Mohamed Amara

Fonctions à caractéristique bornée

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 5 (1963-1964), exp. n^{o} 13, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1963-1964__5__A9_0>

FONCTIONS À CARACTÉRISTIQUE BORNÉE

par Mohamed AMARA

A. Caractéristique d'une fonction. Propriétés.

1. Notations et définitions.

Tout le long de cet exposé nous ne considérons que les fonctions méromorphes dans le cercle unité.

Soit $f(z)$ une telle fonction ; écrivons sa formule de Poisson-Jensen due à R. NEVANLINNA :

(1) $\log |f(z)|$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})| \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)} d\varphi + \sum_j \log\left|\frac{R^2-\bar{b}_j z}{R(z-b_j)}\right| - \sum_j \log\left|\frac{R^2-\bar{a}_j z}{R(z-a_j)}\right| ,$$

où $z = re^{i\theta}$ avec $r < R$, et a_j et b_j désignent respectivement les zéros et les pôles de $f(z)$ dans $|z| \leqslant R$.

Cette formule contient à la fois la formule de Poisson qui correspond au cas où $f(z)$ n'a ni pôles ni zéros dans $|z| \leqslant R$, et la formule de Jensen qu'on obtient en faisant $z = 0$. Si ce point est zéro ou pôle de $f(z)$, on évite cette difficulté en remplaçant $f(z)$ par $z^{-k} f(z)$ $(f(z) = u_k z^k + \dots , \ u_k \neq 0)$ et la formule de Jensen devient :

(2) $\log |u_k|$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})| \, d\varphi - \sum_{0<|a_j|\leqslant R} \log \frac{R}{|a_j|} + \sum_{0<|b_j|\leqslant R} \log \frac{R}{|b_j|} - k \log R .$$

A chaque fonction f nous allons associer les fonctions suivantes :

$$u_R(z , f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f(Re^{i\varphi})| \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)} d\varphi$$

$$v_R(z , f) = \sum \log\left|\frac{R^2-b_j\bar{z}}{R(b_j-z)}\right|$$

$$w_R(z , f) = U_R(z , f) + V_R(z , f) .$$

En remarquant que

$$\log|f| = \overset{+}{\log}|f| - \overset{+}{\log}\frac{1}{|f|} ,$$

la formule (1) s'écrit sous la formule :

$$(1') \qquad \log|f(z)| = w_R(z , f) - w_R(z , \frac{1}{f}) ;$$

les fonctions $w_R(z , f)$ sont harmoniques et positives pour $|z| < 1$, à l'exception des pôles b_j de la fonction f (respectivement $w_R(z , \frac{1}{f})$, à l'exception des racines de la fonction f).

De plus, nous définissons, pour toute fonction f , les fonctions suivantes :

$$m(R , \alpha) = m(R , \frac{1}{f-\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\frac{1}{|f(Re^{i\varphi})-\alpha|}\, d\varphi$$

$$N(R , \alpha) = N(R , \frac{1}{f-\alpha}) = \int_0^R \frac{n(t,\alpha)-n(0,\alpha)}{t}\, dt + n(0 , \alpha) \log R ;$$

et, pour $\alpha = \infty$,

$$m(R , \infty) = m(R , f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f(Re^{i\varphi})|\, d\varphi$$

$$N(R , \infty) = N(R , f) = \int_0^R \frac{n(t,\infty)-n(0,\infty)}{t}\, dt + n(0 , \infty) \log R ,$$

où $n(t , \alpha)$ désigne le nombre des racines de l'équation $f(z) = \alpha$ situées dans le cercle $|z| \leqslant t$.

En remarquant que

$$\sum_{0<|a_j|\leqslant R} \log\frac{R}{|a_j|} = \int_0^R \frac{n(t,0)-n(0,0)}{t}\, dt$$

$$\sum_{0<|b_j|\leqslant R} \log\frac{R}{|b_j|} = \int_0^R \frac{n(t,\infty)-n(0,\infty)}{t}\, dt ,$$

la formule de Jensen s'écrit sous la forme

$$m(R , \infty) + N(R , \infty) = m(R , 0) + N(R , 0) + \log|u_k| ,$$

ou, en posant

$$T(R , f) = m(R , \infty) + N(R , \infty)$$

$$T(R , f) = T(R , \frac{1}{f}) + \log|u_k| ,$$

la fonction $T(R , f)$, ainsi introduite, s'appelle fonction caractéristique ou caractéristique de f .

2. Remarques sur les fonctions m et N .

- La fonction N est déterminée par la distribution des modules des racines de l'équation $f(z) = \alpha$. Elle nous sert à mesurer la densité de ces racines, quand on fera tendre $R \to 1$. De plus, c'est une fonction croissante et convexe en $\log R$.

