Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Françoise Bertrandias

Diamètre transfini dans un corps valué. Application au prolongement analytique

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 5 (1963-1964), exp. nº 3, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1963-1964__5__A3_0>

Séminaire DELANGE-PISOT
(Théorie des Nombres)
5e année, 1963/64, n° 3

9 décembre 1963

DIAMÈTRE TRANSFINI DANS UN CORPS VALUÉ
APPLICATION AU PROLONGEMENT ANALYTIQUE

par Mme Françoise BERTRANDIAS

1 Diamètre transfini.

K désignera un corps valué, à valeurs absolues réelles.

La notion de diamètre transfini, définie par FEKETE [2] pour un compact du plan complexe, peut être étendue à un ensemble borné A d'un corps K.

1.1. Première définition. - Soit S_n un système de n éléments $x_1, \ldots, x_n$ de A et

$$\Delta_n = \sup_{S_n} \prod_{h<k} |x_h - x_k|^2 .$$

La suite $\Delta_n^{1/(n(n-1)}$ converge. On pose :

$$d(A) = \lim_{n\to\infty} \Delta_n^{1/n(n-1)} .$$

La démonstration est analogue à celle du cas classique. Si A est compact, il existe un système S_n au moins donnant le maximum Δ_n, mais ce n'est le cas général.

1.2. Deuxième définition. - Soit :

$$P_n(x) = x^n + \lambda_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \lambda_0$$

un polynôme unitaire de $K[x]$ et :

$$\tau_n = \inf_{P_n} \sup_{x\in A} |P_n(x)| .$$

La suite $\tau_n^{1/n}$ converge. On pose : $\tau(A) = \lim_{n\to\infty} \tau_n^{1/n}$.

Ici encore, démonstration analogue au cas classique. Si K est localement compact, il existe un polynôme $T_n(x)$ au moins donnant le minimum τ_n : on l'appellera polynôme de Čebičev de degré n de A. Dans le cas général on désignera par polynôme de Čebičev de degré n de A relatif à la valeur ε tout polynôme $T_n^{\varepsilon}(x)$ unitaire de degré n tel que :

$$\tau_n \leqslant \sup_{x\in A} |T_n^{\varepsilon}(x)| \leqslant (1+\varepsilon)\ \tau_n \ .$$

1.3. Equivalence des deux définitions. — On démontre, comme dans le cas classique, que les deux définitions fournissent le même nombre $d = \tau$ qu'on appellera diamètre transfini de A et qu'on notera $\tau(A)$.

1.4. Propriétés.

1.4.1. Si $A \subset B$, $\tau(A) \leqslant \tau(B)$.

1.4.2. $\tau(\lambda A) = |\lambda|\ \tau(A) \quad (\lambda \in K)$.

1.4.3. $\tau(A \cup \{x_0\}) = \tau(A) \quad (x_0 \in K)$.

1.4.4. Soit $\overline{A}$ l'adhérence de A dans K . On a : $\tau(\overline{A}) = \tau(A)$.

1.4.5. Soient $P(x)$ un polynôme unitaire de degré k de $K[x]$ et A un ensemble borné de K . On considère, dans la clôture algébrique Ω de K , l'ensemble $B(A , P)$ défini par :

$$B(A\ ,\ P) = \{x \in \Omega\ ;\ P(x) = y \ \text{ pour tout }\ y \in A\} .$$

On a : $\tau(B) = \tau(A)^{1/k}$.

(Ω est supposé valué, sa valuation étendant celle de K).

Application. - La lemniscate $B(r , P) = \{x\in\Omega : |P(x)| \leqslant r ,\ P(x) \in K\}$ (où r est un réel positif) a pour diamètre transfini :

$$\tau(B) = (\nu r)^{1/k}$$

(ν étant le diamètre transfini du disque $|x| \leqslant 1$,de K).

1.4.6. A étant un ensemble borné de K et η un réel positif, il existe une lemniscate A_η de K :

$$A_\eta = \{x \in K : |P(x)| \leqslant \alpha\}$$

($P(x)$ polynôme unitaire de $K[x]$, α réel positif)

telle que $A \subset A_\eta$ et $\tau(A) \leqslant \tau(A_\eta) \leqslant (1+\eta)\ \tau(A)$.

Ces propriétés se démontrent facilement en utilisant la première définition (système S_n) pour 1.4.3 et 1.4.4, et la deuxième définition (polynômes de Čebičev) pour 1.4.5 et 1.4.6 (dans 1.4.6, $P(x)$ est un polynôme $T_n^{\varepsilon}(x)$ de A).

1.5. Exemples.

1.5.1. - Le disque unité $|x| \leqslant 1$ de K a un diamètre transfini $\nu \leqslant 1$. Si K est algébriquement clos : $\nu = 1$ (on obtient les mêmes résultats pour le disque : $|x| < 1$ et pour la circonférence : $|x| = 1$).

