Françoise Bertrandias

Théorème de Koksma en p-adique

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 6, n° 1 (1964-1965), exp. n° 3, p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1964-1965__6_1_A2_0>

Séminaire DELANGE-PISOT
(Théorie des nombres)
6e année, 1964/65, n° 3

23 novembre 1964

THÉORÈME DE KOKSMA EN p-ADIQUE

par Mme Françoise BERTRANDIAS

Le but de cet exposé est de démontrer un analogue p-adique du théorème de Koksma sur la répartition modulo 1 ; ce théorème démontre une propriété métrique d'équi-répartition modulo 1 dans R , dont voici un des énoncés (non le plus général, cf. [5]).

THÉORÈME DE KOKSMA. - a et b désignent deux réels, avec $a < b$. *Soit* $\{f_n\}$ $(n = 1 , 2 \ldots)$ *une suite d'applications continues et dérivables de* $[a , b]$ *dans* R , *telles que, pour tout couple* m , n $(m , n \in N)$ avec $m \neq n$, *l'application* $f'_m - f'_n$ *soit monotone sur* $[a , b]$ *et vérifie* :

$$|f'_m(x) - f'_n(x)| > K > 0 , \qquad \forall x \in [a , b]$$

(K indépendant de m , n , x) .

Alors la suite $\{f_n(x)\}$ $(n = 1 , 2 , \ldots)$ *est équirépartie dans* R *modulo* 1 *pour presque tout* x *de* $[a , b]$.

Il en résulte immédiatement :

COROLLAIRE 1. - *La suite* $\{x\theta^n\}$ $(\theta \in R , |\theta| > 1)$ *est équirépartie modulo* 1 *pour presque tout* x *de* R .

COROLLAIRE 2. - *La suite* $\{\lambda x^n\}$ $(\lambda \in R , \lambda \neq 0)$ *est équirépartie modulo* 1 *pour presque tout* x *de* R *tel que* $|x| > 1$.

Dans sa démonstration, KOKSMA utilise le *théorème de Weyl*, qui donne une caractérisation des suites équiréparties : $\{u_n\}$ $(n = 1 , 2 , \ldots)$ désigne une suite de réels ; $\{u_n\}$ est équirépartie modulo 1 si, et seulement si, pour tout $k \neq 0$ de Z

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \exp 2i\pi k u_n = 0 .$$

Les corollaires 1 et 2 du théorème de Koksma sont en relation avec les éléments de l'ensemble S (nombres de Pisot) :

Si θ est un élément de S , pour tout x entier algébrique du corps $Q(\theta)$,

$$x\theta^n \to 0 \text{ modulo } 1 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty \ ;$$

un tel x appartient donc à l'ensemble de mesure nulle du corollaire 1. Dans le corollaire 2, si $\lambda = 1$ et si x est un élément de S,

$$x^n \to 0 \text{ modulo } 1 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty \ ;$$

S est donc contenu dans l'ensemble de mesure nulle du corollaire 2, dans le cas $\lambda = 1$.

Dans cet exposé, on se propose d'étudier la répartition de suites de réels définies par des applications de Q_p dans R/Z (§ 2), et de suites vectorielles définies par des applications de $V_E(Q)$ dans $(R/Z)^{c(E)}$ (§ 3), en vue d'obtenir des théorèmes métriques analogues au théorème de Koksma. Les résultats obtenus seront en relation avec les éléments de l'ensemble $S_{(p)}^{(0)}$ de Q_p, ou de l'ensemble $S_E^{(0)}$ de $V_E(Q)$ [1]. On rappellera dans le § 1 quelques propriétés de l'intégration dans Q_p et dans $V_E(Q)$.

1. Intégration dans Q_p et $V_E(Q)$.

1.1 Homomorphismes dans R/Z. - Tout nombre p-adique x possède une infinité de développements de la forme

$$x = \sum_{n=-k}^{+\infty} a_n p^n \qquad (n \in Z \ , \quad a_{-k} \not\equiv 0 \mod p) \ .$$

Deux développements distincts (a_n) et (a'_n) sont tels que le rationnel

$$\sum_{n=-k}^{-1} a_n p^n - \sum_{n=-k}^{-1} a'_n p^n$$

a une valeur absolue p-adique $\leqslant 1$; ce rationnel, qui ne contient en dénominateur que le facteur p, est donc un entier.

On note $H_p(x)$ l'élément de R/Z défini par :

$$H_p(x) = \sum_{n=-k}^{-1} a_n p^n \pmod 1 \ .$$

L'application H_p de Q_p dans R/Z possède les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} H_p(x_1 + x_2) = H_p(x_1) + H_p(x_2) & \forall\, x_1 \ , x_2 \in Q_p \\ |x_1 - x_2|_p \leqslant 1 \implies H_p(x_1) = H_p(x_2) \ , & \end{cases}$$

H_p est donc un homomorphisme continu du groupe additif Q_p dans le groupe additif

R/Z . On voit facilement que l'application $x \to H_p(xy)$, où $y \in Q_p$, est elle aussi un homomorphisme continu de Q_p dans R/Z . On montre ([4], § 25-1) qu'on obtient ainsi tous les homomorphismes continus du groupe additif Q_p dans R/Z .

