Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Nicole Pallarès

# Thèse de Schoebe, 1

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 6, n° 1 (1964-1965), exp. n° 4a, p. 1-28
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1964-1965__6_1_A3_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

# THÈSE DE SCHOEBE, 1.

par Nicole PALLARÈS.

Dans sa thèse, présentée en 1930 à l'Université de Halle (Wittenberg), sous la direction du professeur HASSE, Waldemar SCHOEBE élabore une théorie des fonctions dans un corps à valuation non archimédienne. Il s'inspire des travaux de STRASSMANN (1) sur les corps p-adiques, mais toute son étude porte sur des corps abstraits.

## Chapitre 1. Axiomes et structures.

Les corps $K$ considérés sont des corps valués, à valeur absolue non archimédienne, c'est-à-dire munis d'une application $v$ de $K$ dans $R^+$ ( $R^+$ : ensemble des réels positifs ou nuls),

$$\forall a \quad (a \in K) \qquad a \to |a| \qquad |a| \in R^+ ,$$

satisfaisant aux trois axiomes :

$$|a| = 0 \iff a = 0$$

$$|ab| = |a|\ |b|$$

$$\text{(I T F)} \qquad |a + b| \leqslant \max[|a| , |b|] .$$

Le 3e axiome a pour conséquence immédiate :

$$|a| \neq |b| \implies |a + b| = \max[|a| , |b|] .$$

La valuation est supposée non triviale :

$$\exists a \quad (a \in K) \quad \text{tel que} \quad 0 < |a| < 1 .$$

### 1. Etude de $\Gamma = v(K)$ .

La considération de l'ensemble $\Gamma$ des valeurs absolues conduit à distinguer deux types de corps $K$ :

1° Si $1$ n'est pas point d'accumulation de $\Gamma$ , $\Gamma$ représente l'ensemble des puissances entières d'un nombre réel $\pi$ déterminé tel que $0 < \pi < 1$ ,

---

(1) STRASSMANN (Reinhold). - Über den Wertevorrat von Potenzreihen ein Gebiet der p-adischen Zahlen, J. für reine und angew. Math., t. 159, 1928, p. 13-28.

$$\Gamma = \{\pi^n \ ; \ \forall\, n \ \ (n \in Z)\} \qquad (\ Z : \text{ensemble des entiers relatifs}) \ ;$$

$K$ est alors à <u>valuation discrète</u>.

Soit $p \in K$ tel que $|p| = \pi$ : $p$ est appelé élément premier de $K$.

2° $1$ est point d'accumulation de $\Gamma$ : $\Gamma$ est alors dense dans $R^+$. On dit que $K$ est à <u>valuation dense</u>.

## 2. Anneau des entiers de K et corps des classes résiduelles.

On appelle <u>entier</u> du corps $K$, tout élément $x$ tel que $|x| \leqslant 1$.

L'ensemble des entiers, $A$, est un anneau intègre de $K$. Il contient :
- d'une part, les éléments $x$ tels que $|x| = 1$, dits unités, qui constituent un ensemble $U$ ;
- d'autre part, les éléments $x$ tels que $|x| < 1$, qui constituent un idéal maximal $I$ de $A$.

Dans $A$, la relation d'équivalence :

$$x - y \in I \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad |x - y| < 1$$

détermine une partition en classes résiduelles $\bar{\bar{x}}$.

L'ensemble des classes est un corps $\chi$.

La considération de $\operatorname{card} \chi$ conduit, elle aussi, à distinguer deux types de corps $K$ :

1° $\chi$ est fini, contient $k$ classes. $K$ est un corps d'<u>indice fini</u> $k$.

2° $\chi$ est infini. $K$ est un corps d'<u>indice infini</u>.

Soient $x \in A$ et $y \in A$ : d'après (I T F), $|x - y| \leqslant 1$ ;

$$\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{y}} \iff |x - y| < 1 \ ,$$

$$\bar{\bar{x}} \neq \bar{\bar{y}} \iff |x - y| = 1 \ .$$

$\chi - \{\bar{0}\}$ constitue une partition de $U$. Si $\chi$ est fini, $k$ est une puissance de nombre premier, et

$$\forall\, x \ \ (x \in A) \qquad \bar{\bar{x}}^k = \bar{\bar{x}} \implies |x^k - x| < 1 \ ,$$

en particulier

$$|x| = 1 \implies |x^{k-1} - 1| < 1 \ .$$

## 3. Corps K algébriquement clos.

En tenant compte des discriminations précédentes, les corps $K$ algébriquement clos se classent de façon remarquable.

THÉORÈME. - Les corps K algébriquement clos sont à valuation dense et indice infini.

En effet,

- si K est à valuation discrète, soit p un élément premier,

$$P(x) = x^2 - p \quad \text{n'a pas de zéro ;}$$

- si K est à indice fini k ,

$$Q(x) = x^k - x - 1 \quad \text{n'a pas de zéro .}$$

## 4. Etude topologique de K .

Soit $a \in K$ .

On appelle disque ouvert (resp. fermé) de centre a , rayon $\rho$ , l'ensemble des éléments x de K tels que $|x - a| < \rho$ , $\rho$ désignant un réel positif (resp. $|x - a| \leqslant \rho$ , $\rho$ réel positif ou nul).

Deux disques quelconques sont :

- soit disjoints,
- soit l'un inclus dans l'autre.

Chaque disque est simultanément un ouvert et un fermé de K .

Un corps K est localement compact si, et seulement si, il est complet, à valuation discrète et indice fini.

# Chapitre 2. Séries entières.

Dans tout ce chapitre, le corps K est, de plus, supposé complet.

Une série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge si, et seulement si,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 ;$$

l'expression $\max_n |u_n|$ a alors un sens, et d'après (I T F), la somme S de la série est telle que

$$(1) \qquad |S| \leqslant \max_n |u_n| .$$

Une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a pour rayon de convergence :

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} |a_n|^{1/n}} .$$

5. Inégalités de Cauchy.

Soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

une série convergente pour $x$ tel que $|x| = \rho$ .

Comme en théorie des fonctions de variable complexe, les formules de Cauchy expriment une relation entre

$$\max_n |a_n| \rho^n = M(\rho)$$

et

$$\sup_{|x|=\rho} |f(x)| = \mu(\rho) .$$

a. Première formule de Cauchy.

Si $K$ est un corps à valuation dense ou à indice infini,

(C $F_1$) $$\mu(\rho) = M(\rho) .$$

Démonstration.

Si $\rho = 0$ , la relation est triviale.

Si $\rho \neq 0$ , par l'homothétie $x \to \frac{x}{\rho}$ , on se ramène au cas $|x| = 1$ .

D'après (1),

(2) $$\mu(1) \leqslant M(1) .$$

On va montrer que $M(1) \leqslant \mu(1)$ .