- $m(R , \alpha)$, moyenne du logarithme positif $\overset{+}{\log} \frac{1}{|f-\alpha|}$ ou $\overset{+}{\log}|f|$ sur la circonférence $|z| = R$, peut être regardée comme un indicateur de l'intensité de la convergence moyenne de la fonction $f(z)$ vers la valeur α quand on fait tendre R vers 1 . En général, elle n'est ni croissante, ni convexe en $\log R$, mais nous avons le théorème suivant dû à R. NEVANLINNA :

THÉORÈME 1. - Etant donnée une fonction $f(z)$ méromorphe dans $|z| < 1$, il existe une fonction $T(R , f)$ jouissant des propriétés suivantes :

1° $T(R , f)$ est croissante et convexe en $\log R$.

2° $m(R , \alpha) + N(R , \alpha) = T(R , f) + h(R , \alpha)$, où $h(R , \alpha)$ reste borné pour $R < 1$.

Démonstration.

- Pour le 1°, nous nous contenterons de démontrer que $T(R , f)$ est une fonction croissante de $\log R$; pour une démonstration complète, et pour plus de détails, voir NEVANLINNA.

Reprenons la formule (1'), $\log|f(z)| = w_R(z , f) - w_R(z , \frac{1}{f})$, où $z = re^{i\theta}$, $|z| < R$.

Comme les fonctions w_R sont positives, nous avons :

$$\log|f(re^{i\varphi})| \leqslant w_R(re^{i\varphi} , f)$$

$$\overset{+}{\log}|f(re^{i\varphi})| \leqslant w_R(re^{i\varphi} , f)$$

$$m(r , \infty) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w_R(re^{i\varphi} , f)\, d\varphi$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_R(re^{i\varphi} , f)\, d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_R(re^{i\varphi} , f)\, d\varphi .$$

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_R(re^{i\varphi}, f)\, d\varphi$ est la valeur moyenne de la fonction harmonique u_R sur la circonférence $|z| = r$. Sa valeur est donc égale à $u_R(0, f) = m(R, \infty)$.

Le calcul de $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_R(re^{i\varphi}, f)\, d\varphi$ se fait de la même manière en observant que $v_r(z, f) = 0$ et que la fonction $v_R - v_r$ est harmonique dans $|z| \leqslant r$, d'où :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_R(re^{i\varphi}, f)\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [v_R(re^{i\varphi}, f) - v_r(re^{i\varphi}, f)]\, d\varphi$$

$$= v_R(0, f) - v_r(0, f) = N(R, \infty) - N(r, \infty) ;$$

d'où, à la fin,

$$m(r, \infty) \leqslant m(R, \infty) + N(R, \infty) - N(r, \infty) ,$$

soit

$$T(r, f) \leqslant T(R, f) \qquad \text{pour } r < R ,$$

et notre proposition est ainsi démontrée.

– Pour la 2° partie du théorème, posons $g(z) = f(z) - \alpha = a_h z^h + \dots$, et appliquons la formule de Jensen à $g(z)$:

$$m(R, g) + N(R, g) = m(R, \frac{1}{g}) + N(R, \frac{1}{g}) + \log|a_h| ;$$

en remarquant que $N(R, g) = N(R, f)$, cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$T(R, f) + [m(R, f - \alpha) - m(R, f)] = m(R, \alpha) + N(R, \alpha) + \log|a_h| ,$$

soit

$$m(R, \alpha) + N(r, \alpha) = T(R, f) + h(R, \alpha) ,$$

où $h(R, \alpha) = [m(R, f - \alpha) - m(R, f)] - \log|a_h|$.

Nous allons maintenant majorer supérieurement l'expression $|m(R, f-\alpha) - m(R, f)|$. Nous avons tout d'abord :

$$\overset{+}{\log}|f| \leqslant \overset{+}{\log}[|f - \alpha| + |\alpha|] \leqslant \overset{+}{\log}|f - \alpha| + \overset{+}{\log}|\alpha| + \log 2 ,$$

d'où

$$m(R, f) \leqslant m(R, f - \alpha) + \overset{+}{\log}\, \alpha + \log 2 ,$$

soit

$$m(R, f) - m(R, f - \alpha) \leqslant \overset{+}{\log}\, \alpha + \log 2 ,$$

de même

$$m(R, f - \alpha) - m(R, f) \leqslant \overset{+}{\log}\, \alpha + \log 2 ,$$

et aussi

$$|m(R\ ,\ f-\alpha)\ -\ m(R\ ,\ f)|\leqslant \overset{+}{\log}\,\alpha + \log 2\ ;$$

ce qui nous donne :

$$|h(R\ ,\ \alpha)|\leqslant \overset{+}{\log}\,\alpha + \log 2 + \log|a_h|\ .$$

La fonction $T(R\ ,\ f)$ étant croissante de R , elle admet une limite finie ou infinie quand R tend vers 1 .

Toute fonction f telle que $\lim\limits_{R\to 1} T(R\ ,\ f) < \mu$ est dite à caractéristique bornée.