Soit

$$x = \sum_{p\in E} x_p \, e_{(p)}$$

un élément de $V_E(Q)$ $(x_p \in Q_p)$, (voir notations dans [2]). On désigne par $c(E)$ le nombre d'éléments de l'ensemble E ; si ξ est un réel, $H_0(\xi)$ désigne l'élément de R/Z défini par $H_0(\xi) = \xi \pmod 1$. On voit facilement que l'application

$$x \to (H_p(x_p))_{p\in E}$$

est un homomorphisme continu du groupe additif $V_E(Q)$ dans le groupe additif $(R/Z)^{c(E)}$, ainsi que toute application

$$x \to (H_p(x_p\, y_p))_{p\in E} \quad \text{où} \quad y \in V_E(Q) .$$

1.2 Intégrale et mesure de Haar. - Le groupe additif Q_p étant un groupe abélien localement compact, il existe une fonctionnelle linéaire non négative, invariante par translation, sur l'espace $\mathcal{C}_{00}(Q_p , C)$ des fonctions continues à valeurs complexes de support compact dans Q_p ([4], § 15), et une mesure associée, ou mesure de Haar. On normalise la mesure de Haar de Q_p par la condition : $\text{mes}\, Z_p = 1$. Par suite, si D est un disque de rayon p^h de Q_p , c'est-à-dire

$$D = \{x \in Q_p : |x - x_0|_p \leqslant p^h\} ,$$

on a

$$\text{mes}\, D = p^h .$$

Le groupe additif $V_E(Q)$ étant isomorphe au groupe produit des groupes additifs Q_p $(p \in E)$, son intégrale et sa mesure de Haar se déduisent de l'intégrale et de la mesure de Haar de Q_p ([4], § 13). A étant un compact de $V_E(Q)$ défini par

$$A = \{x \in V_E(Q) : x_p \in A_p , \quad p \in E\}$$

où A_p est un compact de Q_p , et f_p étant une application continue de A_p dans Q_p , on a

$$\int_A \Big(\prod_{p\in E} f_p(x_p)\Big)\, dx = \prod_{p\in E} \Big(\int_{A_p} f_p(x_p)\, dx_p\Big) .$$

1.3 Intégration des caractères sur Z_p . - L'application $x \to H_p(xy)$ (où $y \in Q_p$) est un homomorphisme continu du groupe additif Z_p dans R/Z , puisque homomorphisme continu de Q_p dans R/Z (§ 1.1). Or

$$|x|_p \leqslant 1 \implies H_p(xy) = H_p(xH_p(y)) .$$

Par suite les homomorphismes précédents non nuls sont de la forme :

$$x \to H_p(xy) \quad \text{avec} \quad y = mp^{-k} \quad (m \in Z , \quad |m|_p = 1 , \quad k \in Z , \quad k \geqslant 1) .$$

L'application $x \to \exp(2i\pi H_p(xy))$ est donc un caractère continu du groupe additif Z_p, différent de 1 si et seulement si $|y|_p > 1$. Conséquence : L'intégrale sur un groupe compact d'un caractère étant égale à 0 ou 1 suivant que ce caractère est différent de 1 ou non, ([4], § 23.19), on a :

$$(1) \qquad \int_{Z_p} \exp(2i\pi H_p(xy))\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } |y|_p > 1 \\ 1 & \text{si } |y|_p \leqslant 1 . \end{cases}$$

Il est intéressant de donner une démonstration élémentaire de ce résultat. On peut supposer $y = mp^{-k}$, avec $k \geqslant 1$ et $|m|_p = 1$ (le cas $|y|_p \leqslant 1$ est évident). Le disque Z_p est recouvert par p^k disques disjoints de rayon p^{-k}, centrés aux points $0 , 1 , \ldots , p^k - 1$. Comme

$$|x - x'|_p \leqslant p^{-k} \implies H_p(xy) = H_p(x'y) ,$$

l'intégrale est égale à la somme finie

$$p^{-k} \sum_{n=0}^{p^k-1} \exp(2i\pi H_p(nmp^{-k})) = p^{-k} \sum_{n=0}^{p^k-1} \exp(2i\pi nmp^{-k}) = 0 .$$

De la relation (1), on va déduire le résultat suivant :

LEMME 1. - Soit Φ une application isométrique de Z_p dans lui-même c'est-à-dire telle que, quels que soient x, y dans Z_p, on ait :

$$|\Phi(x) - \Phi(y)|_p = |x - y|_p .$$

On a :

$$\int_{Z_p} \exp(2i\pi H_p(y\Phi(x)))\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } |y|_p > 1 \\ 1 & \text{si } |y|_p \leqslant 1 . \end{cases}$$