1° Examinons le cas d'une série réduite à un polynôme :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{q} a_n x^n \qquad |x| = 1 .$$

On exprime les coefficients $a_n$ en fonction de valeurs que prend le polynôme sur le cercle unité, en introduisant $q + 1$ unités, distinctes deux à deux :

$$x_0 , \dots , x_i , \dots , x_q \qquad i \neq j \implies x_i \neq x_j ,$$

$$g(x_i) = \sum_{n=0}^{q} a_n x_i^n \qquad i = 0 , \dots , q .$$

Ces relations peuvent être considérées comme un système d'équations linéaires relativement aux inconnues $a_n$ ; le système est de Cramer, son déterminant étant

$$\Delta = \prod_{j>i} (x_j - x_i) \qquad \Delta \neq 0 .$$

La solution du système est

(3) $$a_n = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=0}^{q} \Delta_{i,n}\, g(x_i) \qquad n = 0 , \dots , q .$$

$|g(x_i)| \leqslant \mu(1)$ , et $\Delta_{i,n}$, déterminant extrait de $\Delta$ , a pour éléments des unités $|\Delta_{i,n}| \leqslant 1$ . D'où

$$|a_n| \leqslant \frac{\mu(1)}{|\Delta|} .$$

<u>Si l'indice de</u> K <u>est infini</u>, les $x_i$ peuvent être choisis dans $q+1$ classes distinctes,

$$i \neq j \implies |x_j - x_i| = 1 , \qquad |\Delta| = 1 , \qquad |a_n| \leqslant \mu(1) .$$

<u>Si la valuation de</u> K <u>est dense</u>, $\forall\, \varepsilon$ $(\varepsilon \in R^+$ et $0 < \varepsilon < 1)$ , il existe $q+1$ éléments $C_i$ de K ayant des valeurs absolues telles que

$$i \neq j \implies |C_i| \neq |C_j| \qquad \text{et} \qquad 1 - \varepsilon < |C_i| < 1 .$$

Posons $x_i = 1 + C_i$ , $|x_i| = 1$ , et $|x_j - x_i| = \max[|C_i| , |C_j|] > 1 - \varepsilon$ ;

$$|\Delta| > (1 - \varepsilon)^{(q(q+1))/2} ,$$

$$\forall\, \varepsilon \qquad |a_n| \leqslant \mu(1)(1 - \varepsilon)^{-(q(q+1))/2} \implies |a_n| \leqslant \mu(1) ,$$

d'où

(4) $$M(1) \leqslant \mu(1) \qquad \text{dans ces deux cas} .$$

De (2) et (4) résulte $M(1) = \mu(1)$ .

2° Considérons maintenant une véritable série,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n ,$$

convergente pour $x$ tel que $|x| = 1$ . Si $M(1) = 0$ , quel que soit $n$ , $a_n = 0$. $(C\,F_1)$ est triviale.

Supposons $M(1) \neq 0$ :

On décompose $f(x)$ en polynôme et série-reste convenablement choisis :

$$\exists\, q \quad (q \in N) \quad \text{tel que} \quad \forall\, n > q\ , \quad |a_n| < \frac{M(1)}{2}\ , \text{ puisque } \lim_{n\to+\infty} a_n = 0\ ;$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{q} a_n\, x^n + \sum_{n=q+1}^{\infty} a_n\, x^n = g(x) + F(x)\ ;$$

le choix de $q$ entraîne que

$$M(1) = \max_{n=0,\dots,q} |a_n| \qquad \text{et} \qquad \left|F(x)\right|_{|x|=1} < \frac{M(1)}{2}\ .$$

$(C\ F_1)$ est valable pour $g(x)$ :

$$\sup_{|x|=1} |g(x)| = M(1)\ .$$

Alors, $\forall\, \varepsilon$ $\left(\varepsilon \in R^+ \text{ et } 0 < \varepsilon < \frac{M(1)}{2}\right)$, $\exists\, x_0$ $(x_0 \in K$ et $|x_0| = 1)$ tel que

$$|g(x_0)| > M(1) - \varepsilon > \frac{M(1)}{2}\ .$$

Comme $|F(x_0)| < \frac{M(1)}{2}$ ,

$$|f(x_0)| = \max[\,|g(x_0)|\ ,\ |F(x_0)|\,] = |g(x_0)|\ ,$$

$$|f(x_0)| > M(1) - \varepsilon\ .$$

Ainsi, $\forall\, \varepsilon$ ,

$$\mu(1) > M(1) - \varepsilon \implies \mu(1) \geqslant M(1)\ ,$$

et d'après (2),

$$\mu(1) = M(1)\ .$$

Contrairement, considérons un corps $K$ à valuation discrète et indice fini $k$ .
On constate que $(C\ F_1)$ n'est pas nécessairement valable :

Soit $h(x) = x - x^k$ , $|x| = 1$ , $M(1) = 1$ ;

$$|x - x^k| < 1 \implies \mu(1) \leqslant \pi < M(1)\ .$$

Pour les polynômes de degré déterminé, SCHOEBE obtient un encadrement remarquable de $\mu(\rho)$ :

b. Deuxième formule de Cauchy.

Si $K$ est un corps à valuation discrète et indice fini $k$ , pour un polynôme de degré $q$ déterminé,

$$(C\ F_2) \qquad \pi^{\psi(q)}\, M(\rho) \leqslant \mu(\rho) \leqslant M(\rho) \qquad \text{avec} \quad \psi(q) = \sum_{s=0}^{\infty} \left[\frac{q}{k^s(k-1)}\right] ,$$

<u>chacune des égalités pouvant être réalisée</u>.

<u>Démonstration</u>.

Soit $g(x) = \sum_{n=0}^{q} a_n x^n$. On se ramène au cas $|x| = 1$.

On a encore

$$(2) \qquad \mu(1) \leqslant M(1) .$$

Cherchons à minorer $\mu(1)$.

Comme précédemment, on exprime les coefficients $a_n$ en fonction de valeurs $g(x_i)$ prises par le polynôme sur le cercle unité,

$$(3) \qquad a_n = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=0}^{q} \Delta_{i,n}\, g(x_i) \qquad n = 0 , \dots , q ;$$

$$\frac{\Delta_{i,n}}{\Delta} = \frac{u_{i,n}}{\prod_{j\neq i,\ i\ \text{fixé}} (x_j - x_i)} \qquad |u_{i,n}| \leqslant 1 \implies \left|\frac{\Delta_{i,n}}{\Delta}\right| \leqslant \frac{1}{\prod_{j\neq i,\ i\ \text{fixé}} |x_j - x_i|} .$$

Posons $P_i = \prod_{j\neq i,\ i\ \text{fixé}} |x_j - x_i|$ ; (3) entraîne

$$(5) \qquad |a_n| \leqslant \max_{i=0,\dots,q} \frac{|g(x_i)|}{P_i} ,$$

$|g(x_i)| \leqslant \mu(1)$. Minorons $P_i$ :

Le corps $K$ étant à valuation discrète et indice fini $k$, $\forall\ s$ ($s \in N$, $N$ ensemble des entiers naturels), chaque disque fermé de rayon $\pi^s$ est recouvert par $k$ disques fermés disjoints de rayon $\pi^{s+1}$.

Soient $a$ et $b$ deux entiers ; on pose

$$a = b \pmod{p^s} \iff |a - b| \leqslant \pi^s .$$

Les entiers se répartissent $(\bmod\ p^s)$ en $k^s$ classes résiduelles. Les unités, réparties $(\bmod\ p)$ en $k - 1$ classes, sont réparties $(\bmod\ p^s)$ en $(k - 1)k^{s-1}$ classes.