Nous allons maintenant introduire une autre fonction caractéristique, qui est plus pratique que celle de R. NEVANLINNA en théorie du potentiel. Elle a été introduite par AHLFORS et SCHIMIZU, indépendamment l'un de l'autre :

3. Caractéristique au sens de AHLFORS et de SCHIMIZU.

Une fonction $w \equiv f(z)$ méromorphe dans $|z| < 1$ donne une représentation conforme du domaine $|z| < 1$ sur une surface de Reimann w étalée sur le plan des w , ou plutôt sur la sphère de Reimann. Au cercle $|z| \leqslant R < 1$, correspond alors une surface de Reimann sphérique w_r et ne couvrant un point $\omega = \alpha$ qu'un nombre fini de fois, soit $n(R\ ,\ \alpha)$. Ce nombre, évidemment égal au nombre de fois que $w = f(z)$ admet la valeur α à l'intérieur du cercle $|z| \leqslant R$, peut se calculer par la formule

$$n(R\ ,\ \alpha)\ = -\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial R}\log\frac{1}{[f(Re^{i\varphi}),\alpha]}\,d\varphi + \frac{1}{\pi}\int_{|z|\leqslant R}\frac{|f'|^2}{(1+|f|^2)^2}\,d\sigma\ ,$$

où $[f(Re^{i\varphi})\ ,\ \alpha]$ désigne la distance cordale, c'est-à-dire :

$$[f(Re^{i\varphi})\ ,\ \alpha] = \frac{|f(Re^{i\varphi}).\alpha|}{\sqrt{1+|f|^2}.\sqrt{1+|\alpha|^2}} \qquad \text{pour } \alpha \text{ fini}\ ,$$

$$[f(Re^{i\varphi})\ ,\ \infty] = \frac{1}{\sqrt{1+|f|^2}}\ ,$$

et $d\sigma$ l'élément d'aire du plan des z .

Posons :

$$m_1(R\ ,\ \alpha)\ = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{[f(Re^{i\varphi}),\alpha]}\,d\varphi\ ,$$

$$s(R)\ = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f'|^2}{(1+|f|^2)^2}\,d\sigma = \frac{\text{aire de la surface sphérique } w_R}{\text{aire de la sphère}}\ ;$$

nous avons ainsi la relation :

$$\frac{n(R\ ,\ \alpha)}{R} + \frac{\partial}{\partial R}\, m_1(R\ ,\ \alpha) = \frac{s(R)}{R}\ ,$$

que nous pouvons interger par rapport à R :

$$\int_0^R \frac{n(R\ ,\ \alpha)}{R}\, dR + m_1(R\ ,\ \alpha) + K(\alpha) = \int_0^R \frac{s(R)}{R}\, dR\ ,$$

où $K(\alpha)$ est une constante déterminée par $\lim\limits_{R\to 0} \left[\int_0^R \frac{n(R,\alpha)}{R}\, dR + K + m_1(R\ ,\ \alpha)\right] = 0$;

$$T_1(R\ ,\ f) = \int_0^R \frac{s(R)}{R}\, dR = \text{caractéristique au sens d'AHLFORS-SCHIMIZU}\ .$$

4. Relation entre $T(R\ ,\ f)$ et $T_1(R\ ,\ f)$.

$T_1(R\ ,\ f)$ est, d'après sa définition, indépendante de α ; nous pouvons prendre $\alpha = \infty$, et

$$T_1(R\ ,\ f) = \int_0^R \frac{n(t\ ,\ \infty)}{t}\, dt + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \log(1 + |f(Re^{i\varphi})|^2)\, d\varphi + K\ .$$

Si f est holomorphe à l'origine,

$$K = -\frac{1}{2}\log(1 + |f(0)|^2)$$

et

$$T_1(R\ ,\ f) = N(R\ ,\ f) + m_1(R\ ,\ \infty) - \frac{1}{2}\log(1 + |f(0)|^2)\ .$$

Nous allons montrer que $m_1(R\ ,\ \infty) = m(R\ ,\ \infty) + O(1)$. Par définition même,

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f(Re^{i\varphi})|\, d\varphi \leqslant m_1(R\ ,\ \infty)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \log(1 + |f(Re^{i\varphi})|^2)\, d\varphi \leqslant \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f(Re^{i\varphi})|^2\, d\varphi + \frac{\log 2}{2}\ ,$$

soit

$$m(R\ ,\ \infty) \leqslant m_1(R\ ,\ \infty) \leqslant m(R\ ,\ \infty) + \frac{\log 2}{2}$$

ou

$$m_1(R\ ,\ \infty) = m(R\ ,\ \infty) + O(1)\ ;$$

d'où

$$T_1(R\ ,\ f) = T(R\ ,\ f) + O(1)\ .$$

Nous avons ainsi montré le résultat pour f holomorphe à l'origine. Si l'origine est un pôle de f , le résultat subsiste (voir SCHIMIZU).

Exemple : Caractéristique d'une fraction rationnelle.

