

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

EMIL GROSSWALD

## Sur la fonction de Riesz

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 6, n° 1 (1964-1965),  
exp. n° 2, p. 1-11

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1964-1965\\_\\_6\\_1\\_A1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1964-1965__6_1_A1_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LA FONCTION DE RIESZ

par Emil GROSSWALD

1. Les résultats de Marcel RIESZ.

En 1916, M. RIESZ (voir [8]) a trouvé de nouvelles conditions nécessaires et suffisantes pour la validité de l'hypothèse de Riemann (H R). Dans ce but, il a défini et étudié l'intégrale

$$(1.1) \quad -\frac{1}{2i} \int_{(\sigma)} \frac{z^s ds}{\zeta(2s) \Gamma(s) \sin \pi s}$$

prise le long de la parallèle à l'axe imaginaire d'abscisse  $\sigma$ .

Si  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$  ( $\delta > 0$ , arbitrairement petit), alors l'intégrale converge uniformément dans la bande  $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$ , et  $y$  représente une fonction  $F(z)$ , holomorphe au moins pour  $\operatorname{Re} z > 0$ .

En prenant  $\sigma = \frac{1}{2}$ , le lemme de Riemann-Lebesgue montre que  $F(x) = o(x^{1/2})$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$  le long de l'axe réel. D'autre part, en déplaçant la ligne d'intégration à droite, le théorème des résidus donne

$$(1.2) \quad F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{\zeta(2n) \Gamma(n)},$$

ce qui montre que  $F(z)$  est une fonction entière. En remplaçant dans (1.2)  $\frac{1}{\zeta(2n)}$  par sa série de Dirichlet, et en changeant l'ordre des sommations, on obtient

$$(1.3) \quad F(x) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^2} x \exp(-x/m^2).$$

Soit  $\Sigma = \{\sigma \mid \zeta(\sigma + it) = 0\}$  et  $\theta = \overline{\lim}_{\sigma \in \Sigma} \sigma$ ; alors le théorème de Littlewood [6] nous permet de déplacer l'abscisse d'intégration jusqu'à  $\sigma = \frac{\theta}{2} + \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ , arbitrairement petit). On en déduit que  $F(x) = O(x^{\frac{\theta}{2} + \varepsilon})$ . Donc si

$$\alpha = \underline{\lim} \{\beta \mid F = O(x^\beta)\}$$

alors  $\alpha \leq \theta/2$ . De (1.3) on obtient aussi facilement que

$$\sum_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{x}{n^2}\right) = -x \exp(-x).$$

Pour obtenir une proposition réciproque, considérons l'intégrale

$$\int_0^{\infty} F(x) x^{-s-3/2} dx .$$

De  $F(x) = O(x)$  ( $x \rightarrow 0$ ) et  $F(x) = o(x^{1/2})$  ( $x \rightarrow +\infty$ ), il résulte que l'intégrale converge uniformément pour  $(0 <) \varepsilon \leq \sigma \leq \frac{1}{2} - \varepsilon$  ( $< \frac{1}{2}$ ), et représente une fonction  $\varphi(s)$ , holomorphe pour  $0 < \sigma < \frac{1}{2}$ . Si  $F(x) = O(x^\alpha)$ , alors l'intégrale converge (et  $\varphi(s)$  est holomorphe) pour  $\sigma > \alpha - \frac{1}{2}$ . Mais du théorème de Mellin (ou comme le montre RIESZ aussi directement), il résulte que

$$\varphi(s) = -\frac{\Gamma(\frac{1}{2} - s)}{\zeta(2s + 1)} .$$

Donc, si  $\varphi(s)$  reste holomorphe pour  $\sigma > \alpha - \frac{1}{2}$ , alors

$$\zeta(s_1) = \zeta(2s + 1) \neq 0 ,$$

pourvu que  $\sigma_1 = 2\sigma + 1 > 2(\alpha - \frac{1}{2}) + 1 = 2\alpha$ . Il en résulte que  $\theta \leq 2\alpha$  et on a le théorème suivant.

$$\text{THÉORÈME. - } F(x) = O(x^{\frac{\theta}{2} + \varepsilon}) , \quad F(x) = \Omega(x^{\frac{\theta}{2} - \varepsilon}) .$$

A cause de ce théorème, nous dirons brièvement que  $F(x)$  est d'ordre exact  $\theta/2$ .