Démonstration. - Le cas $|y|_p \leqslant 1$ étant évident, on va supposer $y = mp^{-k}$, avec $|m|_p = 1$ et $k \geqslant 1$. Considérons le recouvrement de Z_p par les p^k disques de rayon p^{-k}. Comme

$$|x - x'|_p \leqslant p^{-k} \implies |\Phi(x) - \Phi(x')|_p \leqslant p^{-k} \implies H_p(y\Phi(x) = H_p(y\Phi(x') ,$$

l'intégrale est égale à la somme finie :

$$p^{-k} \sum_{n=0}^{p^k-1} \exp(2i\pi H_p(y\Phi(n))) .$$

Or $n \neq n' \Longrightarrow |\Phi(n) - \Phi(n')| = |n - n'|_p \geqslant p^{-k}$. Les $\Phi(n)$ $(n = 0 , 1 , \ldots , p^k - 1)$ sont donc incongrus modulo p^k ; comme ils sont au nombre de p^k , ils constituent un système complet de représentants de $Z_p/p^k Z_p$. Par suite, il existe une permutation $(j_n)_{n=0,\ldots,p^k-1}$ de $(0 , 1 , \ldots , p^k - 1)$ telle que $|\Phi(n) - j_n|_p \leqslant p^{-k}$. Il en résulte :

$$p^{-k} \sum_{n=0}^{p^k-1} \exp(2i\pi H_p(y\Phi(n))) = p^{-k} \sum_{n=0}^{p^k-1} \exp(2i\pi H_p(yn)) = \int_{Z_p} \exp(2i\pi H_p(yx))\, dx .$$

D'où le résultat.

1.4 Un théorème métrique. - La propriété suivante se déduit d'une propriété générale de toute fonctionnelle linéaire non négative sur l'espace $C(X , C)$ des fonctions continues à valeurs complexes, définies sur un espace topologique compact X ([4], § 11.27).

LEMME 2. - Soient X un compact de G , groupe abélien localement compact, et $\{h_n\}$ $(n = 1 , 2 , \ldots)$ une suite d'applications non négatives de $C(X , C)$ telles que

$$\lim_{n\to+\infty} I(h_n) = 0 , \text{ où } I(h_n) = \int_X h_n(x)\, dx \quad \text{(intégrale de Haar).}$$

Soit $\{n_k\}$ $(k = 1 , 2 , \ldots)$ une suite croissante d'entiers positifs tels que

$$\sum_{k=1}^{\infty} I(h_{n_k}) < + \infty .$$

Il en résulte :

$$\lim_{k\to+\infty} h_{n_k}(x) = 0 \ \text{ presque partout dans } X$$

(c'est-à-dire sauf pour x appartenant à un sous-ensemble de X ayant une mesure de Haar nulle).

Dans la suite, on appliquera le lemme 2 au cas : $G = Q_p^+$, et $G = V_E(Q)^+$ (le cas $G = R^+$ de cette propriété est utilisé dans la démonstration du théorème de Koksma).

2. Equirépartition d'une suite d'applications de Q_p dans R/Z .

2.1. - On se propose de démontrer les résultats suivants :

THÉORÈME 1. - D désigne un disque de Q_p . Soit $\{f_n\}$ $(n = 1 , 2 , \ldots)$ une suite d'applications continues de D dans Q_p . Pour tout couple (m , n) d'entiers positifs, on note $F_{m,n}$ l'application $f_m - f_n$. K désigne un sous-ensemble de $\underset{\sim}{N} \times \underset{\sim}{N}$ (ensemble des couples d'entiers positifs) contenant les couples (m , n) tels que $m = n$, et K_N désigne le nombre d'éléments (m , n) de K tels que : $\sup(m , n) \leqslant N$. On suppose les deux conditions suivantes vérifiées :

(1) Si $(m , n) \notin K$, quels que soient x et $y \in D$:

$$|F_{m,n}(x) - F_{m,n}(y)|_p = p^{\Lambda_{m,n}}|x - y|_p$$

où $\Lambda_{m,n} \in Z$ et vérifie $\Lambda_{m,n} \to + \infty$ quand $\sup(m , n) \to + \infty$.

(2) Il existe une suite croissante $\{N_k\}$ $(k = 1 , 2 , \ldots)$ d'entiers positifs tels que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{N_{k+1}}{N_k} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{K_{N_k}}{N_k^2} < + \infty .$$

Alors la suite $\{H_p(f_n(x))\}$ $(n = 1 , 2 , \ldots)$ est équirépartie dans R/Z pour presque tout x de D .

La condition 2 est équivalente à la condition suivante

$$\sum_{N=1}^{+\infty} \frac{K_N}{N^3} < + \infty .$$

THÉORÈME 1 bis. - Dans l'énoncé du théorème 1 on peut remplacer la condition (1) par la condition plus faible (1 bis) (*) :

(1 bis) Si $(m , n) \in K$, il existe une partition :

$$D = \bigcup_{j=1}^{J(m,n)} D^j_{m,n}$$

du disque D en un nombre fini $J(m , n)$ de disques disjoints $D^j_{m,n}$, de rayon $p^{h^j_{m,n}}$, tels que, quels que soient x et $y \in D^j_{m,n}$:

$$|F_{m,n}(x) - F_{m,n}(y)|_p = p^{\Lambda^j_{m,n}}|x - y|_p$$

(*) à la suite d'une remarque de Y. AMICE .

où $\Lambda^j_{m,n} \in Z$, et

$$\inf_{j=1,\dots,J(m,n)} (\Lambda^j_{m,n} + h^j_{m,n}) \to +\infty \quad \text{quand} \quad \sup(m\ ,\ n) \to +\infty\ .$$

COROLLAIRES du théorème 1.

