GÉRARD RAUZY

Fonctions entières prenant des valeurs entières

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 6, nº 1 (1964-1965), exp. nº 8, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1964-1965__6_1_A6_0>

Séminaire DELANGE-PISOT
(Théorie des Nombres)
6e année, 1964/65, n° 8

1er février 1965

FONCTIONS ENTIÈRES PRENANT DES VALEURS ENTIÈRES

par Gérard RAUZY

1. Ensemble de fréquence infinie. Extension d'un résultat de Borel.

1.1. - La fréquence d'un ensemble d'entiers naturels intervient dans de nombreuses questions mettant en jeu des relations de récurrence linéaires [6]. Nous dirons qu'un ensemble $\underset{\sim}{J} \subset \underset{\sim}{N}$ est de fréquence infinie, si, quel que soit $A > 1$, il existe une infinité d'entiers m tels que $n \in \underset{\sim}{J}$ pour tout n de l'intervalle $m \leqslant n < Am$.

Remarque. - Dans les questions relatives aux propriétés des fonctions entières prenant des valeurs données sur un ensemble partiel d'entiers $\underset{\sim}{J}$, intervient souvent la quantité :

$$\overline{\lim}(1/\mathrm{Log}\ r) \sum_{n\in \underset{\sim}{J}, n<r} 1/n .$$

Comme

$$\sum_{m\leqslant n<Am} 1/n = \mathrm{Log}\ A + o(1) ,$$

on voit qu'il existe des ensembles de fréquence infinie pour lesquels la quantité indiquée est nulle.

1.2. - Considérons maintenant une fonction holomorphe à l'infini et admettant au voisinage de ce point le développement :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n/z^{n+1} ,$$

et supposons u_n entier pour $n \in \underset{\sim}{J}$ où $\underset{\sim}{J}$ est un ensemble de fréquence infinie. Que peut-on dire alors de f ?

1.3. - Supposons tout d'abord que le rayon d'holomorphie de f soit inférieur à 1 : ceci entraîne (formule de Cauchy) que u_n est nul pour $n \in \underset{\sim}{J}$ assez grand, il n'en résulte évidemment pas que f est un polynôme en $1/z$ (comme ce serait le cas si $\underset{\sim}{J}$ était l'ensemble des entiers naturels), et on a le contre-exemple :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 1/(2z)^{\nu(k)} \qquad \text{où} \quad \nu(k) = 2^{(2^k)} .$$

Cependant, on peut dire, en un certain sens, que de telles fonctions sont les plus simples après les fonctions polynômes : OSTROWSKI a, en effet, montré [3] que $f(z)$ est alors univalente, et qu'il existe une suite (P_ν) de polynômes, telle que $P_\nu(1/z)$ converge uniformément vers f sur tout fermé, ne contenant pas l'origine, du domaine d'holomorphie de f .

Plus précisément, dire que l'ensemble $\underset{\sim}{J}$ est de fréquence infinie, c'est dire qu'il existe deux suites croissantes d'entiers (m_ν) et (m'_ν) telles que :

$$m'_\nu/m_\nu \to \infty \quad \text{quand} \quad \nu \to \infty , \qquad \text{et} \qquad m_\nu < n < m'_\nu \implies n \in \underset{\sim}{J} \ ;$$

on peut alors prendre comme polynôme P_ν le polynôme

$$P_\nu(x) = \sum_{n=0}^{m_\nu - 1} u_n/x^{n+1} .$$

Dans un certain voisinage de l'infini, on sait que $P_\nu(1/z)$ converge uniformément vers f , et la différence

$$f(z) - P_\nu(1/z) = \sum_{n>m'_\nu} u_n/z^{n+1}$$

est alors très petite en module. Par application du principe des 3 régions, on en déduit alors que, dans tout domaine fermé où f est prolongeable, f est limite uniforme des $P_\nu(1/z)$.