Supposons alors les $q + 1$ unités $x_i$ "bien réparties", quel que soit $s$, dans les classes $(\bmod\ p^s)$, c'est-à-dire suivant une répartition aussi proche que possible de l'équirépartition.

Dans chaque classe $\pmod{p^s}$ , il y a au plus $[\frac{q}{k^{s-1}(k-1)}] + 1$ unités $x_i$ .
Il y a donc, au plus,

$$N_s = [\frac{q}{k^{s-1}(k-1)}]$$

unités $x_j$ différentes de $x_i$ , i fixé, appartenant à la classe $\pmod{p^s}$ de $x_i$ ; si $N'_s$ désigne le nombre de ces unités, quel que soit s , $N'_s \leqslant N_s$ .

$$\exists\, t \quad (t \in N) \quad \text{tel que} \quad N_{t+1} = 0 \ , \ N_t \neq 0 \ .$$

Les facteurs de $P_i$ portant sur les unités $x_j$ appartenant à la classe $\pmod{p^t}$ de $x_i$ sont tels que $|x_j - x_i| = \pi^t$ . Leur contribution à $P_i$ est :

$$\prod_t |x_j - x_i| = \pi^{tN'_t} \ .$$

Il y a $N'_{t-1} - N'_t$ unités $x_j$ appartenant à la classe $\pmod{p^{t-1}}$ de $x_i$ sans appartenir à la classe $\pmod{p^t}$ de $x_i$ . Leur contribution à $P_i$ est :

$$\prod_{t-1} |x_j - x_i| = \pi^{(t-1)(N'_{t-1}-N'_t)} \ .$$

...

Il y a enfin $N'_1 - N'_2$ unités $x_j$ appartenant à la classe $\pmod{p}$ de $x_i$ sans appartenir à la classe $\pmod{p^2}$ de $x_i$ . Leur contribution à $P_i$ est :

$$\prod_1 |x_j - x_i| = \pi^{N'_1-N'_2} \ .$$

$$P_i = \prod_t \times \prod_{t-1} \times \dots \times \prod_1 = \pi^{tN'_t+(t-1)(N'_{t-1}-N'_t)+\dots+N'_1-N'_2} \ ,$$

$$tN'_t + (t-1)(N'_{t-1} - N'_t) + \dots + N'_1 - N'_2 = N'_t + N'_{t-1} + \dots + N'_1 = \sum_{s=1}^{t} N'_s = \sum_{s=1}^{\infty} N'_s \ ,$$

$$N'_s \leqslant N_s \ , \qquad \sum_{s=1}^{\infty} N'_s \leqslant \sum_{s=1}^{\infty} N_s \ ,$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} N_s = \sum_{s=1}^{\infty} [\frac{q}{k^{s-1}(k-1)}] = \sum_{s=0}^{\infty} [\frac{q}{k^s(k-1)}] = \psi(q) \ ;$$

d'où

$$P_i \geqslant \pi^{\psi(q)} .$$

D'après (5),

$$|a_n| \leqslant \mu(1)\ \pi^{-\psi(q)} ,$$

d'où

$$M(1) \leqslant \mu(1)\ \pi^{-\psi(q)}$$

et

$$\pi^{\psi(q)}\ M(1) \leqslant \mu(1) . \tag{6}$$

Réunissons (2) et (6). On obtient

$$\pi^{\psi(q)}\ M(1) \leqslant \mu(1) \leqslant M(1) . \tag{C $F_2$}$$

Il reste à montrer qu'on obtient là le meilleur encadrement possible, en trouvant deux polynômes de degré $q$ , satisfaisant respectivement aux égalités.

1° Soit $g(x) = a_q\, x^q$ , $|x| = 1$ ;

$$\forall\ x\ \ (|x| = 1)\ \ |g(x)| = |a_q| \qquad \mu(1) = M(1) .$$

2° Soit $h(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_i) \ldots (x - x_q)$ , les $x_i$ désignant des unités distinctes bien réparties au sens précédent, pour tout $s$ , dans les classes $(\text{mod } p^s)$ .

Il y a alors au moins $[\frac{q}{(k-1)k^{s-1}}] x_i$ dans chaque classe.

Soit $x$ tel que $|x| = 1$ . Supposons, pour tout $i$ de $0$ à $q$ , $x \neq x_i$ : $x$ appartient nécessairement à l'une des classes $(\text{mod } p^s)$ , et un calcul analogue à celui de $P_i$ montre que

$$|h(x)| \leqslant \pi^{\psi(q)} .$$

L'inégalité est encore vraie s'il existe $i$ tel que $x = x_i$ , puisque $|h(x)| = 0$ ; donc,

$$\mu(1) \leqslant \pi^{\psi(q)} .$$

D'autre part, $M(1) = 1$ ,

$$\mu(1) \leqslant \pi^{\psi(q)}\ M(1) ,$$

et en utilisant (C $F_2$),

$$\mu(1) = \pi^{\psi(q)}\ M(1) .$$

COROLLAIRE. - $K$ étant un corps à valuation discrète et indice fini $k$, tout polynôme tel que $\mu(\rho) \leqslant \pi^{u} M(\rho)$ a un degré $q$ satisfaisant $q \geqslant \frac{(k-1)^2 u}{k}$.

En effet, ($C\ F_2$) entraîne que $u \leqslant \psi(q)$, donc

$$u \leqslant \sum_{s=0}^{\infty} \frac{q}{k^s(k-1)} ,$$

c'est-à-dire

$$u \leqslant \frac{kq}{(k-1)^2} \qquad \text{et} \qquad q \geqslant \frac{(k-1)^2 u}{k} .$$

## 6. Dénombrement des zéros d'une série entière dans un disque.

Le corps $K$ est supposé complet et algébriquement clos.

Soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

une série convergente pour $x$ tel que $|x| = \rho$. On suppose la série non nulle et $\rho > 0$.

Soit $M(\rho) = \max_n |a_n| \rho^n$.

THÉORÈME. - $m$ désignant le plus grand indice $n$ tel que $|a_n \rho^n| = M(\rho)$, $\ell$ désignant le plus petit indice $n$ tel que $|a_n \rho^n| = M(\rho)$,

($T_1$) La série a exactement $m$ zéros dans le disque $|x| \leqslant \rho$.

($T_2$) La série a exactement $\ell$ zéros dans le disque $|x| < \rho$.

Remarque. - Chaque zéro doit être compté autant de fois que l'indique son ordre de multiplicité.

Démonstration. - Supposons vraie la proposition ($T_1$) ; $L$ désignant le nombre de zéros dans le disque $|x| < \rho$, montrons que $L = \ell$.

$L \leqslant m$ et $L$ est fini : $\exists\ \rho'$ ($\rho' < \rho$) tel que $L$ représente le nombre de zéros dans le disque $|x| \leqslant \rho'$.