COROLLAIRES.

$$(i) \quad F(x) = O(x^{\frac{1}{4} + \varepsilon}) \iff \text{H R} .$$

$$(ii) \quad F(x) = \Omega(x^{\frac{1}{4} - \varepsilon}) .$$

(i) n'est que le cas particulier  $\theta = \frac{1}{2}$  du théorème ; pour prouver (ii) on observe que si  $F(x) = o(x^{\frac{1}{4} - \varepsilon})$ , alors  $\theta < \frac{1}{2}$ , et la fonction  $\zeta(s)$  n'aurait pas des racines complexes, ce qui est faux.

M. RIESZ a déterminé aussi la forme de la représentation de  $F(z)$  comme produit infini de Weierstrass. De (1.2), il résulte que  $F(z)$  est d'ordre 1, type 1 ; ainsi le produit canonique est de genre zéro ou de genre 1. RIESZ montre que si  $\{z_n\}$  est la suite des zéros de  $F(z)$ , alors  $\sum \frac{1}{|z_n|}$  diverge, par conséquent

$$F(z) = Az \exp \alpha z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{z_n}) \exp z/z_n .$$

En posant  $f(z) = F(z)/z$ ,

$$A = \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = -\frac{1}{\zeta(2)}$$

et

$$\left\{ \frac{1}{\zeta(4)} / \left( -\frac{1}{\zeta(2)} \right) \right\} = \frac{f'(0)}{f(0)} = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z_n} - \frac{1}{z_n - z} \right) \right\} = \alpha ;$$

par conséquent,

$$(1.4) \quad F(z) = -\frac{z}{\zeta(2)} \exp(-\pi^2/15) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp z/z_n .$$

Enfin, observons encore avec RIESZ que  $F(z)$  a au moins une racine réelle, évidemment positive, car autrement, si  $x \rightarrow +\infty$  par valeurs réelles, on obtiendrait

$$x \exp(-x) = \left| \sum_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{x}{2^n}\right) \right| \geq |F(x)| \quad \text{avec} \quad F(x) = \Omega(x^{\frac{1}{4}-\varepsilon}),$$

ce qui est absurde.

## 2. Les zéros de $F(z)$ .

Avec tant de représentations explicites de  $F(z)$ , on pourrait espérer que la décision concernant son accroissement le long de l'axe réel se réduise à une question de calcul patient ; il n'en est rien, et apparemment jusqu'à présent, la fonction  $F(z)$  n'a fourni aucune information sur la fonction  $\zeta(s)$ . En vue du fait que l'accroissement des fonctions entières est étroitement lié à la distribution de leurs zéros, on a essayé de déterminer celle-ci le plus exactement possible. Ainsi, par exemple, si l'on savait qu'il y a une infinité de zéros réels, assez près les uns des autres, alors on pourrait utiliser des bornes connues de  $|F'(z)|$ , pour obtenir des bornes non triviales pour l'accroissement de  $|F(z)|$  même. Mais jusqu'en 1963, aucun zéro réel n'avait été trouvé, à part celui déjà connu par RIESZ (de valeur  $\simeq 1,2$ ), bien que l'on ait calculé les valeurs de  $F(z)$  pour  $0 \leq x \leq 50\,000$  au moins. Un progrès important a été fait par H. WILF, lequel a prouvé (voir [10]) le théorème suivant.