1.4. - Si nous appelons fonction d'Ostrowski la somme d'un polynôme $E(z)$ et d'une fonction $f(z)$ telle que celle du paragraphe précédent, c'est-à-dire admettant le développement

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n/z^{n+1} ,$$

où u_n est nul pour $n \in \underset{\sim}{J}$ de fréquence infinie, on voit aisément d'après le résultat précédent, qu'une fonction d'Ostrowski ne peut avoir de singularités isolées distinctes de l'origine, et qu'en particulier son rayon d'holomorphie coïncide avec son rayon de méromorphie.

On peut alors généraliser un résultat de BOREL [1] de la manière suivante :

THÉORÈME. - Soit $f(z)$ holomorphe à l'infini et admettant le développement $\sum_{n=0}^{\infty} u_n/z^{n+1}$. Soit ρ le rayon de méromorphie de f .

Si $\rho < 1$ et si u_n entier sur un ensemble $\underset{\sim}{J}$ de fréquence infinie, alors f est le quotient d'une fonction d'Ostrowski dont le rayon d'holomorphie est inférieur ou égal à ρ, par un polynôme à coefficients entiers dont les racines sont des entiers algébriques.

La démonstration utilise les majorations des déterminants de Hankel des u_n pour montrer que sur des intervalles $m_\nu \leqslant n \leqslant m'_\nu$ (définis de manière analogue à ceux de 1.3) les u_n vérifient des relations de récurrence linéaire à coefficients entiers. On montre alors, si à chaque entier ν on associe la relation de récurrence de plus bas degré vérifiée par u_n dans l'intervalle $m_\nu \leqslant n \leqslant m'_\nu$, le nombre de telles relations est borné, donc, pour une infinité de ν, la même relation est vérifiée. On en déduit que f est quotient d'une fonction d'Ostrowski de rayon d'holomorphie inférieur ou égal à ρ, par un polynôme à coefficients entiers. Les mêmes relations qui ont permis de borner le nombre de relations de récurrence permettent alors de montrer que les racines de ce polynôme sont des entiers algébriques.

1.5. - On peut se demander alors s'il est possible de généraliser le résultat de POLYA [4] sur les fonctions holomorphes en dehors d'un ensemble compact de diamètre transfini inférieur à 1 : cela est effectivement possible, mais la démonstration utilise des hypothèses plus fortes sur l'ensemble $\underset{\sim}{J}$.

Nous en donnons au paragraphe suivant un cas particulier simple, où le résultat est plus fort en apparence que dans la généralisation du théorème de Borel, mais, en fait, on voit aisément qu'une fonction d'Ostrowski méromorphe à l'origine est nécessairement égale à la somme d'un polynôme en z et en $1/z$.

2. Fonction holomorphe en dehors d'un cercle non centré à l'origine.

THÉORÈME. - Soit $f(z)$ une fonction holomorphe en dehors du cercle

$$|z - 1| \leqslant \rho_0 < 1 .$$

Soit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n / z^{n+1} ,$$

le développement de $f(z)$ autour du point à l'infini (valable donc pour

$$|z| > 1 + \rho_0 \qquad).$$

Alors, si u_n est entier pour $n \in \underset{\sim}{J}$ ensemble de fréquence infinie, $f(x)$ est une fraction rationnelle à coefficients entiers admettant pour seul pôle le point $z = 1$.

Démonstration.

2.1 LEMME. - Soient N et L deux entiers ($N \geqslant 1$ et $L \geqslant 0$) ; considérons le système de N équations aux N inconnues $x_0, \dots, x_{N-1}$

$$y_\ell = \sum_{\nu=0}^{N-1} x_\nu \binom{L+\ell}{\nu} \qquad \text{pour } \nu = 0, \dots, N-1$$

(en posant $\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$ si $n \geqslant 1$ et $\binom{x}{0} = 1$).

(a) Ce système est de CRAMER, et si les y sont entiers, il en est de même des x .