Soient $M'(\rho') = \max_n |a_n| \rho'^n$,

$m'$ le plus grand indice $n$ tel que $|a_n| \rho'^n = M'(\rho')$,

$\ell'$ le plus petit indice $n$ tel que $|a_n| \rho'^n = M'(\rho')$.

$$(T_1) \implies L = m' .$$

D'autre part, l'étude de la variation de $|a_n|\rho^n$ avec $n$ et $\rho$ montre que

$$\ell' \leqslant m' \leqslant \ell \leqslant m \ .$$

D'où

(7) $$L \leqslant \ell \ .$$

La signification de $m'$ entraîne

$$|a_L|\rho'^L \geqslant |a_\ell|\rho'^\ell \ .$$

En faisant tendre $\rho'$ vers $\rho - 0$, $L$ et $\ell$ ne varient pas, on obtient à la limite

$$|a_L|\rho^L \geqslant |a_\ell|\rho^\ell \ .$$

La signification de $\ell$ entraîne alors $|a_L|\rho^L = |a_\ell|\rho^\ell$ et

(8) $$L \geqslant \ell \ ;$$

de (7) et (8) résulte $L = \ell$. Donc $(T_1) \implies (T_2)$.

Il reste à démontrer $(T_1)$.

1° Cas d'un polynôme. - Soit

$$g(x) = \sum_{n=0}^{q} a_n x^n \ .$$

$K$ étant algébriquement clos, $g(x)$ a $q$ racines dans $K$, $C_1, \ldots, C_q$, qu'on ordonne par valeurs absolues croissantes pour mettre en évidence celles qui appartiennent au disque $|x| \leqslant \rho$ ;

$$|C_1| = \ldots = |C_u| < |C_{u+1}| \leqslant \ldots \leqslant |C_t| < |C_{t+1}| \leqslant \ldots \leqslant |C_q| \ ,$$

$$\begin{array}{ll} i = 1, \ldots, u & |C_i| = 0 \ , \\ i = u+1, \ldots, t & 0 < |C_i| \leqslant \rho \ , \\ i = t+1, \ldots, q & |C_i| > \rho \ , \end{array}$$

$$g(x) = a_u x^u \prod_{i=u+1}^{q} \left(1 - \frac{x}{C_i}\right) \ ;$$

par identification des coefficients,

$$a_n = (-1)^{n-u} a_u S_{n-u}\left(\frac{1}{C_{u+1}}, \ldots, \frac{1}{C_q}\right) \ ,$$

où $S_{n-u}(\frac{1}{C_{u+1}}, \dots, \frac{1}{C_q})$ représente la fonction symétrique fondamentale d'ordre $n - u$ des $q - u$ variables $\frac{1}{C_{u+1}}, \dots, \frac{1}{C_q}$. D'après (I T F),

$$|S_{n-u}(\frac{1}{C_{u+1}}, \dots, \frac{1}{C_q})| \leqslant \frac{1}{|C_{u+1}|} \times \dots \times \frac{1}{|C_n|} ,$$

et si $n = t$,

$$|S_{t-u}(\frac{1}{C_{u+1}}, \dots, \frac{1}{C_q})| = \frac{1}{|C_{u+1}|} \times \dots \times |\frac{1}{C_t}| ;$$

d'où

$$|a_n| \leqslant \frac{|a_u|}{|C_{u+1}| \times \dots \times |C_n|} ,$$

et si $n = t$,

$$|a_t| = \frac{|a_u|}{|C_{u+1}| \times \dots \times |C_t|} .$$

Il en résulte,

$$\text{si} \quad n \leqslant t , \qquad |a_n| \rho^n \leqslant |a_t| \rho^t ,$$

$$\text{si} \quad n > t , \qquad |a_n| \rho^n < |a_t| \rho^t ;$$

d'où $M(\rho) = |a_t| \rho^t$ et $t = m$, ce qui démontre $(T_1)$.

2° Cas d'une série non réduite à un polynôme (démonstration abrégée). - Soit D le disque $|x| \leqslant \rho$.

Si $m = 0$,

$$\forall n \quad (n \in N) \qquad |a_n| \rho^n < |a_0| ,$$

$$\forall x \quad (x \in D) \qquad |a_n| \; |x|^n \leqslant |a_n| \rho^n < |a_0| \qquad |f(x)| = |a_0| \neq 0 ;$$

$f(x)$ n'a aucun zéro dans D.

Si $m > 0$,

a) On établit que $f(x)$ a au moins un zéro dans D : décomposons $f(x)$ en un polynôme $g(x)$ et une série reste $F(x)$, de manière que $m(f) = m(g)$ et que les valeurs de $f(x)$ soient proches de celles de $g(x)$ dans le disque ;

$$f(x) = \sum_{n=0}^{q} a_n x^n + \sum_{n=q+1}^{\infty} a_n x^n = g(x) + F(x) .$$

Il suffit que le degré $q$ du polynôme $g(x)$ soit choisi tel que $q > m$ ; alors,

$$m(f) = m(g) .$$

$\forall n$ $(n \in N$ et $n > q)$, $|a_n| \rho^n < \varepsilon$, ce qui entraîne, dans $D$, $|F(x)| < \varepsilon$. $g(x)$ ayant, d'après 1°, $m$ racines $C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_m$ dans $D$, $|f(x)|$ prend en ces points des valeurs inférieures à $\varepsilon$, mais une difficulté se présente du fait que $g(x)$ dépend de $\varepsilon$.

$\forall \varepsilon$ $(\varepsilon \in R^+$ et $\varepsilon > 0)$, $\exists x_0$ $(x_0 \in D)$, $|f(x_0)| < \varepsilon$ ;

$$|f(x_0)| < \varepsilon \implies |g(x_0)| < \varepsilon .$$

La décomposition de $g(x)$ en produit de binômes du 1er degré montre que, pour au moins un $i$, $i = 1, 2, \ldots, m$,

$$|x_0 - C_i| < \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^{1/m} ,$$

$\alpha$ désignant une constante indépendante de $\varepsilon$ ( $\alpha = |a_u| \rho^{u-m}$, $a_u$ premier coefficient non nul de $f(x)$ ). Ainsi, $x_0$ appartient à l'un au moins des disques $\Delta^i$, $i = 1, \ldots, m$, de centre $C_i$ et de rayon $\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^{1/m}$.

Considérons une suite $\varepsilon_k$ de nombres réels positifs, décroissante et convergente vers $0$. Il lui correspond une suite d'éléments $x_k$ de $D$ tels que

- $|f(x_k)| < \varepsilon_k$,
- $x_k$ appartient à l'un des disques $\Delta_k^i$, $i = 1, \ldots, m$, de centre $C_{k,i}$ et de rayon $\left(\frac{\varepsilon_k}{\alpha}\right)^{1/m}$.

De l'ensemble des disques $\Delta_k^i$, on extrait une chaîne

$$\Delta'_1 \supset \Delta'_2 \ldots \supset \Delta'_k \supset \ldots ,$$

où chaque disque contient une infinité d'éléments de la suite $x_k$, ce qui permet d'extraire une suite de Cauchy $x_{k_p}$ de la suite $x_k$.