$f = \frac{A(z)}{Q(z)}$, $Q(0) \neq 0$, A et Q premiers entre eux :

$$T_1(R\ ,\ \frac{A}{Q}) = \int_0^R \frac{n(t\ ,\ \infty)}{t}\, dt + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1 + |f(Re^{i\varphi})|^2}{1 + |f(0)|^2}\, d\varphi\ ;$$

A et Q étant supposés premiers entre eux, le nombre $n(t\ ,\ \infty)$ désigne le nombre des racines $\frac{1}{\theta_j}$ de $Q(z)$ dans $|z| \leq t$. La formule de Jensen, appliquée à $Q(z)$, donne :

$$\log|q| = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \log|Q(Re^{i\varphi})|^2\, d\varphi + \sum \log \frac{1}{|\theta_j|R}\ ,$$

soit

$$T_1(R\ ,\ \frac{A}{Q}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{|A|^2 + |Q|^2}{|A(0)|^2 + |Q(0)|^2}\, d\varphi\ .$$

_ Dans la suite de cet exposé, nous nous occuperons seulement des fonctions à caractéristique bornée. Nous allons montrer, dans un premier théorème dû à R.NEVANLINNA, comment l'étude de ces fonctions se ramène à celle des fonctions, quotient de 2 fonctions holomorphes et bornées dans $|z| < 1$, et dans un second théorème dû à FROSTMANN, montrer le lien qui unit ces fonctions aux ensembles de capacité logarithmique positive.

THÉORÈME 2 (NEVANLINNA). - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction méromorphe dans $|z| < 1$ soit quotient de deux fonctions holomorphes et bornées dans $|z| < 1$ est que sa caractéristique soit bornée.

1. Condition suffisante.

Reprenons la formule de Poisson-Jensen sous la forme

$$\log|f(z)| = w_R(z\ ,\ f) - w_R(z\ ,\ \frac{1}{f}) \qquad \text{avec } z = re^{i\theta}\ ,\ \ r < R < 1\ ,$$

en remarquant que $w_R(0\ ,\ f) = T(R\ ,\ f)$.

Nous allons montrer que la fonction harmonique et positive $w_R(z\ ,\ f)$ admet une fonction limite quand R tend vers 1 .

Pour cela, montrons tout d'abord que c'est une fonction croissante de R , pour tout $|z| < 1$, ce qui généralisera le cas déjà démontré où $z = 0$.

Soit un point $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, tel que $r_0 < r < R < 1$. Nous avons déjà remarqué que $\overset{+}{\log}|f(z)| \leqslant w_R(z , f)$.

$$u_r(z_0 , f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f(re^{i\theta})| \frac{r^2-r_0^2}{r^2+r_0^2-2rr_0 \cos(\theta-\theta_0)} d\theta$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w_R(re^{i\theta} , f) \frac{r^2-r_0^2}{r^2+r_0^2-2rr_0 \cos(\theta-\theta_0)} d\theta ;$$

la fonction $v_r(z , f)$ étant nulle pour $|z| = r$, l'intégrale peut s'écrire :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (w_R(re^{i\theta} , f) - v_r(re^{i\theta} , f)) \frac{r^2-r_0^2}{r^2+r_0^2-2rr_0 \cos(\theta-\theta_0)} d\theta .$$

La fonction $w_R - v_r$ est harmonique en tout point du cercle $|z| < R$; en vertu de la formule de Poisson, cette intégrale devient égale à

$$w_R(z_0 , f) - v_r(z_0 , f) ,$$

d'où

$$u_r(z_0 , f) \leqslant w_R(z_0 , f) - v_r(z_0 , f) ,$$

soit

$$u_r(z_0 , f) + v_r(z_0 , f) = w_r(z_0 , f) \leqslant w_R(z_0 , f) .$$

La fonction $w_R(z , f)$ étant croissante de R, en tout point du cercle $|z| < 1$, elle admet une limite finie ou infinie :

$$\lim_{R\to 1} w_R(z , f) = w(z , f) ;$$

or, puisque $w_R(0 , f) = T(R , f)$, cette limite est finie pour $z = 0$, et, d'après le théorème de Harnack, elle sera finie en tout point du cercle $|z| < 1$, et elle a lieu uniformément.

A partir de la relation $\log|f(z)| = w_R(z , f) - w_R(z , \frac{1}{f})$, on a :

$$w(z , \frac{1}{f}) = \lim_{R} w_R(z , \frac{1}{f}) = w(z , f) - \log|f(z)| ;$$

les fonctions limites $w(z , f)$ et $w(z , \frac{1}{f})$ sont positives et harmoniques pour $|z| < 1$, à l'exception des pôles b_i et des racines a_i de la fonction f.

Notons par $\overline{w}(z , f)$ la fonction conjuguée de la fonction harmonique $w(z , f)$.

Elle est déterminée, à une constante additive près ; en choisissant cette constante d'une manière convenable, on aura :

$$\log f(z) = [w(z\ ,\ f) - w(z\ ,\ \tfrac{1}{f})] + i[\overline{w}(z\ ,\ f) - \overline{w}(z\ ,\ \tfrac{1}{f})] .$$

Posons :

$$\varphi(z\ ,\ f) = e^{-w(z,f)-i\overline{w}(z,f)} ,$$

$$\varphi(z\ ,\ \tfrac{1}{f}) = e^{-w(z,1/f)-i\overline{w}(z,1/f)} ;$$

d'où

$$f(z) = \frac{\varphi(z\ ,\ \frac{1}{f})}{\varphi(z\ ,\ f)} ,$$

où $\varphi(z\ ,\ \frac{1}{f})$ et $\varphi(z\ ,\ f)$ sont holomorphes et bornées dans $|z| < 1$.