(b) On a

$$\max_{\nu=0,\dots,N-1} |x_\nu| \leqslant 2^{4N+L} \max_{\ell=0,\dots,N-1} |y_\ell| .$$

(c) $\forall K > 1$, $\exists C(K) > 0$ tel que si $L > C(K)N$, alors :

$$\max_{\nu=0,\dots,N-1} |x_\nu| \leqslant K^L \max_{\ell=0,\dots,N-1} |y_\ell| .$$

En effet, posons

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{N-1} x_\nu \binom{z}{\nu} .$$

$P(z)$ est le polynôme d'interpolation prenant aux points $L, \dots, L+N-1$ les valeurs $y_0, \dots, y_{N-1}$; on a donc :

$$P(z) = \sum_{\ell=0}^{N-1} P_\ell(z)\, y_\ell ,$$

où $P_\ell(z) = C_\ell \binom{z-L}{N} / [z - (L+\ell)]$ avec $C_\ell = (-1)^{N-\ell-1} N \binom{N-1}{\ell}$. Mais les x_n sont donnés en fonction de P par les formules :

$$x_n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-1} \binom{n}{\nu} P(\nu) ,$$

d'où

$$|x_n| \leqslant [\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu}] \max_{\nu=0,\dots,n} |P(\nu)| \leqslant 2^n \times \max_\ell |y_\ell| \times N \times \max_{\ell,\nu} |P_\ell(\nu)| .$$

Or

$$|P_\ell(\nu)| \leqslant N \binom{N-1}{\ell} \frac{(L-\nu)\dots(L+N-1-\nu)}{N!} / (L+\ell-\nu)$$

(en supposant $L > \nu$, car, pour $L \leqslant \nu$, on a : $P_\ell(\nu) = 0$ ou 1 selon que $L + \ell \neq \nu$ ou $L + \ell = \nu$ et la majoration que l'on cherche est triviale). Tenant compte de $N\binom{N-1}{\ell} = (\ell+1)\binom{N}{\ell+1}$, $\frac{\ell+1}{L+\ell-\nu} \leqslant 1$, $L-\nu < L+1$, ..., $L+N-1-\nu < L+N$, il vient finalement :

$$|P_\ell(\nu)| < \binom{N}{\ell+1}\binom{L+N}{N} < 2^N \binom{L+N}{N} ;$$

en reportant dans la relation satisfaite par $|x_n|$, et tenant compte de

$$2^n < 2^N , \quad N < 2^N ,$$

il vient finalement :

$$\max_{\nu=0,\dots,N-1} |x_\nu| < 2^{3N}\binom{L+N}{N} \max_{\ell=0,\dots,N-1} |y_\ell| ;$$

comme $\binom{L+N}{N} < 2^{L+N}$, on en déduit la majoration du (b).

Pour en déduire (c), il faut utiliser la formule de Stirling : il existe C_0 tel que $N! \geqslant C_0\, e^{-N} N^N$. On a alors

$$\binom{N+L}{N} < \frac{(N+L)^N}{N!} < C_1\, e^N \left(\frac{L+N}{N}\right)^N .$$

Mais alors, si $L > C_2 N$, $\left(\frac{L+N}{N}\right)^N = \left(\left(1+\frac{L}{N}\right)^{N/L}\right)^L < K_0^L$, où $K_0 = \frac{1+K}{2}$, donc

$$\max_\nu |x_\nu| < C_1\left([e \times 2^3]^{N/L}\right)^L \times K_0^L \times \max_\ell |y_\ell| ,$$

et si $L > C_3 N$, $(8e)^{N/L} < K/K_0$. Pour $L > \max(C_2 , C_3)\, N$, on obtient donc bien la majoration (c). La partie (a) du lemme se démontre aisément en prenant les formules d'interpolation.

2.2. - Nous allons montrer que les coefficients du développement en série de Laurent en puissance de $z-1$ sont des entiers. Comme $f(z)$ est holomorphe pour $|z-1| > \rho_0$ et que $\rho_0 < 1$, il en résultera que ces coefficients sont nuls à partir d'un certain rang, d'où le résultat.

Soient alors ρ un nombre réel tel que $\rho_0 < \rho < 1$, Γ le cercle $|z-1| = \rho$ parcouru dans le sens direct, K un nombre réel tel que $1 < K < 1/\rho$, d'où $\rho K = r < 1$.