(1) La suite $\{H_p(x\theta^n)\}$ ($\theta \in Q_p$, $|\theta|_p > 1$) est équirépartie dans R/Z pour presque tout x de Q_p .

(2) La suite $\{H_p(\lambda x^n)\}$ ($\lambda \in Q_p$, $\lambda \neq 0$) est équirépartie dans R/Z pour presque tout x de Q_p tel que $|x|_p > 1$.

Remarques :

1° Si θ est un élément de l'ensemble $S^{(0)}_{(p)}$, et si x est un élément algébrique α du corps $Q(\theta)$ tel que

- $p^a\,\alpha$ soit entier algébrique ($a \in Z$) ,
- tous les conjugués de α (dans Ω_p) aient une valeur absolue p-adique ≤ 1 ,

alors

$$H_p(\alpha\theta^n) \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty\ .$$

Pour les nombres p-adiques **x de cette forme**, la suite $\{H_p(x\theta^n)\}$ n'est donc pas équirépartie.

2° Si $\lambda = 1$, et si x est un élément de $S^{(0)}_{(p)}$,

$$H_p(\lambda x^n) \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty\ ,$$

la suite $\{H_p(x^n)\}$ n'est donc pas équi**répartie**.

2.2 Démonstration des théorèmes 1 et 1 bis. - On utilise les sommes de Weyl relatives à la suite $\{H_p(f_n(x))\}$:

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \exp(2i\pi k H_p(f_n(x))) \qquad (k \in Z\ ,\ \ k \neq 0)\ .$$

D'où ($|\ \ |$ désigne la valeur absolue dans C) :

$$|\sigma_N(x)|^2 = \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2}\sum_{1\leq m<n\leq N} \cos(2\pi k H_p(F_{m,n}(x)))\ .$$

Posons $I_N = \int_D |\sigma_N(x)|^2\,dx$. On a

$$I_N = \frac{\text{mes } D}{N} + \frac{2}{N^2}\sum_{1\leq m<n\leq N} i_{m,n}$$

où

$$i_{m,n} = \int_D \cos(2\pi k H_p(F_{m,n}(x)))\, dx ,$$

et mes $D = p^h$ ($h \in Z$, p^h étant le rayon du disque D).

Pour tout couple (m , n) :

$$|i_{m,n}| \leqslant \text{mes } D = p^h .$$

Soit un couple (m , n) n'appartenant pas à l'ensemble exceptionnel K , et supposons que l'application $F_{m,n}$ vérifie la condition (1 bis). Notons :

$$i^j_{m,n} = \int_{D^j_{m,n}} \cos(2\pi k H_p(F_{m,n}(x)))\, dx .$$

on a :

$$i_{m,n} = \sum_{j=1}^{J(m,n)} i^j_{m,n} .$$

Soit $x^j_{m,n}$ un centre du disque $D^j_{m,n}$ c'est-à-dire :

$$D^j_{m,n} = \{x : |x - x^j_{m,n}|_p \leqslant p^{h^j_{m,n}}\} .$$

On pose :

$$x = x^j_{m,n} + p^{-h^j_{m,n}} \xi$$

et

$$F_{m,n}(x^j_{m,n} + p^{-h^j_{m,n}} \xi)\, p^{\Lambda^j_{m,n}+h^j_{m,n}} = \Phi^j_{m,n}(\xi) .$$

La condition (1 bis) entraîne, pour tout $\xi , \eta \in Z_p$,

$$|\Phi^j_{m,n}(\xi) - \Phi^j_{m,n}(\eta)|_p = |\xi - \eta|_p .$$

L'application $\Phi^j_{m,n}$ est donc isométrique dans Z_p . Or :

$$i^j_{m,n} = p^{h^j_{m,n}} \int_{Z_p} \cos(2\pi k H_p(p^{-\Lambda^j_{m,n}-h^j_{m,n}}\Phi(\xi)))\, d\xi$$

$$= p^{h^j_{m,n}} \int_{Z_p} \cos(2\pi H_p(kp^{-\Lambda^j_{m,n}-h^j_{m,n}}\Phi(\xi)))\, d\xi .$$

Il résulte du lemme 1 (§ 1.3) que l'intégrale :

$$\int_{Z_p} \exp(2i\pi H_p(kp^{-\Lambda^j_{m,n}-h^j_{m,n}}\Phi(\xi)))\, d\xi$$

est égale à 0 si $\Lambda^j_{m,n} + h^j_{m,n} - \chi \geqslant 1$, et égale à 1 dans le cas contraire (on note $|k|_p = p^{-\chi}$). D'où le même résultat pour l'intégrale $i^j_{m,n}$.

Par suite, si $\Lambda^j_{m,n} + h^j_{m,n} - \chi \geqslant 1$, $i^j_{m,n} = 0$.