THÉORÈME (H. WILF). - Soient  $z_n = r_n \exp i\theta_n$ ,  $0 < r_1 \leq r_2 \leq \dots$  les zéros de  $f(z)$  et  $0 < x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$  ses zéros réels ; alors

$$(2.1) \quad n(r) = \sum_{r_n \leq r} 1 \sim r/n \quad \text{et} \quad r_n \sim n\pi ;$$

$$(2.2) \quad \text{La somme} \quad \sum |\cos \theta_n| r_n^{-1} \quad \text{converge ;}$$

$$(2.3) \quad \sum_{x_n < x} 1 = \Omega(\log x), \quad \text{mais la somme} \quad \sum x_n^{-1} \quad \text{converge ;}$$

$$(2.4) \quad \sum_{r_n \leq r, \theta_n \leq \pi/2} 1 = o(r) ;$$

$$(2.5) \quad \text{L'ensemble} \quad \{r_n \cos \theta_n\} \quad \text{n'est pas borné.}$$

Esquisse de démonstration. -  $f(z)$  est borné sur l'axe imaginaire, car

$$\left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^2} \exp(-it/m^2) \right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\mu(m)|}{m^2} = \zeta(2)/\zeta(4) ;$$

donc, étant d'ordre 1, type moyen, les conditions du théorème de Cartwright ([3], p. 87-88) sont satisfaites, et on conclut :

(i) il y a deux constantes réelles,  $A_1, A_2$ ,  $-\infty < A_1 \leq A_2 < +\infty$ , telles que l'indicatrice de Phragmén-Lindelöf soit

$$h(\theta) = \max\{A_1 \cos \theta, A_2 \cos \theta\} ;$$

(ii)  $n(r) \sim (A_1 - A_2) \frac{r}{n}$  ;

(iii)  $\sum |\cos \theta_n| r_n^{-1}$  converge.

La conclusion (iii) est identique au (2.2) du théorème, et (2.4), ainsi que la seconde affirmation de (2.3) se déduisent de (2.2) comme simples corollaires. D'autre part,  $h(\theta)$  se calcule directement, à l'aide de la transformée de Borel  $\varphi(z)$  de  $f(z)$ . En effet,

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{\zeta(2n+2)z^{n+1}} = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{1+zm^2} ;$$

donc, le polygone de Borel (et, en vertu du théorème de Pólya, le diagramme de l'indicatrice aussi) se réduit au segment  $[-1, 0]$ , de sorte que

$$h(\theta) = \max(0, -\cos \theta) .$$

Par conséquent,  $A_1 = -1$ ,  $A_2 = 0$ , et le (ii) du théorème de Cartwright devient le (2.1) du théorème de Wilf. (2.5) est la conséquence d'un théorème de Bohr (voir, e. g. [1], p. 162) sur les fonctions presque périodiques (la représentation (1.3) montre que  $f(z)$  n'a que des exposants  $\lambda_n$  négatifs,  $\overline{\lim} \lambda_n = 0$ , mais zéro n'est pas un exposant, donc il y a des zéros dans tout demi-plan  $\sigma > \sigma_0$ ). Enfin, la première affirmation de (2.3) résulte d'un théorème de Pólya (voir [7]), en observant que

$$\int_1^{\infty} F(x) x^{-s} dx = - \int_0^1 F(x) x^{-s} dx - \Gamma(2-s)/\zeta(2s-2) = \Phi(s)$$

est holomorphe pour  $\sigma > 1 + \frac{\theta}{2}$ , méromorphe, sans être holomorphe, pour  $1 + \frac{\theta}{2} - \varepsilon < \sigma < 1 + \frac{\theta}{2}$  ( $\varepsilon > 0$ ), et  $\Phi(s)$  est holomorphe pour  $s = 1 + \frac{\theta}{2}$ .

Aux résultats de WILF, on peut ajouter le suivant.

THÉORÈME. - Soit  $\sigma_0$  la racine réelle (unique) de l'équation

$$\sum_{m=2}^{\infty} m^{-2} \exp \sigma_0(1 - m^{-2}) = 1 ;$$

alors il n'y a pas de racine  $z_n$  avec  $\operatorname{Re} z_n < \sigma$ .