Posons $M = \max_{z\in\Gamma} |f(z)|$, et désignons par C_1 , C_2 , ... les quantités ne dépendant que de ρ , K , M et non des autres nombres que nous introduirons, en particulier $C(K)$ désignera la quantité de la partie (c) du lemme.

Soit, pour $n \geqslant 0$ et $k \geqslant 0$,

$$v_{n,k} = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma f(z)\, z^n\, (z-1)^k\, dz .$$

On a évidemment la majoration :

(1) $$|v_{n,k}| \leqslant M(1+\rho)^n\, \rho^{k+1} .$$

D'autre part on a, pour $|z-1| > \rho_0$, le développement en série de Laurent :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_{0,n}/(z-1)^{n+1} ;$$

de la majoration (1) on déduit bien que $v_{0,n} \to 0$ quand $n \to \infty$; il suffit donc de montrer que les quantités $v_{0,n}$ sont des entiers. Enfin, en intégrant sur un cercle C plus grand et centré à l'origine, on a :

$$u_n = \frac{1}{2i\pi} \int_C f(z)\, z^n\, dz = v_{n,0} .$$

2.3. - En développant, sous l'intégrale, $(z-1)^k$ selon les puissances de z , et z^k selon les puissances de $z-1$, on obtient les relations :

(2) $$v_{n,k+h} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-1} \binom{k}{i} v_{n+i,h} ,$$

(3) $$v_{n+k,h} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} v_{n,h+i} .$$

De (1), nous déduisons l'existence de deux entiers $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ tels que

(4) $$k \geqslant C_1 n ,\quad n \geqslant C_2 \implies |v_{n,k}| < 1 .$$

2.4. <u>Calcul des</u> $v_{0,k}$ <u>quand</u> u_n <u>est entier pour</u> $m \leqslant n \leqslant Bm$ ($m \geqslant C_2$, $B \geqslant 1 + C_1 + C(K)$).

(α) Par hypothèse, $v_{n,0}$ est entier pour $m \leqslant n \leqslant Bm$; en appliquant (2) avec $h = 0$, il en résulte que $v_{m,k}$ est entier pour $m + k \leqslant Bm$, c'est-à-dire $k \leqslant (B-1)m$.

Posons $s = C_1 m$; comme $m \geqslant C_2$, il résulte de (4) :

(5) $$v_{m,k} = 0 \qquad \text{pour} \quad s \leqslant k \leqslant (B-1)m .$$

En appliquant (3) avec $h = s$, $n = m$, il vient :

(6) $$v_{m+k,s} = 0 \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant k \leqslant (B - 1 - C_1)m$$

(β) Ceci va nous permettre d'exprimer $v_{0,n}$ comme un polynôme en n pour $n \geqslant s$. En effet, en appliquant (2) avec $n = 0$, $h = s$, il vient :

$$v_{0,k+s} = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} v_{\nu,s} .$$

Posant $\lambda_\nu = (-1)^\nu v_{\nu,s}$, d'après (6), λ_ν est nul pour $m \leqslant \nu \leqslant (B - C_1)m$, on a donc :

(7) $$(-1)^k v_{0,k+s} = \sum_{\nu=0}^{m-1} \lambda_\nu \binom{k}{\nu} \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant k \leqslant (B - C_1)m$$

(si $k < m - 1$, cette formule résulte du fait que $\binom{k}{\nu} = 0$ pour $0 \leqslant k < \nu$).

(γ) La formule (7) montre que $v_{0,k+s}$ varie comme un polynôme en k , c'est-à-dire lentement par rapport aux exponentielles ; quand k est grand, $v_{0,k+s}$ est très petit, il reste donc encore assez petit pour k petit, et c'est ce que nous allons préciser en majorant les λ au moyen du lemme.