2. Condition nécessaire.

Supposons $f(z) = \dfrac{\psi_1(z)}{\psi_2(z)}$, avec $\psi_1(z)$ et $\psi_2(z)$ holomorphes et bornées dans $|z| < 1$ $(\psi_2(0) \neq 0)$; nous pouvons supposer que $\psi_1(z)$ et $\psi_2(z)$ sont telles que $|\psi_1(z)|$ et $|\psi_2(z)| \leqslant 1$ dans $|z| < 1$, sinon il suffit de les diviser par une constante convenable :

$$\overset{+}{\log}|f(z)| = \overset{+}{\log}\frac{|\psi_1(z)|}{|\psi_2(z)|} \leqslant \overset{+}{\log}\frac{1}{|\psi_2(z)|} ,$$

$$u_R(z\ ,\ f) \leqslant u_R(z\ ,\ \frac{1}{\psi_2}) ,$$

$$v_R(z\ ,\ f) \leqslant v_R(z\ ,\ \frac{1}{\psi_2}) ,$$

$$w_R(z\ ,\ f) \leqslant w_R(z\ ,\ \frac{1}{\psi_2}) = w_R(z\ ,\ \psi_2) + \log\frac{1}{|\psi_2(z)|} .$$

or $\psi_2(z)$ est holomorphe et bornée par 1 dans $|z| < 1$, donc $w_R(0\ ,\ \psi_2) = 0$, et la relation précédente, écrite pour $z = 0$, devient :

$$T(R\ ,\ f) = w_R(0\ ,\ f) \leqslant \log\frac{1}{|\psi_2(0)|} ,$$

et la fonction caractéristique $T(R\ ,\ f)$ est bornée.

Si l'origine est un pôle d'ordre k de $f(z)$, on remplacera $f(z)$ par $\dfrac{1}{f(z)}$, et comme les caractéristiques de f et $\frac{1}{f}$ ne diffèrent que d'une constante, $T(R\ ,\ f)$ sera bornée ($T(R\ ,\ f) = T(R\ ,\frac{1}{f}) + \log|u_k|$, où $f(z) = \frac{u_k}{z^k} + \dots$).

Remarques.

1° $f(z)$ étant quotient de deux fonctions ψ_1 et ψ_2 bornées dans $|z| < 1$ ($|\psi_1(z)| \leqslant 1$ et $|\psi_2(z)| \leqslant 1$), on aura, en tout point du cercle unité,

$$|\psi_1(z)| \leqslant |\varphi(z\ ,\ \tfrac{1}{f})|\ ,$$

$$|\psi_2(z)| \leqslant |\varphi(z\ ,\ f)|\ .$$

2° Si f est à caractéristique bornée, alors les fonctions $m(R\ ,\ \alpha)$ et $N(R, \alpha)$ sont bornées quel que soit α.

Si, pour une valeur α, lesdites expressions sont bornées, il en est de même pour toute valeur de α, et f sera à caractéristique bornée.

3° $N(R\ ,\ \alpha) \leqslant H \iff S(\alpha) = \sum\limits_{r_j<1} (1 - r_j(\alpha)) < H$, où les $r_j(\alpha)$ désignent les modules des racines de l'équation $f(z) = \alpha$.

3. Exemples de fonctions à caractéristique bornée.

a) Fonctions de la classe H^p : Toute fonction f, méromorphe dans $|z| < 1$ et de classe H^p, est à caractéristique bornée.

Définition de la classe H^p :

- Une fonction holomorphe dans $|z| < 1$ est dite appartenir à la classe H^p si

$$\mu_p(R\ ,\ f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(Re^{i\varphi})|^p\, d\varphi$$

bornée pour $R < 1$.

- Une fonction, méromorphe dans $|z| < 1$, est dite de classe H^p si la fonction

$$g(z) = z^k f(z) \prod_j \frac{1 - \theta_j z}{\bar{\theta}_j - z}$$

est de classe H^p, les $\frac{1}{\theta_j}$ étant les pôles dans $|z| < 1$ de $f(z)$, et k l'ordre du pôle de $f(z)$ à l'origine.