En effet,

$$|f(z)| \geq \exp(-\sigma) - \left| \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^2} \exp(-\sigma/m^2) \right| \geq \exp(-\sigma) \left\{ 1 - \sum_{m=2}^{\infty} m^{-2} \exp \sigma(1 - m^2) \right\}$$

et la dernière somme croît monotoniquement avec  $\sigma$  de 0 à  $+\infty$ .

L'étude des racines de  $F(x)$  peut être complétée par la détermination des sommes

$$S_k = \sum_n z_n^{-k-1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Pour  $k > 0$ , ces séries convergent absolument, et s'obtiennent facilement en observant que d'une part

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n-2}}{\zeta(2n)(n-2)!} / \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n-1}}{\zeta(2n)(n-1)!},$$

de sorte que les  $A_k = \frac{1}{k!} \left\{ \frac{d^k}{dz^k} \left( \frac{f'}{f} \right) \right\}_{z=0}$  s'expriment à l'aide des  $\zeta(2n)$ ; d'autre part,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{15}{\pi^2} + \sum_n \left( \frac{1}{z_n} - \frac{1}{z_n - z} \right) \quad \text{et} \quad \frac{d^k}{dz^k} \left( \frac{f'}{f} \right) = -k! \sum_n (z_n - z)^{-k-1},$$

de sorte que  $A_k = -S_k$ . Pour  $k = 0$ , la série ne converge pas absolument, mais des théorèmes de Y. B. LEWIN et PFLUGER (voir par exemple [2], § 8.4, en particulier p. 147) nous permettent de calculer

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{|z_n| < r} z_n^{-1} = -\frac{1}{2} + \frac{15}{\pi^2}.$$

Les valeurs des  $S_{k+1}$  montrent que la contribution principale est due à la première racine réelle ( $x_1 \simeq 1, 2$ ).

### 3. Généralisations (voir [4]).

Soit  $\Phi = \{\varphi(s)\}$  l'ensemble des fonctions analytiques pour  $\sigma > \frac{1}{4}$  et telles que l'intégrale

$$-\frac{1}{2i} \int_{(\sigma)} \frac{z^s ds}{\zeta(2s) \varphi(s) \sin \pi s}$$

converge pour  $\frac{1}{2} < \sigma < 1$  et  $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$  et que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{\zeta(2n) \varphi(n)}$$

converge pour tout  $z$  complexe.

Alors le théorème des résidus montre que les deux représentent une même fonction

entière,  $F_\varphi(z)$ . On montre, comme dans le cas particulier précédent,  $\varphi(s) = \Gamma(s)$ , que pour  $\theta < 1$ ,

$$F(x) = O(x^{\frac{\theta+\varepsilon}{2}}) \text{ et } F(x) = o(x^{1/2}) \text{ si } \theta = 1.$$

$E_\varphi(-y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-y)^n}{\varphi(n)}$  est une fonction entière. Soit  $\Phi_1 \subset \Phi$  le sous-ensemble de ces fonctions  $\varphi(s)$ , telles que  $\int_0^\infty y^{-s-3/2} E(-y) dy$  converge en quelque bande  $\frac{1}{2} - \eta < \sigma < \frac{1}{2}$  ( $\eta > 0$ ), et y représente une fonction holomorphe  $H(\frac{1}{2} - s)$ , sans zéros pour  $-\frac{1}{4} < \sigma < 0$ . Alors, par l'inversion de l'intégrale,

$$G_\varphi(s) = \int_0^\infty F_\varphi(x) x^{-s-3/2} dx = \frac{H(\frac{1}{2} - s)}{\zeta(2s + 1)}.$$

Ceci montre que  $F_\varphi(x) = O(x^\alpha)$  implique l'holomorphie de  $G_\varphi(s)$  pour  $\sigma > \alpha - \frac{1}{2}$ , d'où il résulte que

$$\zeta(s_1) = \zeta(2s + 1) \neq 0 \text{ pour } \sigma_1 = 2\sigma + 1 > 2\alpha,$$

donc, comme pour  $\varphi(s) = \Gamma(s)$ , que  $F(x)$  est d'ordre exact  $\frac{\theta}{2}$ . En prenant, par exemple, pour  $\varphi(s)$  les fonctions de la première colonne, on obtient les fonctions  $F_\varphi(x)$  du tableau suivant :