En effet, posons

$$L = (B - C_1)m - (m - 1) , \quad N = m , \quad y_\ell = (-1)^{L+\ell} v_{0,L+\ell+s} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant \ell \leqslant N - 1 ;$$

les λ_ν sont solutions du système étudié dans le lemme. Or $L > (B - 1 - C_1)m \geqslant C(K)N$, on peut donc appliquer le résultat (c) :

$$\max_{\nu=0,\dots,N-1} |\lambda_\nu| \leqslant K^L \max_{\ell=0,\dots,N-1} |y_\ell| \leqslant K^L M\rho^{L+s+1} \qquad \text{d'après (1)} ,$$

et en reportant dans (7) :

(8) $$|v_{0,k+s}| \leqslant C_3 \times 2^k r^{(B-1-C_1)m} \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant k \leqslant (B - C_1)m = Bm - s .$$

(δ) Mais on peut, d'après (3), avec $h = 0$, $n = 0$, écrire :

$$u_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} v_{0,i} ,$$

et, pour $i \geqslant s$, les termes de cette somme seront très petits. Posons :

$$w_n = \sum_{i=0}^{s-1} \binom{n}{i} v_{0,i} , \qquad \overline{w}_n = \sum_{i=s}^{n} \binom{n}{i} v_{0,i} \qquad (= 0 \ \text{si} \ n < s) .$$

On a, d'après (8),

$$|\bar{w}_n| \leq C_3\, r^{(B-1-C_1)m} \sum_{i=s}^{n} \binom{n}{i} 2^i \leq C_3 \times 3^n \times r^{(B-1-C_1)m} \qquad \text{pour} \quad 0 \leq n \leq Bm \ .$$

Les systèmes d'équations :

$$\text{(9)} \qquad u_{m+\ell} = \sum_{\nu=0}^{s-1} x_\nu \binom{m+\ell}{\nu} \qquad \text{pour} \quad \ell = 0 , \dots , s-1 ,$$

$$\text{(10)} \qquad \bar{w}_{m+\ell} = \sum_{\nu=0}^{s-1} \bar{x}_\nu \binom{m+\ell}{\nu} \qquad \text{pour} \quad \ell = 0 , \dots , s-1 ,$$

ont d'après le lemme (a) une solution unique, et comme

$$w_n = \sum_{\nu=0}^{s-1} v_{0,\nu} \binom{n}{\nu} = u_n - \bar{w}_n ,$$

on en déduit que

$$v_{0,\nu} = x_\nu - \bar{x}_\nu \qquad \text{pour} \quad \nu = 0 , \dots , s-1 .$$

D'après le lemme (a), les x_ν sont entiers puisque les $u_{m+\ell}$ le sont (car $m \leq m + \ell \leq m + s - 1 \leq Bm$), et nous pouvons majorer les solutions du système (10) en utilisant le lemme (b) :

$$\max_{\nu=0,\dots,s-1} |\bar{x}_\nu| \leq \{C_3 \times 3^{m+s-1} \times r^{(B-1-C_1)m}\} \times 2^{4s+m} \leq C_4 (C_5\, r^B)^m .$$

Il existe donc s entiers $x_0 , \dots , x_{s-1}$ tels que :

$$\text{(11)} \qquad |v_{0,k} - x_k| < C_4 (C_5\, r^B)^m .$$

2.5. Fin de la démonstration. - Comme $r < 1$,

$$\exists\, C_6 \ \text{tel que} \ B \geq C_6 \implies C_5\, r^B \leq 1/2 .$$

Choisissons alors : $A = 1 + \max(C_6 , 1 + C_1 + C(K))$.

Par hypothèse, $\underset{\sim}{J}$ étant de fréquence infinie, il existe une infinité de $m \geq C_2$ tels que $n \in \underset{\sim}{J}$ pour $m \leq n < Am$, donc tels qu'il existe u_n entier pour $m \leq n \leq Bm$ $(< Am)$. Nous pouvons alors appliquer le résultat de 2.4, et tenant compte de $C_1 \geq 1$, donc $s \geq m$, on aura en particulier :

Il existe une infinité d'entiers m et d'entiers $x_k^{(m)}$ $(k = 0 , \dots , m - 1)$ tels que :

$$|v_{0,k} - x_k^{(m)}| < C_4 \times 2^{-m} .$$

Dès que m est assez grand, $C_4 \times 2^{-m} < 1/2$. Pour un k donné, la suite des $x_k^{(m)}$ est donc constante à partir d'un certain rang ; comme sa limite est $v_{0,k}$, il en résulte que $v_{0,k}$ est entier quel que soit $k \geqslant 0$, ce qui achève la démonstration.