Posons :

$$\psi(z) = z^k \prod_j \frac{1 - \theta_j z}{\overline{\theta}_j - z} ,$$

$$f(z) = \frac{g(z)}{\psi(z)} ,$$

$$T(R , f) \leqslant T(R , g) + T(R , \frac{1}{\psi}) .$$

$T(R , g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|g(Re^{i\varphi})|d\varphi$, puisque g est holomorphe. En remarquant que $|g(Re^{i\varphi})|^p \geqslant p \overset{+}{\log}|g(Re^{i\varphi})|$, nous avons :

$$T(R , g) \leqslant \frac{1}{p} \mu_p(R , g) ,$$

$$T(R , \frac{1}{\psi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} \frac{\left|\prod_j \frac{\overline{\theta}_j - z}{1 - \theta_j z}\right|}{R^k} d\varphi + \sum \log R|\theta_j| ,$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \sum_j \int_0^{2\pi} \log\left|\frac{\overline{\theta}_j - z}{1 - \theta_1 z}\right| d\varphi - k \log R + \sum \log R|\theta_j| ;$$

par la formule de Jensen :

$$\log|\theta_j| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left|\frac{\overline{\theta}_j - z}{1 - \theta_j z}\right| d\varphi + \log R|\theta_j|$$

$$\Longrightarrow T(R , \frac{1}{\psi}) \leqslant \sum \log|\theta_j| - \log R|\theta_j| + \log R|\theta_j| - k \log R$$

$$\Longrightarrow T(R , f) \leqslant \frac{1}{p} \mu_p(R , g) + \sum \log|\theta_j| - k \log R .$$

Ainsi, si $g \in H^p$ et $\prod_j |\theta_j| < M$, la fonction f est à caractéristique bornée.

<u>Remarques</u>. - $g(z) \in H^p \Longrightarrow g(z)$ est à caractéristique bornée, donc, d'après le théorème de Nevanlinna, $g(z) = \frac{g_1(z)}{g_2(z)}$, où $g_1(z)$ et $g_2(z)$ sont bornées dans $|z| < 1$.

Si $\prod_j |\theta_j| < M$, la fonction $\psi(z)$ est holomorphe dans $|z| < 1$, et vérifie $|\psi(z)| \leqslant 1$,

$$\Longrightarrow f(z) = \frac{g_1(z)}{g_2(z)\ \psi(z)} ,$$

et, d'après le théorème 2, $f(z)$ est à caractéristique bornée.

b) Toute fonction, méromorphe dans $|z| < 1$ et bornée au voisinage de $|z| = 1$, est à caractéristique bornée.

Soient $\varphi(z)$ une telle fonction, et $\frac{1}{\theta_j}$ ses pôles dans $|z| < 1$ $(\prod|\theta_j| < M)$:

$$f(z) = z^k \varphi(z) \prod_j \frac{1 - \theta_j z}{\overline{\theta}_j - z} \qquad (\text{ k = ordre du pôle à l'origine}).$$

$$\prod_j|\theta_j| < M \implies |z^k \prod_j \frac{1 - \theta_j z}{\overline{\theta}_j - z}| \leqslant 1 \qquad |z| < 1 .$$

$\varphi(z)$ étant borné au voisinage de $|z| = 1$, nous aurons alors $f(z)$ holomorphe et bornée dans $|z| < 1$,

$$\varphi = \frac{f(z)}{\psi(z)}$$

quotient de 2 fonctions bornées dans $|z| < 1$, donc $\varphi(z)$ à caractéristique bornée.

4. Ensemble de capacité positive et fonctions à caractéristique bornée.

THÉORÈME 3 (FROSTMANN). - Si la fonction $N(R, \alpha)$, mesurant la distribution des racines de l'équation $f(z) = \alpha$, reste bornée, pour tout $\alpha \in S$, ensemble de capacité logarithmique positive, la fonction $T(R, f)$ est bornée.

Reprenons la définition de la caractéristique au sens d'AHLFORS et SCHIMIZU :

$$T(R, f) = N(R, \alpha) + m(R, \alpha) = \int_0^R \frac{S(t)}{t} dt .$$

Nous gardons la même notation que pour les fonctions introduites par R. NEVANLINNA, en n'oubliant pas qu'elles ne diffèrent que d'une quantité bornée pour $R < 1$.

On s'assure immédiatement que, pour R fixé, $m(R, \alpha)$ est une fonction continue de α ; il en est alors de même pour $N(R, \alpha)$, puisque la somme est indépendante de α. Ces fonctions sont donc susceptibles d'une intégration de Stieljes par rapport à une fonction additive $\mu(\alpha)$, donnant une distribution de masse sur la sphère de Riemann.

En supposant $\mu > 0$ et la masse totale égale à 1 :

$$T(R, f) = \int_W N(R, \alpha)\, d\mu(\alpha) + \int_\omega m(R, \alpha)\, d\mu(\alpha) .$$

ω désignant la sphère de Riemann :

$$\int_{\omega} m(R\ ,\ \alpha)\ d\mu(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} d\mu(\alpha) \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{[f(Re^{i\varphi})\ ,\ \alpha]}\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{w} \log \frac{1}{[f(Re^{i\varphi})\ ,\ \alpha]}\, d\mu(\alpha)\ ;$$

or

$$\int_{\omega} \log \frac{1}{[f(Re^{i\varphi})\ ,\ \alpha]}\, d\mu(\alpha) = \text{potentiel logarithmique de la distribution } \mu\ .$$

$$= u(f)\ ,$$

et la fonction caractéristique devient égale à

$$T(R\ ,\ f) = \int_{w} N(R\ ,\ \alpha)\ d\mu(\alpha) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(f)\ d\varphi\ .$$

Or, par hypothèse, α appartient à un ensemble de capacité logarithmique positive ; nous pouvons choisir une distribution de masse de manière que le potentiel $u(f)$ soit borné, et comme nous avons supposé $N(R\ ,\ \alpha)$ bornée, il en est alors de même de la fonction caractéristique.