$\varphi(s)$	$F_\varphi(x)$
$\Gamma(s)$	$\sum_1^\infty \frac{\mu(n)}{n^2} x \exp(-x/n^2)$ ( $\mu(n)$ = fonction de Möbius)
$\frac{\Gamma(s)}{\zeta(4s)}$	$\sum_1^\infty \frac{\lambda(n)}{n^2} x \exp(-x/n^2)$ ( $\lambda(n)$ = fonction de Liouville)
$\frac{\Gamma(s)}{\zeta'(2s) + \zeta(2s)/(2s-1)}$	$\sum_2^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^2} x \exp(-x/n^2) - \frac{1}{2} \sqrt{\pi x}$ ( $\Lambda(n)$ = fonction de von Mangoldt)
$\frac{\Gamma(s)}{(2s-1)\zeta'(2s)}$	$\sum_2^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^4} x \exp(-x/n^2) - \frac{1}{4} \sqrt{\pi x}$
$\frac{\Gamma(s)}{(s-1)\zeta(s)}$	$\sum_1^\infty \frac{ \mu(n) }{n^2} x^2 \exp(-x/n^2) - x/\zeta(2)$
$\frac{\Gamma(s)}{\zeta(s)}$	$\sum_1^\infty \frac{ \mu(n) }{n} x(1 - \exp(-x/n)) - \frac{x}{\zeta(2)} (\log x + 2\gamma - 2 \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)})$

Toutes les  $F_\varphi(x)$  du tableau sont d'ordre exact  $\frac{\theta}{2}$ , à l'exception, peut-être, de la quatrième, laquelle est toujours  $O(x^{\frac{\theta}{2}+\epsilon})$ , mais peut-être même  $O(x^{\frac{\theta}{2}})$ .

#### 4. Relations intégrales (voir [4]).

Pour un  $\varphi \in \Phi_1$  donné, soit

$$S(s) = S_\varphi(s) = \sum_{m \geq s/2} \frac{(-1)^m}{\zeta(2m) \varphi(m)} ;$$

alors, pour  $0 < r < 2$ ,

$$\begin{aligned} \int_r^\infty x^s \log x S(s) ds &= \int_r^\infty x^s \log x \left\{ \sum_{m \geq s/2} \frac{(-1)^m}{\zeta(2m) \varphi(m)} \right\} ds \\ &= \sum_{m=1}^\infty \frac{(-1)^m}{\zeta(2m) \varphi(m)} \int_r^{2m} x^s \log x ds = \sum_{m=1}^\infty \frac{(-1)^m}{\zeta(2m) \varphi(m)} (x^{2m} - x^r) = F(x^2) - x^r S(1) , \end{aligned}$$

donc

$$\int_Y^\infty x^{s-r} \log x S(s) ds = -S(1) + x^{-r} F(x^2) .$$

Pour  $r = 1$ , compte tenu de  $F(x^2) = o(x)$ , on obtient

$$(4.1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^\infty x^{s-1} \log x S(s) ds = -S(1) .$$

Plus généralement, si  $\theta < 1$  et  $\theta < r < 2$ ,

$$(4.2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \int_r^\infty x^{s-r} \log x S(s) ds = -S(1) ,$$

et cette relation est fautive pour  $r < \theta$ ; donc, si  $R = \{r \mid (4.2) \text{ est correcte}\}$ , alors

$$\theta = \lim_{r \in R} r .$$

En faisant le changement de variable

$$v = \log s^{-1} , \quad u = \log \log x , \quad S(e^{-v}) = V(v)$$

et moyennant la définition

$$K_u(w) = \begin{cases} \exp e^w & \text{si } w > u \\ 0 & \text{si } w < u , \end{cases}$$