3. Application : fonctions entières prenant des valeurs entières sur un ensemble d'entiers.

Soit $f(z)$ une fonction entière, et définissons la quantité :

$$\alpha(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{r} \operatorname{Log}|f(re^{i\varphi})| .$$

Nous nous proposons de généraliser un résultat de POLYA [5].

THÉORÈME. - Si $f(n)$ est entier rationnel pour $n \in \underset{\sim}{J}$ où $\underset{\sim}{J}$ est de fréquence infinie, et si : $\forall \varphi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, on a :

$$\alpha(\varphi) \leqslant \alpha < \operatorname{Log} 2 ;$$

alors f est un polynôme en z.

Remarque. - f est alors plus précisément une combinaison linéaire à coefficients entiers de polynômes d'interpolation $\binom{z}{n}$ $(n \in \underset{\sim}{N})$, en vertu du lemme (a) du paragraphe précédent.

Démonstration. - La série $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, e^{-nx}$ converge pour $e^{\Re x} > \alpha(o)$. On sait (voir par exemple [2]) que $F(x)$ admet, comme seules singularités, les singularités de la transformée de Laplace de f et les translatées de ces singularités par les translations $2k\pi i$ $(k \in \underset{\sim}{Z})$. Ici, la transformée de Laplace de f est holomorphe pour $|x| > \alpha$ et $\alpha < \operatorname{Log} 2 < \pi$. Dans la bande $-\pi \leqslant \Im x \leqslant \pi$, $F(x)$ est donc holomorphe pour $|x| > \alpha$, et l'on sait alors que si γ est une courbe située dans cette bande et entourant le disque $|x| \leqslant \alpha$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma e^{zx} F(x)\, dx .$$

Désignons par $\varphi(z)$ la fonction admettant pour $|z| > e^{\alpha(o)}$ le développement : $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{z^n}$. Il suffit de prouver que $\varphi(z) = \frac{A(z)}{(z-1)^s}$, où $A(z)$ est un polynôme en z . En effet, on a alors :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma e^{zx} \frac{A(e^x)}{(e^x - 1)^s} dx = f(z) ,$$

et

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{e^{\lambda x}}{(e^x - 1)^s} dx = \binom{\lambda - 1}{s - 1}$$

est un polynôme en λ , ce qui montre, en développant $A(e^x)$, que $f(z)$ est un polynôme en z .

Mais $\varphi(z)$ est holomorphe à l'extérieur du domaine transformé de $|x| \leqslant \alpha$ par $e^x = z$. En particulier, si $\rho_0 = \max_{|x| \leqslant \alpha} |e^x - 1)$, $\varphi(z)$ est holomorphe pour $|z - 1| > \rho_0$. Comme $|e^x - 1| \leqslant e^{|x|} - 1$ et que $e^\alpha - 1 < e^{\mathrm{Log}\, 2} - 1 = 1$, on a $\rho_0 < 1$. Le théorème résulte alors du théorème du paragraphe précédent appliqué à la fonction $g(z) = \varphi(z) - f(o)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (Emile). - Sur une application d'un théorème de M. Hadamard, Bull. Sc. math., 2e série, t. 18, 1894, 1re partie, p. 22-25.

[2] DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Etude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité, Application à un ensemble fermé d'entiers algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 72, 1955, p. 69-92.

[3] OSTROWSKI (Alexander). - On representation of analytical functions by power series, J. London math. Soc., t. 1, 1926, p. 251-263.

[4] POLYA (George). - Über gewisse notwendige Determinantenkriterien für die Forsetzbarkeit einer Potenzreihe, Math. Annalen, t. 99, 1928, p. 687-706.

[5] POLYA (George). - Über ganze ganzwertige Funktionen, Nachr. königl. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl., 1920, p. 1-10.

[6] RAUZY (Gérard). - Répartition modulo 1 pour des suites partielles d'entiers, Développements en série de Taylor donnés sur des suites partielles, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 258, 1964, p. 4881-4884.