$K$ étant complet, $x_{k_p}$ converge vers un point $\xi$ de $D$. $f(x)$, somme d'une série entière, étant continue,

$$\lim_{p \to +\infty} f(x_{k_p}) = f(\xi) ,$$

$$|f(x_{k_p})| < \varepsilon_{k_p} \leqslant \varepsilon_k \implies \forall k \ (k \in N) , \ |f(\xi)| \leqslant \varepsilon_k \implies f(\xi) = 0 .$$

b) Les <u>zéros distincts</u> de $f(x)$ dans $D$ sont en nombre au plus égal à $m$. En effet, ces zéros appartiennent nécessairement à $m$ disques au plus de rayon

$(\frac{\varepsilon}{\alpha})^{1/m}$ . En choisissant $\varepsilon$ inférieur à la plus petite de leurs distances mutuelles, il y a contradiction si le nombre de ces zéros dépasse $m$ .

En comptant chaque zéro avec son ordre de multiplicité, le nombre de zéros de $f(x)$ dans $D$ est donc fini.

c) Soient $x_1$ , ... , $x_t$ les zéros de $f(x)$ dans $D$ .

Posons

$$g(x) = (x - x_1) \times \dots \times (x - x_t) ,$$

$$f(x) = g(x) \times F(x) ,$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n ,$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \text{avec} \quad b_n = 0 \quad \text{si} \quad n > t \quad \text{et} \quad b_t = 1 ,$$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n ,$$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k d_{n-k} .$$

$g(x)$ est un polynôme ayant $t$ zéros dans $D$ : $m(g) = t$ ;
- si $n \leqslant t$ , $|b_n| \rho^n \leqslant \rho^t$ ,
- si $n > t$ , $|b_n| \rho^n < \rho^t$ .

$F(x)$ est une série n'ayant aucun zéro dans $D$ : $m(F) = 0$ ;
- si $n \geqslant 1$ , $|d_n| \rho^n < |d_0|$ .

D'où,
- si $n < t$ , $|a_n| \rho^n \leqslant \max\limits_{k=0,..,n} |b_k| \rho^k |d_{n-k}| \rho^{n-k} \leqslant |d_0 \rho^t|$ ,
- si $n = t$ , $|a_t \rho^t| = |d_0| \rho^t$ ,
- si $n > t$ , $|a_n| \rho^n < |d_0| \rho^t$ .

$t$ représente le plus grand indice $n$ tel que $|a_n| \rho^n = M(\rho) = |d_0| \rho^t$ , $t = m(f)$ , ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE. - Sur le cercle $|x| = \rho$ , la série a $m - \ell$ zéros.

# THÈSE DE SCHOEBE, 2

par Nicole PALLARÈS

Les notations sont celles de l'exposé 4a : K désigne un corps valué, à valuation non archimédienne.

## Chapitre 3. Fonctions entières.

Dans ce chapitre, le corps K est, de plus, supposé complet.

Une fonction entière est une fonction représentée par une série entière, convergente, quel que soit $x$ appartenant à K .

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n .$$

Son rayon de convergence est $+\infty$ :

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} |a_n|^{1/n} = 0 . \tag{1}$$

Comme précédemment, soit $\rho$ un réel positif ; on pose

$$M(\rho) = \max_n |a_n| \rho^n$$

$$\mu(\rho) = \sup_{|x|=\rho} |f(x)| .$$

$m(\rho , f)$ désigne le plus grand indice $n$ tel que $|a_n| \rho^n = M(\rho)$ .

1. THÉORÈME de Weierstrass. - Toute fonction entière $f(x)$ , qui n'est pas réduite à un polynôme, possède une infinité de zéros $c_i$ dont l'ensemble des valeurs absolues n'est pas borné et, si $|c_{i-1}| \leqslant |c_i|$ ,

$$f(x) = a_k x^k \prod_{i=1}^{+\infty} (1 - \frac{x}{c_i}) ,$$

$a_k x^k$ désignant le premier monôme non nul de $f(x)$ .

Démonstration.

1° Supposons le nombre des zéros de $f(x)$ fini et égal à $p$, et désignons ces zéros par $c_1, \dots, c_p$.

D'après le théorème relatif au nombre des zéros d'une série entière dans un disque (exposé 4a, chap. 2),

$$\forall \rho \quad (\rho \in R^+ \quad \text{et} \quad \rho > \max_p |c_p|) \qquad \max_n |a_n|\rho^n = |a_p|\rho^p$$

$$n > p \implies |a_n|\rho^n < |a_p|\rho^p$$

$$|a_n| < |a_p|\rho^{p-n}$$

d'où

$$a_n = 0$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que $f(x)$ n'est pas un polynôme. Ainsi, $f(x)$ possède une infinité de zéros.

2° L'ensemble des zéros de $f(x)$ est dénombrable : en effet, sur toute couronne $q < |x| \leqslant q + 1$, où $q$ désigne un entier positif ou nul, $f(x)$ a un nombre fini de zéros

$$m(q+1, f) - m(q, f) .$$

3° L'ensemble des valeurs absolues des zéros n'est pas borné : sinon $\exists \rho$ $(\rho \in R^+)$ tel que, pour tout zéro $c_i$, $|c_i| \leqslant \rho$. La série aurait une infinité de zéros dans le disque $|x| \leqslant \rho$, ce qui est contradictoire. On peut ordonner les zéros de $f(x)$ par valeurs absolues croissantes

$$|c_{i-1}| \leqslant |c_i|$$

d'où

$$\lim_{i \to +\infty} |c_i| = +\infty .$$

4° Le produit infini $a_k x^k \prod_{i=1}^{+\infty} (1 - \frac{x}{c_i})$ converge quel que soit $x$ puisque $\lim_{i \to +\infty} \frac{x}{c_i} = 0$.

Soit $\rho \in R^+$. Considérons le polynôme

$$P_\rho(x) = a_k x^k \prod_{|c_i| \leqslant \rho} (1 - \frac{x}{c_i})$$

et posons

$$f(x) = P_\rho(x)\, g(x) .$$

$g(x)$ est une fonction entière telle que $g(0) = 1$ ,

$$g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n .$$

De plus, $g(x)$ n'a aucun zéro dans le disque $|x| \leqslant \rho$ :

$$m(\rho , g) = 0 .$$

D'où

$$n > 1 \implies |b_n| \rho^n < 1 .$$

En tout point $x$ du disque $|x| < \rho$ ,

$$|b_n| \; |x|^n < |b_n| \rho^n < 1$$

$$|g(x)| = 1 , \qquad |f(x)| = |P_\rho(x)| .$$

Soit alors $x$ un élément déterminé de $K$ : $\exists \rho$ $(\rho \in R^+)$ tel que $|x| < \rho$ ,

$$|f(x) - P_\rho(x)| = |f(x)| \; |g(x) - 1|$$

$$|f(x) - P_\rho(x)| \leqslant |f(x)| \max_{n \geqslant 1} |b_n| \; |x|^n$$

$$|b_n| \; |x|^n < |b_n| \rho^n \left(\frac{|x|}{\rho}\right)^n < \frac{|x|}{\rho} .$$

Faisons tendre $\rho$ vers $+\infty$ :

$$\lim_{\rho \to +\infty} \frac{|x|}{\rho} = 0 \qquad f(x) = \lim_{\rho \to +\infty} P_\rho(x) .$$

SCHOEBE examine ensuite la validité du théorème de Liouville qui, en théorie des fonctions de variable complexe, exprime qu'une fonction entière bornée est constante.