(4.1) et (4.2) deviennent

$$(4.1') \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \exp(-e^u) \int_{-\infty}^\infty K_u(v) V(u-v) dv = -V(0)$$

et

$$(4.2') \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \exp(-e^{u+\rho}) \int_{-\infty}^{\infty} K_{u+\rho}(v) V(u-v) dv = -V(0),$$

respectivement ; (4.1') est toujours valable, (4.2') l'est si et seulement si

$$\log \theta < \rho \quad (< 0).$$

L'intérêt de ces généralisations (§ 3, 4 et 5) réside dans la possibilité de trouver peut-être une fonction  $\varphi(s) \in \Phi_1$  telle qu'il soit possible : soit de calculer avec une précision suffisante une des sommes figurant dans le tableau (T) ; soit de vérifier le domaine de validité de (4.2), ou de (4.2') , etc. Ceci nous permettrait alors d'obtenir des bornes non-triviales pour  $\theta$  .

### 5. Un théorème curieux.

Soit  $\varphi \in \Phi$  ,  $m \in \mathbb{Z}^+$  . Posons

$$\Psi(z) = \Psi_{\varphi, m}(z) = z^{1-2m} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{z^{nm}}{\zeta(\frac{n}{2}) \varphi(\frac{n}{2})} .$$

Notons par  $M(r)$  le  $\max_{|z|=r} \Psi(z)$  et définissons l'ensemble de fonctions

$$\Omega_m = \{ \Psi_{\varphi, m}(z) \mid \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{r^{1/2}} = 0 \} .$$

**THÉORÈME.** - Si, pour  $m \in \mathbb{Z}^+$  donné,  $\Omega_m$  n'est pas vide, alors  $\theta \geq 1 - \frac{1}{m}$  .

Esquisse de démonstration. - En faisant  $z \rightarrow \infty$  le long du rayon  $z = x \exp \pi i/2m$  ( $x > 0$ ) ,

$$\Psi_{\varphi, m}(z) = -x^{1-2m} \exp \pi i/2m \{ F_1(x^{2m}) + iF_2(x^{2m}) \} ,$$

avec

$$F_j(y) = -\frac{1}{2i} \int_{(\sigma)} \frac{y^s ds}{\zeta(s) \varphi(s) \sin(\pi(s + \frac{j-1}{2}))} \quad \text{pour } |\arg y| < \frac{\pi}{2}, \quad \theta < \sigma < 1 .$$

Donc,  $F_j(y) = o(y^{\theta+\varepsilon/2m})$  ,

$$\Psi_{\varphi, m}(z) = o(x^{1-2m+2m(\theta+\frac{\varepsilon}{2m})}) = o(x^{1-2m(1-\theta)+\varepsilon}) .$$

Si  $m > \frac{1+\varepsilon}{2(1-\theta)}$  , alors  $\Psi_{\varphi, m}(z) = o(x^{-\eta})$  ( $\eta > 0$ ) , ce qui contredit le théorème de Wiman généralisé ([9], p. 275)

Remarque. - Il est bien possible que  $\Omega_m$  soit vide pour tout  $m \in \mathbb{Z}^+$  .

### 6. Formule explicite.

Si dans

$$f(x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} \exp(-x^2/n^2) ,$$

on remplace l'exponentielle par

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma)} \Gamma(s) \left(\frac{x}{n}\right)^{-2s} ds \quad (0 < \sigma < \frac{1}{2}),$$

si on interchange l'ordre des opérations  $\int_{(\sigma)} \dots ds$  et  $\sum_n$  (ce qui est permis pour  $\sigma \leq \frac{1}{2} - \varepsilon$ ) et si on déplace ensuite la ligne d'intégration à  $\sigma = 1 + \varepsilon$  en tenant compte des résidus, on obtient successivement :