Remarques. - Nous avons déjà vu que $N(R\ ,\ \alpha)$ et $\sum\limits_{r_j(\alpha)<1} 1 - r_j(\alpha)$ ($r_j(\alpha)$ désignant le module des racines de l'équation $f(z) = \alpha$) sont bornées ou non en même temps.

Si $\sum 1 - r_j(\alpha)$ est bornée pour une certaine valeur α , elle n'est pas nécessairement bornée pour tout autre valeur de α . Mais si $\sum 1 - r_j(\alpha)$ est bornée pour tout $\alpha \in S$ de capacité logarithmique positive, comme f est à ce moment à caractéristique bornée, il en sera de même pour toute valeur de α .

5. Fonctions à caractéristique bornée et déterminant de Kronecker.

Nous allons maintenant établir un dernier résultat, dû à CANTOR, qui montre que toute fonction, à caractéristique bornée, et admettant un développement de Laurent à l'origine à coefficients entiers rationnels, est une fraction rationnelle.

Commençons tout d'abord par établir le lemme suivant :

LEMME. - Soit $f(z)$ à caractéristique bornée, holomorphe à l'origine :

$$f(z) = u_0 + u_1 z + \dots + u_n z^n + \dots .$$

$$D_n = \begin{vmatrix} u_0 & \dots & u_r \\ u_n & \dots & u_{2n} \end{vmatrix}\ ;$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} |D_n|^{1/n} = 0 .$$

Démonstration. - $f(z)$, étant à caractéristique bornée, est d'après le théorème 2 quotient de 2 fonctions holomorphes et bornées dans le cercle unité :

$$f(z) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)} = u_0 + u_1 z + \dots + u_n z^n + \dots ;$$

$$\beta(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \dots + \beta_n z^n + \dots ,$$

$$\alpha(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_n z^n + \dots .$$

Mais, pour plus de commodité, nous pouvons choisir $\alpha_0 = 1$.

Avant de majorer D_n par l'inégalité d'Hadamard, nous allons, suivant un procédé devenu classique, exprimer le terme général de D_n en fonction des coefficients α_j et β_j .

Soient A_0 , A_1 , ... , A_n les colonnes de D_n ; remplaçons

$$A_{n-j} \to \sum_{i=0}^{n-j} \alpha_i A_{n-j-i} ,$$

puis recommençons la même opération sur les lignes, ce qui nous donne

$$D_n = |d_{h,k}| ,$$

où

$$d_{h,k} = \sum_{i=0}^{h} \sum_{j=0}^{k} \alpha_i \alpha_j u_{h+k-i-j} .$$

Nous pouvons remarquer que $d_{h,k}$ est le coefficient de z^{h+k} dans

$$g(z) = \sum_{i=0}^{h} \alpha_i z^i \times \sum_{j=0}^{k} \alpha_i z^i \times \sum_0^{\infty} u_n z^n ;$$

en utilisant la relation

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i z^i = \frac{\sum_{i\geq 0} \beta_i z^i}{\sum_{i\geq 0} \alpha_i z^i} ,$$

$g(z)$ peut s'écrire :

$$g(z) = (\sum_{i=0}^{h} \alpha_i z^i + \sum_{i=0}^{k} \alpha_i z^i - \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i z^i) \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i z^i .$$

En posant :

$$a_{h,k} = \sum_{i=0}^{h} \alpha_i \beta_{h+k-i}$$

$$a_{k,h} = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \beta_{h+k-i}$$

$$b_{k,h} = \sum_{i=0}^{h+k} \alpha_i \beta_{h+k-i} ,$$

nous avons $d_{h,k} = a_{h,k} + a_{k,h} - b_{k,h}$, et en appliquant l'inégalité de Schwarz,

$$|d_{h,k}|^2 \leqslant 3(|a_{h,k}|^2 + |a_{k,h}|^2 + |b_{k,h}|^2) .$$

Majorons maintenant D_n en utilisant l'inégalité d'Hadamard

$$|D_n|^2 \leqslant \prod_{h=0}^{h} \sum_{k=0}^{n} |d_{h,k}|^2 ;$$

en appliquant l'inégalité des moyennes arithmétique **et géométrique au** second membre de la précédente inégalité, nous obtenons :

$$|D_n|^{2/(n+1)} \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{h=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} |d_{h,k}|^2 .$$

Nous nous sommes proposés de montrer que $\sum_{n=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} |d_{n,k}|^2 = O(n)$; pour cela, il suffit d'établir que :

$$\sum_{h=0}^{h} \sum_{k=0}^{n} |a_{h,k}|^2 = O(n) ,$$

$$\sum_{h=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} |b_{h,k}|^2 = O(n) .$$

Pour montrer ces deux derniers résultats, nous allons utiliser l'hypothèse que les fonctions $\alpha(z)$ et $\beta(z)$ sont holomorphes et bornées dans $|z| < 1$.