Utilisant pour sa démonstration les formules de Cauchy, il est conduit à distinguer les mêmes cas.

## 2. THÉORÈMES de Liouville.

$(T\ L_1)$ Si $K$ est un corps à valuation dense ou indice infini, toute fonction entière bornée est constante.

Démonstration. - Les hypothèses relatives au corps $K$ sont les conditions d'application de $(C\ F_1)$ (exposé 4a, chap. 2). Sur le cercle $|x| = \rho$

$$\mu(\rho) = M(\rho) .$$

La fonction entière $f(x)$ est supposée bornée.

$$\exists\ A \quad (A \in R^+) \quad \text{tel que, quel que soit } \rho , \quad \mu(\rho) < A$$

d'où, quel que soit $\rho$ ,

$$|a_n|\rho^n < A .$$

Il en résulte, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à $1$ ,

$$|a_n| = 0 .$$

$$f(x) = a_0 ,$$

$f(x)$ est une fonction constante.

Dans le cas contraire, c'est-à-dire celui d'un corps $K$ à valuation discrète et indice fini, SCHOEBE établit l'existence de <u>fonctions entières non constantes et bornées</u>.

Il introduit d'abord la notion <u>d'ordre</u> d'une fonction entière. On a vu :

$$" (1) \quad \overline{\lim_{n\to+\infty}} |a_n|^{1/n} = 0 " \iff " \lim_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = 0 "$$

implique, et réciproquement :

(2) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \left|\frac{1}{a_n}\right| = +\infty .$$

L'ordre d'une fonction entière exprime la comparaison des croissances des infiniment grands $\frac{1}{n} \log \left|\frac{1}{a_n}\right|$ et $\log n$ , lorsque $n \to +\infty$ .

DÉFINITION. - On appelle ordre d'une fonction entière, le nombre $\omega$ ,

$$\omega = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{x \log n}{\log \left|\frac{1}{a_n}\right|} .$$

C'est un réel positif ou nul, ou $+\infty$ .

(T $L_2$) <u>Si</u> $K$ <u>est un corps à valuation discrète et indice fini</u> $k$ ,

1° <u>Toute fonction entière non constante et bornée est nécessairement d'ordre au moins égal à un nombre réel déterminé</u> $\omega_0$ ,

2° <u>Il existe des fonctions entières non constantes et bornées d'ordre fini.</u>

Démonstration. - La valuation de $K$ étant discrète, l'ensemble $v(K)$ des valeurs absolues est l'ensemble des puissances entières d'un réel $\pi$ compris entre 0 et 1 .

1° Considérons une fonction entière non constante et bornée,

$$\forall\ x\quad (x \in K) \qquad |f(x)| < \pi^{t}\ ;$$

$f(x)$ n'est pas un polynôme : en effet, si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{q} a_n\, x^n\ ,\quad q \geqslant 1\ ,\quad a_q \neq 0\ ,$$

pour $x \neq 0$ ,

$$|f(x)| = |a_q|\ |x|^q \left[1 + \frac{a_{q-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{a_q\ x^q}\right]\ ,$$

pour $x$ assez grand en valeur absolue,

$$|f(x)| = |a_q|\ |x|^q\ ,$$

si $|x| \to +\infty$ , $|f(x)| \to +\infty$ : $f(x)$ n'est pas bornée.

Ainsi, il existe une infinité d'indices $n$ tels que $a_n \neq 0$ . Posons, pour ces indices

$$|a_n| = \pi^{\alpha_n} \qquad \alpha_n = \frac{\log \left|\frac{1}{a_n}\right|}{\log \frac{1}{\pi}}\ .$$

On se place sur le cercle $|x| = \pi^{-\ell}$

$$|a_n|\ |x|^n = \pi^{\alpha_n - \ell n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n|\ |x|^n = 0 \implies \lim_{n\to+\infty} (\ell n - \alpha_n) = -\infty$$

soit $r_\ell = \max\limits_n (\ell n - \alpha_n)$ ,

$$\exists\ \ell_0\quad (\ell_0 \in Z)\quad \text{tel que}\quad \ell > \ell_0 \implies r_\ell > -t\ .$$

Dans tout ce qui suit, la condition $\ell > \ell_0$ est supposée réalisée.

La méthode consiste à décomposer $f(x)$ en un polynôme $g(x)$ et une série-reste $F(x)$ tels que :

$|F(x)|$ soit majorée par $\pi^t$

$g(x)$ contienne des termes de valeur absolue supérieure à $\pi^t$

de manière à être dans les conditions d'application du corollaire de (C $F_2$) (exposé 4a, chap. 2).

L'ensemble des $n$ tels que $\ell n - \alpha_n \geqslant - t$ est fini et non vide ; choisissons pour degré $q_\ell$ du polynôme $g(x)$ le plus grand de ces $n$.

$$g(x) = \sum_{n=0}^{q_\ell} a_n x^n$$

$$F(x) = \sum_{n=q_\ell+1}^{+\infty} a_n x^n$$

$$n > q_\ell \implies \ell n - \alpha_n < - t$$

$$\pi^{\alpha_n - \ell n} < \pi^t$$

d'où

$$|F(x)| < \pi^t$$

$$g(x) = f(x) - F(x) \qquad |g(x)| < \pi^t$$

Sur le cercle $|x| = \rho = \pi^{-\ell}$, pour le polynôme $g(x)$,

$$M(\rho) = \max_{x=0,\dots,q_\ell} |a_n x^n| = \pi^{-r_\ell}$$

$$\mu(\rho) = \sup_{|x|=\pi^{-\ell}} |g(x)| \leqslant \pi^t$$

$$\mu(\rho) \leqslant \pi^{t+r_\ell} M(\rho)$$

et d'après le corollaire de (C $F_2$)

(3) $$q_\ell \geqslant \frac{(k-1)^2}{k} (r_\ell + t) .$$

Examinons la variation de $q_\ell$ et $\alpha_{q_\ell}$ lorsque $\ell \to +\infty$ :

$$r_{\ell+1} = \max_n [(\ell + 1)n - \alpha_n]$$

$$r_{\ell+1} \geqslant (\ell + 1)q_\ell - \alpha_{q_\ell} \geqslant - t + q_\ell .$$

Avec (3) :

$$(4) \qquad r_{\ell+1} + t \geqslant q_\ell \geqslant \frac{(k-1)^2}{k} (r_\ell + t) .$$

Supposons $k \geqslant 3$ . $\frac{(k-1)^2}{k} = k_1$ est un nombre supérieur à $1$ .