$$f(x^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma)} x^{-2s} \frac{\Gamma(s)}{\zeta(2-2s)} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{(1+\varepsilon)} x^{-2s} \frac{\Gamma(s)}{\zeta(2-2s)} ds + \sum_n \frac{\Gamma(1-\rho_n/2) x^{\rho_n-2}}{2\zeta_1(\rho_n)};$$

ici  $\frac{1}{\zeta_1(\rho_n)} = \text{Res}\left(\frac{1}{\zeta(s)}\right)_{s=\rho_n}$  et la somme prise sur toutes les racines complexes  $\rho_n$  de  $\zeta(s)$  (bien que probablement pas absolument convergente) converge à un groupement convenable des termes. A l'aide de l'équation fonctionnelle de la fonction  $\zeta(s)$  et ensuite de la formule de Legendre pour  $\Gamma(s)$ , l'intégrale devient

$$\frac{\pi^{-1/2}}{2\pi i} \int_{(\sigma)} \frac{y^{2s} ds}{\zeta(2s-1) \Gamma(s-1/2) \sin \pi s} \quad \text{avec } y = \pi/x \text{ et } \sigma = 1 + \varepsilon.$$

Pour ce  $\sigma$ , la série de Dirichlet  $\frac{1}{\zeta(2s-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{2s-1}$  converge absolument, et l'intégrale peut s'écrire

$$I = \pi^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\mu(n)} \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma)} \frac{(y/n)^{2s} ds}{\Gamma(s-\frac{1}{2}) \sin \pi s}.$$

A l'aide du théorème des résidus

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma)} \frac{z^s ds}{\Gamma(s-\frac{1}{2}) \sin \pi s} = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{\Gamma(n-\frac{1}{2})} = +\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} = -\frac{2z^2}{\pi^{3/2}} \varphi(\sqrt{2z}),$$

avec  $\varphi(v) = 1 - \frac{v^2}{1.3} + \frac{v^4}{1.3.5} - \dots = \frac{\exp(-v^2/2)}{v} \int_0^v \exp t^2/2 dt$ . Par conséquent,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma)} \frac{(y/n)^{2s} ds}{\Gamma(s-\frac{1}{2}) \sin \pi s} = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{y}{n}\right)^3 \exp(-y^2/n^2) \int_0^{\sqrt{2} \frac{y}{n}} \exp t^2/2 dt$$

et, en observant que, pour  $y \rightarrow 0$ ,

$$\int_0^{\sqrt{2} \frac{y}{n}} \exp t^2/2 dt = \sqrt{2} \frac{y}{n} + O\left(\frac{y^3}{n^3}\right),$$

on obtient

$$\begin{aligned}
I &= -\pi^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} n\mu(n) \cdot 2^{1/2} \pi^{-3/2} \frac{y^3}{n^3} \cdot 2^{1/2} \frac{y}{n} (1 + o(\frac{y^2}{n^2})) = \\
&= -\frac{2}{\pi^2} y^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^3} (1 + o(\frac{y^2}{n^2})) = -\frac{2y^4}{\pi^2 \zeta(3)} + o(y^6) .
\end{aligned}$$

Donc,

$$f(x^2) = \sum_n \frac{\Gamma(1-\rho_n/2)}{2\zeta_1(\rho_n)} x^{\rho_n-2} - \frac{2}{\pi^2 \zeta(3)} y^4 + o(y^6) = \sum_n \frac{\Gamma(1-\rho_n/2)}{2\zeta_1(\rho_n)} x^{\rho_n-2} - \frac{2\pi^2}{\zeta(3)} x^{-4} + o(x^{-6}) ,$$

de sorte que

$$F(x) = x f(x) = \sum_n \frac{\Gamma(1-\rho_n/2)}{2\zeta_1(\rho_n)} x^{\rho_n/2} - \frac{2\pi^2}{\zeta(3)} x^{-1} + o(x^{-2}) .$$

Cette formule explicite est à rapprocher par exemple de (2.516) en [5] ; on y voit clairement pourquoi  $F(x)$  est d'ordre exact  $\theta/2$  .

