} \gamma_{\mu,M-p}\, u_{\mu,p}| > \frac{\gamma_{\mu,0}}{q^2} - \sqrt{2\varepsilon} ,$$

les relations (2) , (6) , et (7) conduisent à l'inégalités

$$\tau_\mu > \tau - 2\varepsilon + (\frac{\gamma_{\mu,0}}{q^2} - \sqrt{2\varepsilon})^2 .$$

En faisant tendre μ vers l'infini, et en remarquant que $\gamma_{\mu,0}$ tend vers $\gamma_0 = \frac{1}{\theta^2}$, nous en déduisons

$$\underline{\lim}_{\mu \to +\infty} \tau_\mu \geqslant \tau + \frac{1}{(q\theta)^4} .$$

LEMME 4. - Soit une suite θ_μ de S_q tendant vers le nombre fini θ. Une suite partielle extraite de la suite $\frac{A_\mu(z)}{Q_\mu(z)}$ tendra vers $\frac{A(z)}{Q(z)}$, et pour cette suite partielle, nous avons :

$$\tau \leqslant \underline{\lim}_{\mu\to\infty} \tau_\mu - \frac{1}{(q\theta)^4} .$$

Nous en déduisons le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Si un nombre θ appartient à l'ensemble dérivé $S_q^{(n)}$, il existe un polynôme $A(z)$ à coefficients entiers tel que $A(o) \geqslant q$ et sur $|z| = 1$, nous avons $|A(z)| \leqslant |Q(z)|$, la valeur moyenne de $\left|\frac{A(z)}{Q(z)}\right|^2$ étant au plus égale à $1 - \frac{n}{(q\theta)^4}$.

La démonstration se fait par récurrence. La propriété étant vraie pour $n = 0$, nous la supposerons aussi vraie pour $n = h$, et nous l'établirons pour $n = h + 1$. Si θ appartient à $S_q^{(h+1)}$, il est limite d'une suite θ_μ de $S_q^{(h)}$. Les fractions rationnelles $\frac{A_\mu(z)}{Q_\mu(z)}$, associées aux θ_μ, donnent des valeurs moyennes $\tau_\mu \leqslant 1 - \frac{h}{(q\theta_\mu)^4}$. Nous aurons donc :

$$\underline{\lim}\, \tau_\mu \leqslant 1 - \frac{h}{(q\theta)^4} ,$$

et, d'après le lemme 4, la valeur moyenne de la fraction rationnelle $\frac{A(z)}{Q(z)}$ associée à la limite θ vérifie

$$\tau \leqslant 1 - \frac{h}{(q\theta)^4} - \frac{1}{(q\theta)^4} = 1 - \frac{h+1}{(q\theta)^4} .$$

Dans les hypothèses du théorème 2, nous avons, en particulier, $1 - \frac{n}{(q\theta)^4} > 0$, ce que nous pouvons énoncer sous la forme :

COROLLAIRE. - Le plus petit élément de l'ensemble $S_q^{(n)}$ est supérieur à $\frac{n^{1/4}}{q}$, et par conséquent augmente indéfiniment avec n.

Il n'existe aucun élément qui soit commun à tous les éléments dérivés d'ordre fini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMARA (Mohamed). - Sur un ensemble remarquable de nombres algébriques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260, 1965, p. 1052-1054.

[2] DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Sur les dérivés successifs d'un ensemble fermé d'entiers algébriques, Bull. Sc. math., 2e série, t. 77, 1953, 1re partie, p. 129-136.

[3] DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Etude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité ; application à un ensemble fermé d'entiers algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 72, 1955, p. 69-92.

[4] PISOT (Charles). - Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 81, 1964, p. 165-188.

[5] SALEM (Raphaël). - A remarkable class of algebraic integers. Proof of a conjecture of Vijayaraghavan, Duke math. J., t. 11, 1944, p. 103-108.

[6] SALEM (Raphaël). - Power series with integral coefficients, Duke math. J., t. 12, 1945, p. 153-172.