$$r_\ell + t \geqslant k_1^{\ell-\ell_0}$$

$$(5) \qquad q_\ell \geqslant k_1^{\ell-\ell_0+1}$$

et

$$\lim_{\ell\to+\infty} q_\ell = +\infty .$$

D'autre part, $\ell q_\ell - \alpha_{q_\ell} \geqslant - t \implies \alpha_{q_\ell} \leqslant \ell q_\ell + t$ . Avec (5) :

$$\alpha_{q_\ell} \leqslant (1 + \varepsilon_{q_\ell}) \frac{q_\ell \log q_\ell}{\log k_1} \qquad \varepsilon_{q_\ell} = \frac{\log k_1}{\log q_\ell} (\ell_0 - 1 + \frac{t}{q_\ell})$$

$$(6) \qquad \frac{q_\ell \log q_\ell}{\log |\frac{1}{a_{q_\ell}}|} \geqslant \frac{\log k_1}{(1 + \varepsilon_{q_\ell}) \log \frac{1}{\pi}}$$

$$\lim_{\ell\to+\infty} \varepsilon_{q_\ell} = 0 .$$

$\frac{q_\ell \log q_\ell}{\log |\frac{1}{a_{q_\ell}}|}$ représente une suite extraite de la suite $\frac{n \log n}{\log|\frac{1}{a_n}|}$ , on a donc

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{n \log n}{\log |\frac{1}{a_n}|} \geqslant \omega_0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{\log \frac{(k-1)^2}{k}}{\log \frac{1}{\pi}} ,$$

c'est-à-dire

$$\omega \geqslant \omega_0 .$$

Si $k = 2$ , $\frac{(k-1)^2}{k} = \frac{1}{2}$ , $k_1 < 1$ : la démonstration précédente doit être modifiée. Au lieu de $r_{\ell+1}$ , on forme

$$r_{\ell+3} = \max_n [(\ell + 3)n - \alpha_n]$$

$$r_{\ell+3} \geqslant (\ell + 3)q_\ell - \alpha_{q_\ell} \geqslant - t + 3q_\ell .$$

(4) est remplacé par

(4) bis $$r_{\ell+3} + t \geqslant 3q_\ell \geqslant \frac{3(k - 1)^2}{k} (r_\ell + t) .$$

Le nombre $k_2 = \frac{3(k - 1)^2}{k} = \frac{3}{2}$ étant supérieur à $1$ , on en déduit

(5) bis $$q_\ell \geqslant c \; k_2^{\ell/3} ,$$

où $c$ désigne une constante positive, et

$$\lim_{\ell \to +\infty} q_\ell = + \infty .$$

La fin de la démonstration est analogue.

2° Un exemple prouve l'existence de fonctions entières bornées non constantes.

Soit

$$f(x) = \prod_{n=0}^{+\infty} \left[1 - (p^n \; x)^{k-1}\right]^{(k+1)^n}$$

où $p$ désigne un élément premier du corps $K$ , c'est-à-dire tel que $|p| = \pi$ .

Quel que soit $x$ ,

$$\lim_{n \to +\infty} |p^n \; x|^{k-1} = |x|^{k-1} \lim_{n \to +\infty} (\pi^{k-1})^n = 0 ,$$

donc le produit infini converge.

Ce produit peut être développé en série de puissances de $x^{k-1}$ , c'est-à-dire en série entière lacunaire.

Ainsi $f(x)$ désigne bien une fonction entière.

Examinons les valeurs de $|f(x)|$ sur le cercle $|x| = \pi^{-\ell}$ ,

$$|p^n \; x| = \pi^{n-\ell} ;$$

si $n > \ell$ $\quad |p^n x| < 1 \quad |1 - (p^n x)^{k-1}| = 1$

si $n = \ell$ $\quad |p^n x| = 1 \quad |1 - (p^n x)^{k-1}| < 1$ , donc $|1 - (p^n x)^{k-1}| \leqslant \pi$

si $n < \ell$ $\quad |p^n x| > 1 \quad |1 - (p^n x)^{k-1}| = \pi^{-(k-1)(\ell-n)}$

$$|f(x)| \leqslant \pi^{\alpha} \text{ , avec } \alpha = (k+1)^{\ell} - (k-1) \sum_{n=0}^{\ell-1} (\ell - n)(k+1)^n ,$$

$$\sum_{n=0}^{\ell-1} (\ell - n)(k+1)^n = (k+1)^{\ell-1} \sum_{m=1}^{\ell} m\left(\frac{1}{k+1}\right)^{m-1}$$

$$\sum_{m=1}^{\ell} m\left(\frac{1}{k+1}\right)^{m-1} \leqslant \frac{(k+1)^2}{k^2}$$

$$|f(x)| \leqslant \pi^{\left((k+1)^{\ell}\right)/k^2}$$

$f(x)$ est donc bornée puisque, quel que soit $\ell$ , $|f(x)| \leqslant 1$ .

<u>Remarque</u>. - $\lim\limits_{|x| \to +\infty} |f(x)| = 0$ .

Il reste à montrer que la fonction entière précédente est d'ordre $\omega$ fini,

$$\omega = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{n \log n}{\log \left|\frac{1}{a_n}\right|} .$$

Le développement en série entière de $f(x)$ ne contient que des puissances de $x^{k-1}$

Si $n \neq o(k-1)$ : $\quad a_n = 0$ .

Si $n = (k-1)s$ : $\quad a_n$ se présente comme une somme de puissances de $p$ , son plus grand terme en valeur absolue est celui qui correspond au plus petit exposant :

$$(k-1)\left[(k+1) + 2(k+1)^2 + \ldots + t(k+1)^t\right]$$

$t$ étant un entier tel que l'exposant de $x^{k-1}$

$$1 + (k+1) + (k+1)^2 + \ldots + (k+1)^t$$

atteigne $s$ .

Soit $u$ un entier tel que

$$(k+1)^u \leqslant ks \leqslant (k+1)^{u+1}$$

$$1 + (k+1) + \dots + (k+1)^{u-1} = \frac{(k+1)^u - 1}{k} < s \, .$$

Donc $t \geqslant u - 1$

$$|a_n| \leqslant \pi^{(k-1)(u-1)(k+1)^{u-1}}$$

$$(k+1)^{u+1} \geqslant ks > n \qquad (k+1)^{u-1} > \frac{n}{(k+1)^2} \, , \quad u - 1 > \frac{\log n}{\log(k+1)} - 2$$

$$\log \left|\frac{1}{a_n}\right| \geqslant \frac{(k-1) \log \frac{1}{\pi}}{(k+1)^2 \log(k+1)} (1 - \varepsilon_n) \, n \log n$$

avec $\varepsilon_n = \dfrac{2 \log(k+1)}{\log n}$ : $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$

$$\frac{n \log n}{\log \left|\frac{1}{a_n}\right|} \leqslant \frac{(k+1)^2 \log(k+1)}{(k-1) \log \frac{1}{\pi}} \times \frac{1}{1 - \varepsilon_n} \, .$$

La fonction $f(x)$ est d'ordre fini

$$\omega \leqslant \frac{(k+1)^2 \log(k+1)}{(k-1) \log \frac{1}{\pi}} \, .$$

## Chapitre 4. Prolongement analytique.

La méthode de Weierstrass utilisée en théorie des fonctions de variable complexe pour prolonger une série $P(z)$ , qui consiste à effectuer une translation

$$z \to z' = z - z_0 \, ,$$

n'aboutit pas à un prolongement analytique dans un corps à valuation non archimédienne puisque le disque de convergence de la série $P(z)$ et celui de la série transformée coïncident.

L'idée de SCHOEBE est de prolonger une série entière par une représentation en série de puissances de $\frac{1}{x}$ . Soit

$$P(x-a) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x-a)^n \tag{7}$$

une série convergente dans un disque D de centre a .