### 7. Considérations p-adiques.

Si l'on remplace en (1.2),  $\zeta(2n)$  par sa valeur  $(-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n} B_{2n}}{2(2n)!}$  ( $B_{2n}$  = nombres de Bernoulli) et fait les changements de variables et fonctions  $x = 4\pi^2 y$  et  $G(y) = -\frac{F(4\pi^2 y)}{2y}$ , alors

$$G(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{n!} \frac{y^n}{B_{2n+2}} .$$

On voit facilement à partir de (1.2) que si l'on prend la somme des termes  $n \leq N = [xe] + 1$ , alors la contribution des termes négligés est d'ordre  $O(x^{\frac{1}{4}-\epsilon})$ . Soit donc  $N = [4\pi^2 ey] + 1$ . Considérons les sommes finies

$$G_N(y) = \sum_{n=0}^N \frac{(2n+2)!}{n!} \frac{y^n}{B_{2n+2}} .$$

Ceci étant un nombre rationnel, on peut considérer l'ensemble de ses valeurs absolues, p-adiques et ordinaires.

La formule du produit s'applique et donne

$$\prod_{k=0}^{\infty} |G_N(y)|_{p_k} = 1 ,$$

avec  $|G_N(y)|_{p_0} = |G_N(y)|$ , la valeur absolue ordinaire. Des bornes pour  $|G_N(y)|_p$  pourraient donc, en principe, donner des bornes pour  $|G_N(y)|$ , c'est-à-dire pour  $|G(y)|$ , donc pour  $|F(x)/x|$ . Plus précisément, si pour une suite  $y_\nu$  ( $|y_\nu| \rightarrow \infty$ ,  $|y_\nu|_{p_k} \rightarrow 0$ ), on obtient soit

$$\prod_{k \neq 0} |G(y_\nu)|_{p_k} < y_\nu^{-\alpha},$$

soit

$$\prod_{k \neq 0} |G(y_\nu)|_{p_k} > y_\nu^{-\alpha}$$

avec  $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}$ , on en déduit des estimations non triviales pour  $F(x)$ .

Cette tentative n'a pas eu de succès pour diverses raisons, comme par exemple, que  $N$  n'est pas constant, mais augmente avec  $y$ , et que l'on ne connaît pas assez bien les nombres premiers qui divisent les numérateurs des nombres de Bernoulli.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BESICOVITCH (A. S.). - Almost periodic functions. - New York, Dover Publications, 1954.
- [2] BOAS (R. P.). - Entire functions. - New York, Academic Press Publishers, 1954 (Pure and applied Mathematics, 5).
- [3] CARTWRIGHT (M. L.). - Integral functions. - Cambridge, at the University Press, 1956 (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics, 44).
- [4] GROSSWALD (Emil). - Considerations concerning the complex roots of Riemann's Zeta-function, Publicationes Mathematicae, Debrecen, t. 10, 1963, p. 157-170.
- [5] HARDY (G. H.) and LITTLEWOOD (J. E.). - Contributions to the theory of the Riemann zeta function and the theory of the distribution of primes, Acta Math., t. 41, 1918, p. 119-196.
- [6] LITTLEWOOD (J. E.). - Quelques conséquences de l'hypothèse que la fonction  $\zeta(s)$  de Riemann n'a pas de zéros dans le demi-plan  $R(s) > 1/2$ , C. R. Acad. Sc. Paris, t. 154, 1912, p. 263-266.
- [7] POLYA (G.). - Über das Vorzeichen des Restgliedes im Primzahlsatz, Nachr. von Gesellsch. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1930, p. 19-27.
- [8] RIESZ (Marcel). - Sur l'hypothèse de Riemann, Acta Math., t. 40, 1916, p. 185-190.
- [9] TITCHMARSH (E. C.). - The theory of functions, 2nd edition. - Oxford, Oxford University Press, 1952.
- [10] WILF (H. S.). - On the zeros of Riesz'function in the analytic theory of numbers, Amer. math. Soc., Notices, t. 10, 1963, p. 474.