Considérons la fonction

$$\psi(z) = \alpha(z) \sum_{k}^{\infty} \beta_i z^i ;$$

$a_{h,k}$ est le coefficient de z^{h+k} dans le développement de $\psi(z)$, d'où, en utilisant la formule de Gutzmer pour $\psi(z)$,

$$\sum_{h=0}^{\infty} |a_{h,k}|^2 = \lim_{R\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\psi(Re^{i\varphi})|^2 \, d\varphi \ ;$$

or $\alpha(z)$ est bornée, soit $|\alpha(z)| \leqslant A \quad (|z| < 1)$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\psi(Re^{i\varphi})|^2 \, d\varphi \leqslant \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sum_{i>k} \beta_i \, z^i|^2 \, d\varphi = A^2 \sum_{i\geqslant k} |\beta_i|^2 \ ,$$

en posant $B_k = \sum_{i\geqslant k} |\beta_i|^2$, d'où

$$\sum_{h=0}^{\infty} |a_{h,k}|^2 \leqslant A^2 \, B_k \ ;$$

or, les B_k forment une suite de nombres positifs tendant vers zéro, d'où $\sum_{k=0}^{n} B_k = o(n)$, ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{h=0}^{\infty} |a_{h,k}|^2 = o(n) \ .$$

Par la même méthode, en remarquant que $b_{h,k}$ désigne le coefficient de z^{h+k} dans le développement de la fonction bornée $\beta(z).\alpha(z)$, nous avons

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{h=0}^{n} |b_{k,k}|^2 = o(n) \ .$$

Nous venons aussi de montrer que $\sum_{h=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} |d_{h,k}|^2 = o(n)$, soit

$$\lim_{n\to\infty} |D_n|^{1/n} = 0 \ .$$

En utilisant ce dernier résultat, nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 4. - Toute fonction $f(z)$ à caractéristique bornée dans le cercle unité et à développement de Laurent à l'origine à coefficients entiers, est une fraction rationnelle.

Soit k l'ordre du pôle à l'origine de $f(z)$. La fonction $z^k f(z)$ est holomorphe à l'origine, et sa fonction caractéristique est bornée :

$$z^k f(z) = u_0 + u_1 z + \dots + u_n z^n + \dots \qquad u_n \in \mathbb{Z} \ .$$

$\lim_{n\to\infty} |D_n|^{1/n} = 0$ et comme c'est un nombre entier, $D_n = 0$ pour $n > N$ et $z^k f(z)$ est une fraction rationnelle.

Remarque. - Ce dernier résultat de CANTOR généralise les résultats de SALEM et de Mlle CHAMFY.

Mlle CHAMFY a montré que s'il existe un nombre a et un polynôme $P(z)$ tel que $\frac{P(z)}{f(z) - a} = \alpha(z) \in H^2$ (donc $\alpha(z)$ holomorphe et bornée dans $|z| < 1$) et si $f(z)$ est à coefficients entiers, donc c'est une fraction rationnelle :

$$\frac{P(z)}{f(z) - a} = \alpha(z) \implies f(z) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)} \qquad \text{avec } \beta(z) = P(z) + a\alpha(z) \ ;$$

ainsi, $f(z)$ est quotient de deux fonctions holomorphes et bornées, donc à caractéristique bornée.

A partir des théorèmes 3 et 4, nous avons :

COROLLAIRE. - Soit $f(z)$ méromorphe dans le cercle unité, avec développement de Laurent à l'origine à coefficients entiers. S'il existe un ensemble S de capacité logarithmique positive telle que, pour tout $\alpha \in S$, la fonction $N(R , \alpha)$ associée aux racines de l'équation $f(z) = \alpha$ est bornée, alors $f(z)$ est une fraction rationnelle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AHLFORS (Lars). - Eine Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen, Comment. Helsingfors, t. 8, 1935, n° 10, 14 p.

[2] CANTOR (David G.). - Power series with integral coefficients, Bull. Amer. math. Soc., t. 69, 1963, p. 362-366.

[3] CHAMFY (Mme Christiane BLANCHARD). - Fonctions méromorphes dans le cercle unité et leurs séries de Taylor, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 8, 1958, p. 211-262 (Thèse Sc. math. Paris, 1958).

[4] FROSTMANN (O.). - Potentiel d'équilibre et capacité d'ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions, Medd. Lunds Univ. Mat. Seminar., t. 3, 1935, 118 p.

[5] NEVANLINNA (Rolf). - Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes. - Paris, Gauthier-Villars, 1929 (Collection de Monographies sur la Théorie des fonctions).

[6] NEVANLINNA (Rolf). - Eindeutige analytische Funktionen, 2te Auflage. - Berlin, Springer-Verlag, 1953 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 46).

[7] SALEM (Raphaël). - Powers series with integral coefficients, Duke math. J., t. 12, 1945, p. 153-172.

[8] SCHIMIZU (Tatsujiro). - On the theory of meromorphic functions, Japan. J. of Math., t. 6, 1929, p. 119-171.