On cherche une représentation

$$Q(\frac{1}{x}) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{c_m}{x^m} .$$

Il y aura prolongement analytique si le domaine de convergence de $Q(\frac{1}{x})$ contient D . On suppose nécessairement :

- $a \neq 0$ .
- Le disque D est l'ensemble des x tels que $|x - a| < \rho|a|$ où $\rho$ désigne un réel positif <u>inférieur ou égal à</u> 1 , de façon que D ne contienne pas 0 .

La transformation s'effectue en deux temps.

Soit $x \in D$ . On effectue un premier changement de variable $x \to y$ tel que

$$x - a = \frac{ay}{1 - y}$$

qui applique le disque D : $|x - a| < \rho|a|$ sur le disque D' : $|y| < \rho$ ,

$$P(x - a) \to R(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{a_n y^n}{(1 - y)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} b_n a^n y^{n+p} \binom{n-1+p}{n-1} .$$

Examinons la valeur absolue du terme général de la série double :

$$|b_n a^n y^{n+p} \binom{n-1+p}{n-1}| \leqslant \begin{cases} |b_n a^n y^n| & \text{si } p = 0 \\ \\ |y|^p \max\limits_n |b_n a^n y^n| & \text{si } p > 0 \end{cases}$$

$x \in D$ :

$$\lim_{x \to +\infty} |b_n| \; |x - a|^n = 0$$

$$|x - a| = |ay|$$

$$\lim_{n \to +\infty} |b_n a_n y^n| = 0 .$$

Le terme général de la série double tend vers 0 ; on peut sommer dans un ordre arbitraire et grouper des termes.

Posons $n + p = q$ ,

$$R(y) = \sum_{q=0}^{+\infty} \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{q-1}{n-1} b_n a^n \right] y^q$$

(8) $$R(y) = \sum_{q=0}^{+\infty} d_q\, y^q \qquad \text{avec} \quad d_q = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{q-1}{n-1} b_n\, a^n .$$

Supposons que $P(x - a)$ puisse être représentée par une série $Q(\frac{1}{x})$ :

$$Q(\frac{1}{x}) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{c_m}{x^m} .$$

<u>Nécessairement</u>, dans $Q(\frac{1}{x})$ , la transformation $x - a = \frac{ay}{1-y}$ doit conduire à $R(y)$

$$x - a = \frac{ay}{1-y} \implies \frac{1}{x} = \frac{1-y}{a}$$

$$Q(\frac{1}{x}) \to \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{c_m}{a^m} (1 - y)^m = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} (-1)^q \frac{c_m}{a^m} \binom{m}{q} y^q .$$

En valeur absolue, le terme général de cette série double :

$$\left|\frac{c_m}{a^m} \binom{m}{q} y^q\right| \leqslant \begin{cases} \left|\frac{c_m}{a^m}\right| & \text{si } q = 0 \\ |y|^q \max\limits_m \left|\frac{c_m}{a^m}\right| & \text{si } q > 0 . \end{cases}$$

Il tend vers 0 puisque $Q(\frac{1}{x})$ , comme $P(x - a)$ , converge pour $x = a$ . On peut échanger les indices de sommation :

$$Q(\frac{1}{x}) \to \sum_{q=0}^{+\infty} (-1)^q \left[\sum_{m=0}^{+\infty} \binom{m}{q} \frac{c_m}{a^m}\right] y^q$$

On a alors, nécessairement,

$$d_q = (-1)^q \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{m}{q} \frac{c_m}{a^m}$$

et

$$\lim_{q \to +\infty} d_q = 0 .$$

<u>Réciproquement</u>, reprenons (8) et supposons :

$$\lim_{q \to +\infty} d_q = 0 ,$$

$R(y)$ converge pour $y$ tel que $|y| \leqslant 1$ . Effectuons le changement de variable inverse $y \to x$ , c'est-à-dire, puisque $x - a = \frac{ay}{1-y}$ , $y = 1 - \frac{a}{x}$ ;

$$R(y) \to Q(\frac{1}{x}) = \sum_{q=0}^{+\infty} d_q (1 - \frac{a}{x})^q = \sum_{q=o}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m d_q \binom{q}{m} \frac{a^m}{x^m} .$$

Le terme général de cette série double tend vers $0$ : en effet

$$\lim_{q \to +\infty} d_q = 0$$

et

$$|y| \leqslant 1 \implies |x| \geqslant |a| .$$

D'où

$$Q(\frac{1}{x}) = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \left[\sum_{q=0}^{+\infty} d_q \binom{q}{m}\right] \frac{a^m}{x^m} \tag{9}$$

et

$$c_m = (-1)^m a^m \sum_{q=0}^{+\infty} \binom{q}{m} d_q = (-1)^m a^m \sum_{q=m}^{+\infty} \binom{q}{m} d_q .$$

THÉORÈME. - Une série

$$P(x-a) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x-a)^n$$

telle que $a \neq 0$ , et convergente dans un disque $D$ de rayon inférieur à $|a|$ , peut être représentée par une série

$$Q(\frac{1}{x}) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{c_m}{x^m}$$

si la suite

$$d_q = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{q-1}{n-1} b_n a^n$$

converge vers $0$ . Les coefficients $c_m$ sont déterminés par

$$c_m = (-1)^m a^m \sum_{q=m}^{+\infty} \binom{q}{m} d_q .$$

SCHOEBE vérifie sur un exemple qu'une telle transformation peut augmenter le domaine de convergence initial :

Soit $K = Q_2$ le corps p-adique complété du corps $Q$ des nombres rationnels par $\pi = |2| = \frac{1}{2}$. Considérons la série

$$P(x - 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \frac{(-1)^n}{n}\right](x - 1)^n .$$

Avec les notations précédentes,

$$a = 1 ,$$
$$b_0 = 0 , \quad b_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{si} \quad n > 1 ,$$

la série converge sur le disque $D$ : $|x - 1| < 1$. Etudions la suite $d_q$ :

$$d_0 = b_0 = 0$$

$$d_q = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{q-1}{n-1} b_n = \sum_{n=1}^{q} \binom{q-1}{n-1} b_n = \frac{2^q}{q} \qquad \text{si} \quad q > 0 .$$

Si $q > 0$,

$$|d_q| = \left|\frac{1}{q}\right| \left(\frac{1}{2}\right)^q$$

$$|d_q| \leqslant q\left(\frac{1}{2}\right)^q$$

$$\lim_{q \to +\infty} d_q = 0 .$$

D'après le théorème précédent, $P(x - 1)$ peut être transformée en $Q(\frac{1}{x})$ :

$$c_m = (-1)^m \sum_{q=m}^{+\infty} \binom{q}{m} \frac{2^q}{q} \qquad \begin{cases} c_0 = 0 \\ c_m = \dfrac{2^m}{m} \quad \text{si} \quad m > 0 \end{cases}$$

$$Q\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2^m}{mx^m}$$

$P(x - 1)$ converge dans le disque $D$ : $|x - 1| < 1$,

$Q(\frac{1}{x})$ converge dans le domaine $D'$ : $|x| > \frac{1}{2}$,

et $D \subsetneq D'$.