Par hypothèse

$$\operatorname*{Inf}_{j=1,\ldots,J(m,n)} \Lambda^j_{m,n} + h^j_{m,n} \to +\infty \quad \text{quand} \quad \sup(m\ ,\ n) \to +\infty$$

c'est-à-dire : $\exists$ un entier $\nu(\chi)$ tel que

$$\sup(m\ ,\ n) > \nu(\chi) \implies \operatorname*{Inf}_{j=1,\ldots,J(m,n)} \Lambda^j_{m,n} + h^j_{m,n} \geqslant 1 + \chi \ .$$

L'inégalité précédente est donc vérifiée pour tout couple $(m\ ,\ n)$ non dans K , sauf éventuellement pour les couples tels que $\sup(m\ ,\ n) \leqslant \nu(\chi)$: le nombre de ces couples est majoré par $\nu(\chi)^2$.

On a donc $i^j_{m,n} = 0$ pour tout $j = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ J(m\ ,\ n)$ (et par suite $i_{m,n} = 0$) pour tout couple $(m\ ,\ n)$ non dans K , sauf peut-être pour $\nu(\chi)^2$ d'entre eux. Il en résulte :

$$I_N \leqslant \text{mes } D\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N^2}(\nu(\chi)^2 + K_N)\right) \ .$$

C'est-à-dire, puisque $K_N \geqslant N$:

$$I_N = O\left(\frac{K_N}{N^2}\right) \ .$$

Considérons la suite $\{N_k\}$ de la condition (2). On a :

$$\sum_{k=1}^{\infty} I_{N_k} < +\infty \ .$$

D'où, en utilisant le lemme 2 (§ 1.4) avec $G = Q^+_p$:

$$\lim_{k\to\infty} |\sigma_{N_k}(x)|^2 = 0 \quad \text{pour presque tout} \quad x \quad \text{de} \quad D \ .$$

Soit N un entier positif quelconque. Il existe un entier k , et un seul, tel que :

$$N_k \leqslant N < N_{k+1}$$

$$\sigma_N(x) = \frac{N_k}{N}\,\sigma_{N_k}(x) + \frac{1}{N}\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \exp(2i\pi k H_p(F_{m,n}(x))) \ .$$

D'où :

$$\left|\sigma_N(x) - \frac{N_k}{N}\,\sigma_{N_k}(x)\right| \leqslant \frac{N_{k+1} - N_k}{N} \leqslant \frac{N_{k+1}}{N_k} - 1$$

et :

$$|\sigma_N(x)| \leqslant \frac{N_k}{N} |\sigma_{N_k}(x)| + |\frac{N_{k+1}}{N_k} - 1| \leqslant |\sigma_{N_k}(x)| + |\frac{N_{k+1}}{N_k} - 1| .$$

D'après la condition (2)

$$|\frac{N_{k+1}}{N_k} - 1| \to 0 \quad \text{quand} \quad k \to +\infty .$$

Si x est tel que $|\sigma_{N_k}(x)| \to 0$ quand $k \to +\infty$, quel que soit N :

$$|\sigma_N(x)| \to 0 \quad \text{quand} \quad N \to +\infty .$$

Par suite, $|\sigma_N(x)| \to 0$ quand $N \to +\infty$ presque partout dans D. Le théorème 1 bis est donc démontré.

Pour achever la démonstration du théorème 1, il suffit de remarquer que la condition (1) est un cas particulier de la condition (1 bis) :

$$J(m, n) = 1 \qquad h^j_{m,n} = h \qquad \Lambda^j_{m,n} = \Lambda_{m,n} .$$

2.3 Démonstration des corollaires du théorème 1. - Le corollaire 1 est immédiat : en effet, si l'on pose $f_n(x) = x\theta^n$, on a

$$F_{m,n}(x) = x(\theta^m - \theta^n) ,$$

d'où, si $m \neq n$:

$$|F_{m,n}(x) - F_{m,n}(y)|_p = |\theta^m - \theta^n|_p \qquad \forall\, x , y \in Q_p$$

où $|\theta^m - \theta^n|_p = p^{k \sup(m,n)}$ (si $|\theta|_p = p^k$). La condition (1) est donc vérifiée. L'ensemble K se compose uniquement des couples (m , n) tels que $m = n$; c'est-à-dire $K_N = N$.

Pour démontrer le corollaire 2, on pose $f_n(x) = \lambda x^n$. Soit D un disque quelconque de rayon 1, non contenu dans Z_p. Soit p^k $(k \geqslant 1)$ la valeur absolue p-adique des points de D. Soit $y - x = p\alpha$, où $|\alpha|_p \leqslant 1$. On a, si $x \neq y$:

$$\frac{y^n - x^n}{y - x} = \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} p^{\ell-1} \alpha^{\ell-1} .$$

On pose : $|n|_p = p^{-\nu}$, $|\ell|_p = p^{-\lambda}$, $|m|_p = p^{-\mu}$. De la relation

$$|\binom{n}{\ell}|_p = p^{-P} \quad \text{avec} \quad P = \sum_{i=1}^{\infty} [\frac{n}{p^i}] - [\frac{\ell}{p^i}] - [\frac{n-\ell}{p^i}] ,$$

résulte :

$$|\binom{n}{\ell}|_p \leqslant p^{-(\nu-\lambda)} \quad \text{si} \quad \nu > \lambda .$$

On a donc, dans tous les cas,

$$|\binom{n}{\ell}|_p \leqslant p^{-(\nu-\lambda)} .$$

Comme $p^{\lambda} \leqslant \ell \implies \lambda \leqslant \frac{\log \ell}{\log p} \leqslant \frac{\log \ell}{\log 2} \leqslant 2\ell - 3$ pour $\ell \geqslant 2$, on a :

$$|\binom{n}{\ell}|_p \leqslant p^{-\nu+2\ell-3} \quad \text{pour} \quad \ell \geqslant 2 .$$

Donc

$$|\binom{n}{\ell} x^{n-\ell} p^{\ell-1} \alpha^{\ell-1}|_p \leqslant p^{-\nu+\ell-2+(n-\ell)k} = p^{(n-1)k-\nu-(\ell-1)(k-1)-1} ,$$

or

$$|\binom{n}{1} x^{n-1}|_p = p^{(n-1)k-\nu} .$$

Comme $\ell \geqslant 2$, $k \geqslant 1$, il en résulte :

$$|\binom{n}{\ell} x^{n-\ell} p^{\ell-1} \alpha^{\ell-1}|_p < |\binom{n}{1} x^{n-1}|_p \qquad (2 \leqslant \ell \leqslant n) .$$

D'où, pour tout couple $x , y \in D$ avec $x \neq y$:

$$\left|\frac{y^n - x^n}{y - x}\right|_p = |nx^{n-1}|_p = p^{(n-1)k-\nu} .$$

De même

$$\left|\frac{y^m - x^m}{y - x}\right|_p = |mx^{m-1}|_p = p^{(m-1)k-\mu} .$$

Donc, si $(n - 1)k - \nu \neq (m - 1)k - \mu$, et $x \neq y$ dans D :

$$\left|\frac{F_{m,n}(x) - F_{m,n}(y)}{x - y}\right|_p = \left|\frac{y^m - x^m}{y - x} - \frac{y^n - x^n}{y - x}\right|_p = p^{\Lambda_{m,n}}$$

où $\Lambda_{m,n} = \sup\{(n - 1)k - \nu , (m - 1)k - \mu\}$. Ceci entraîne :

$$\Lambda_{m,n} \geqslant \sup\{(n - 1)k - \frac{\log n}{\log p} , (m - 1)k - \frac{\log m}{\log p}\} .$$

La condition (1) du théorème 1 est donc vérifiée.

L'ensemble exceptionnel K est constitué d'une part des couples (m , n) tels que $m = n$, d'autre part des couples (m , n) tels que

$$nk - \nu = mk - \mu$$

c'est-à-dire $k(n - m) = \nu - \mu$.

Supposons $n > m$, et $|\nu - \mu|_p = p^{-r}$. On a :

$$\nu - \mu = k\ell p^r \qquad (\text{où } |\ell|_p = 1)$$

$$n - m = \ell p^r .$$

On en déduit successivement : $\nu > r$, $\mu \geqslant r$, puis $\mu = r$. A une valeur de $\nu - \mu$ correspond donc une seule valeur de μ et une seule valeur de ν . Or ν étant fixé, il existe $\sigma(\nu)$ entiers n' , tels que $n = n'p^{\nu} \leqslant N$ et $|n'|_p = 1$, et l'on a :

$$\sigma(\nu) \leqslant [\frac{N}{p^{\nu}}] .$$

$\nu - \mu$ et n étant fixés, le seul choix possible pour m est : $n - \ell p^r$. Le nombre de couples (m , n) $(m < n)$ tels que $k(n - m) = \nu - \mu$, est donc majoré par

$$\sum_{\nu=1}^{[\frac{\log N}{\log p}]} \sigma(\nu) \leqslant \sum_{\nu=1}^{+\infty} [\frac{N}{p^{\nu}}] < \frac{N}{p - 1} .$$

Par suite

$$K_N < N + 2 \frac{N}{p - 1}$$

$$K_N = O(N) .$$

La condition (2) du théorème 1 est donc vérifiée.

3. Equirépartition d'une suite d'applications de $V_E(Q)$ dans $(R/Z)^{c(E)}$.

3.1. - Dans le § 3, on étudiera l'équirépartition dans $(R/Z)^r$ (r entier $\geqslant 1$, dans la suite $r = c(E)$) de suites vectorielles. On rappelle la définition suivante : La suite vectorielle $\{(u_{n,1} , \dots , u_{n,r})\}$ $(n = 1 , 2 , \dots)$ $(u_{n,i} \in R/Z)$ est équirépartie dans $(R/Z)^r$ si, et seulement si, quels que soient les $2r$ réels α_i , β_i avec $0 \leqslant \alpha_i < \beta_i \leqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$,

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{\nu(\alpha_i , \beta_i , N)}{N} = \prod_{i=1}^{r} (\beta_i - \alpha_i) ,$$

où $\nu(\alpha_i , \beta_i , N)$ est le nombre de termes de la suite vectorielle $\{(u_{n,i})\}$ vérifiant

$$n \leqslant N \quad \text{et} \quad u_{n,i} \in [\alpha_i , \beta_i[\mod 1 \qquad (i = 1 , \dots , r) .$$

Une caractérisation des suites vectorielles équiréparties dans $(R/Z)^r$ est donnée par le théorème de Weyl ([3]) : $\{(u_{n,1} , \dots , u_{n,r})\}$ est équirépartie dans $(R/Z)^r$ si, et seulement si, pour tout système $(k_1 , \dots , k_r)$ d'entiers $\neq (0 , \dots , 0)$,

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \exp(2i\pi(k_1 u_{n,1} + \dots + k_r u_{n,r})) = 0 .$$

Remarques.

1° Si la suite vectorielle $\{(u_{n,i})_{i=1,\dots,r}\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ est équirépartie dans $(R/Z)^r$, alors la suite de réels $\{\nu_1 u_{n,1} + \dots + \nu_r u_{n,r}\}$ $(n = 1, 2, \dots)$, où $(\nu_1, \dots, \nu_r)$ est un système d'entiers $\neq (0, \dots, 0)$, est équirépartie dans R/Z (comme on le voit en utilisant le critère de Weyl dans le cas $r = 1$).

2° Le fait que la suite de réels $\{u_{n,i}\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ soit équirépartie dans R/Z, pour tout $i = 1, 2, \dots, r$, n'entraîne pas que la suite vectorielle $\{(u_{n,i})_{i=1,\dots,r}\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ soit équirépartie dans $(R/Z)^r$.

3.2. - On se propose de démontrer les résultats suivants :

THÉORÈME 2. - Soient D un compact de $V_E(Q)$ défini par :

$$D = \{x \in V_E(Q) : x_p \in D_p , \quad p \in E\}$$

où D_p est un disque de Q_p si $p \neq 0$, et, dans le cas où $(0) \in E$, D_0 un segment $[a, b]$ de R.

Soit, pour tout $p \in E$, une suite $\{f_{n,p}\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ d'applications continues de D_p dans Q_p vérifiant les conditions du théorème 1 (ou 1 bis) si $p \neq (0)$ (l'ensemble K sera noté K_p et K_N noté $K_{N,p}$), et les conditions du théorème de Koksma si $p = (0)$;

Alors la suite vectorielle $\{(H_p(f_{n,p}(x_p))_{p\in E}\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ est équirépartie dans $(R/Z)^{c(E)}$ pour presque tout x de D.

COROLLAIRES du théorème 2.

(1) La suite vectorielle $\{(H_p(x_p \theta_p^n))_{p\in E}\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ (où $\theta_p \in Q_p$, $|\theta_p|_p > 1$ pour tout $p \in E$) est équirépartie dans $(R/Z)^{c(E)}$ pour presque tout x de $V_E(Q)$.

(2) La suite vectorielle $\{(H_p(\lambda_p x_p^n))_{p\in E}\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ (où $\lambda_p \in Q_p$, $\lambda_p \neq 0$, pour tout $p \in E$) est équirépartie dans $(R/Z)^{c(E)}$ pour presque tout x de $V_E(Q)$ tel que :

$$\inf_{p\in E} |x_p|_p > 1 .$$

Remarques.

1° Si θ est un élément de $S_E^{(0)}$, et si x est un élément algébrique α de l'anneau $Q_E[\theta]$ (cf. [2]) tel que α soit racine d'un polynôme

$$A(x) \equiv \left(\prod_{p\in E^-} p^{n_p}\right) x^s + a_{s-1}\, x^{s-1} + \dots + a_0 \qquad (n_p\ ,\ a_i \in Z)\ ,$$

dont les racines différentes de α_p dans Ω_p aient une valeur absolue p-adique $\leqslant 1$ si $p \in E^-$, alors

$$\varepsilon_0(\alpha\theta^n) \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty\ .$$

Par définition

$$\varepsilon_0(\alpha\theta^n) = H_0(\alpha_0\ \theta_0^n) - \sum_{p\in E^-} H_p(\alpha_p\ \theta_p^n) \quad (\text{mod } 1)\ .$$

La suite vectorielle $\{(H_p(\alpha\theta^n))_{p\in E}\}$ $(n = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots)$ n'est donc pas équirépartie dans $(R/Z)^{c(E)}$ (remarque 1 du § 3.1).

2° Si x est un élément de $S_E^{(0)}$,

$$\varepsilon_0(x^n) \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty\ .$$

Il en résulte que la suite vectorielle $\{(H_p(x_p^n))_{p\in E}\}$ n'est pas équirépartie dans $(R/Z)^{c(E)}$.

3.3 Démonstration du théorème 2. - On utilise les sommes de Weyl relatives à la suite vectorielle $\{(H_p(f_{n,p}(x_p))_{p\in E}\}$

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \exp(2i\pi \sum_{p\in E} k_p\ H_p(f_{n,p}(x_p))) \quad (k_p \in Z \ \text{ et } \ (k_p)_{p\in E} \neq (0\ ,\ \dots\ ,\ 0))\ .$$

D'où, en notant $F_{m,n,p} = f_{m,p} - f_{n,p}$:

$$|\sigma_N(x)|^2 = \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2}\sum_{1\leqslant m<n\leqslant N} \cos(2\pi \sum_{p\in E} k_p\ H_p(F_{m,n,p}(x_p)))\ .$$

On pose :

$$I_N = \int_D |\sigma_N(x)|^2\, dx\ .$$

D'où

$$I_N = \frac{\text{mes } D}{N} + \frac{2}{N^2}\sum_{1\leqslant m<n\leqslant N} i_{m,n}$$

avec

$$i_{m,n} = \int_D \cos(2\pi \sum_{p\in E} k_p\ H_p(F_{m,n,p}(x_p)))\, dx = \int_D \cos(2\pi \sum_{p\in E} H_p(k_p\ F_{m,n,p}(x_p)))\, dx\ .$$

Pour tout couple $m\ ,\ n$:

$$i_{m,n} \leqslant \text{mes } D$$

on notera

$$\mathfrak{I}_{m,n} = \int_D \exp(2i\pi \sum_{p\in E} H_p(k_p\ F_{m,n,p}(x_p)))\, dx\ .$$

On a (§ 1.2)

$$\mathfrak{I}_{m,n} = \prod_{p\in E} \int_{D_p} \exp(2i\pi H_p(k_p F_{m,n,p}(x_p)))\, dx_p \ .$$

Comme $(k_p)_{p\in E} \neq (0 , \dots , 0)$, il existe un indice p de E tel que $k_p \neq 0$.

<u>1er cas $p \neq 0$</u> . - Si $(m , n) \notin K_p$:

$$\int_{D_p} \exp(2i\pi H_p(k_p F_{m,n,p}(x_p)))\, dx_p = 0$$

sauf au plus pour $\nu(\chi_p)^2$ couples (m , n) (cf. § 2.2). Pour les mêmes couples (m , n) on a : $\mathfrak{I}_{m,n} = 0$, et donc $i_{m,n} = 0$. Il en résulte :

$$I_N \leqslant \text{mes } D\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} (\nu_p(\chi_p)^2 + K_{N,p})\right) .$$

D'où

$$I_N = O\left(\frac{1}{N^2} K_{N,p}\right) .$$

La démonstration s'achève comme celle du théorème 1 bis, puisqu'on peut appliquer le lemme 2 au groupe $G = V_E(Q)^+$.

<u>2e cas $p = (0)$</u> . - En utilisant, comme dans la démonstration du théorème de Koksma le 2e théorème de la moyenne, on trouve :

$$\left|\int_{D_0} \cos(2\pi k_0 F_{m,n,0}(x_0))\, dx_0\right| \leqslant \frac{1}{\pi |k_0|} \max \left\{\frac{1}{F'_{m,n,0}(a)} , \frac{1}{F'_{m,n,0}(b)}\right\} .$$

De même

$$\left|\int_{D_0} \sin(2\pi k_0 F_{m,n,0}(x_0))\, dx_0\right| \leqslant \frac{1}{\pi |k_0|} \max \left\{\frac{1}{F'_{m,n,0}(a)} , \frac{1}{F'_{m,n,0}(b)}\right\} .$$

D'où

$$\left|\int_{D_0} \exp(2i\pi k_0 F_{m,n,0}(x_0))\, dx_0\right| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\pi |k_0|} \max \left\{\frac{1}{F'_{m,n,0}(a)} , \frac{1}{F'_{m,n,0}(b)}\right\}$$

et

$$|i_{m,n}| \leqslant |\mathfrak{I}_{m,n}| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\pi |k_0|} \left(\prod_{p\in E^-} \text{mes } D_p\right) \max \left\{\frac{1}{F'_{m,n,0}(a)} , \frac{1}{F'_{m,n,0}(b)}\right\} .$$

Il en résulte, comme dans la démonstration de Koksma :

$$I_N \leqslant \frac{\text{mes } D}{N} + \frac{\sqrt{2}}{\pi |k|} \left(\prod_{p\in E^-} \text{mes } D_p\right) A_N$$

où $A_N \leqslant \frac{2}{N} (1 + \log N)$.

Soit $N_k = k^2$ $(k = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots)$. La série de terme général I_{N_k} converge. Il suffit alors d'appliquer le lemme 2 au groupe $G = V_E(Q)$: il en résulte

$$|\sigma_{N_k}(x)| \to 0 \quad \text{quand} \quad k \to \infty \quad \text{pour presque tout} \quad x \quad \text{de} \quad D .$$

La démonstration s'achève comme dans les cas déjà traités.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERTRANDIAS (Françoise). - Caractérisation des ensembles S_q par la répartition modulo 1 en p-adique, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, t. 17, 1963/64, n° 11, 20 p.

[2] BERTRANDIAS (Françoise). - Eléments algébriques de l'algèbre $V_E(Q)$, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 5, 1963/64, n° 19, 15 p.

[3] CIGLER (J.) und HELMBERG (G.). - Neuere Entwicklungen in der Theorie der Gleichverteilung, Jahr. Deutsch. Math. Vereinig., t. 64, 1962, p. 1-50.

[4] HEWITT (E.) and ROSS (K. A.). - Abstract harmonic analysis. - Berlin, Springer-Verlag, 1963 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 115).

[5] KOKSMA (J. F.). - Ein mengentheoretischer Satz über die Gleichverteilung modulo Eins, Compositio Mathematica, t. 2, 1935, p. 250-258.