Démonstration. - On a $\sup\limits_{|x|\leqslant 1} |x^n| = 1$. Ceci entraîne (deuxième définition) : $\tau_n \leqslant 1$. D'où $\nu = \lim\limits_{n\to\infty} \tau_n^{1/n} \leqslant 1$.

Si K est algébriquement clos, la lemniscate $B(1, x^2) = \{x \in K : |x^2| \leqslant 1\}$ a pour diamètre transfini $\tau(B) = \nu^{1/2}$ (d'après 1.4.5) et elle est identique au disque unité $|x| \leqslant 1$. Il en résulte $\nu = 1$.

1.5.2. - Si $K = Q$ corps des rationnels, avec la valuation ordinaire, $\nu = \frac{1}{2}$. Considérons l'ensemble $B(A, P)$ du § 1.4.5 avec $A = \{y : |y - \frac{1}{2}| \leqslant \frac{1}{2}\}$, $P(x) = x^2$ et $K = R$ corps des réels (ν a la même valeur dans Q et R d'après 1.4.4). On a

$$\tau(B) = \tau(A)^{1/2} .$$

D'autre part, A étant un disque de rauon $\frac{1}{2}$ et B le disque unité,

$$\tau(B) = 2\tau(A) \qquad \text{(d'après 1.4.2)} .$$

Il en résulte

$$\tau(B) = \nu = \frac{1}{2} .$$

1.5.3. - Si $K = Q$, avec la valuation p-adique (telle que $|p| = \frac{1}{p}$), $\nu = p^{-1/(p-1)}$. Considérons l'ensemble $B(A, P)$ avec $A = \{y : |y| \leqslant \frac{1}{p}\}$, $P(x) = x(x-1) \dots (x-p+1)$ et $K = Q_p$, corps des nombres p-adiques.

$B(A, P)$ est le disque unité $|x| \leqslant 1$ de Q_p : en effet si $y \in A$, $P(x) - y$ a toutes ses racines dans le disque unité de Q_p, d'après le lemme de Hensel, et inversement, si $|x| \leqslant 1$ dans Q_p, $P(x) \in A$, puisque les disques $|x - i| \leqslant \frac{1}{p}$ $(i = 0, 1, \dots, p-1)$ forment un recouvrement du disque unité.

D'autre part $\tau(B) = \tau(A)^{1/p}$ et $\tau(B) = p\tau(A)$.

D'où $\tau(B) = \nu = p^{-1/(p-1)}$.

Un raisonnement analogue permet de démontrer le résultat plus général :

K étant non archimédien, localement compact et sa valuation non triviale, soient Π une uniformisante de K et p^r le nombre d'éléments du corps des restes de K. On a : $\nu = |\Pi|^{1/(p^r-1)}$.

1.6. Application à une généralisation d'un théorème de Fekete.

THÉORÈME. - Il n'existe qu'un nombre fini de nombres θ algébriques sur Q appartenant, ainsi que tous leurs conjugués, simultanément aux ensembles A de C et A_p de Ω_p tels que

1° A_p est contenu dans le disque $|x|_p \leqslant 1$ de Ω_p, sauf au plus pour un nombre fini de premiers p $(p \in P)$.

2° $\tau(A) \prod_{p \in P} \tau(A_p) < 1$.

(C désigne le corps des complexes, Ω_p la complétion de la clotude algébrique de Q_p).

1.6.1. La démonstration s'appuie sur le résultat suivant :

LEMME. - Il n'existe qu'un nombre fini de nombres θ algébriques sur Q de degré donné s appartenant, ainsi que tous ses conjugués $\theta_1 = \theta$, θ_2, ..., θ_s, simultanément à des ensembles bornés $\{|\theta_i| \leqslant R$ de C et $\{|\theta_i|_p \leqslant R_p\}$ de Ω_p tels que le produit infini $\prod_p R_p$ converge absolument (R, R_p réels positifs).

Démonstration du lemme. - Soit $P(x) = a_s x^s + a_{s-1} x^{s-1} + \dots + a_0$ le polynôme primitif de $Z[x]$ dont $\theta_1, \dots, \theta_s$ sont les racines.

Il résulte des hypothèses

$$\left|\frac{a_i}{a_s}\right| \leqslant \binom{s}{i} R^{s-i} \quad \text{et} \quad \left|\frac{a_i}{a_s}\right|_p \leqslant R_p^{s-i} .$$

Pour tout p, il existe un indice i_p au moins tel que $|a_{i_p}|_p = 1$. D'où

$$|a_s|_p \geqslant R_p^{-s} R_p^{i_p} \geqslant R_p^{-s} \quad \inf \{R_p^s, 1\} = \inf \{R_p^{-s}, 1\} .$$

Comme $a_s \in Z$, on a : $|a_s|_p = 1$ si $R_p \leqslant 1$, $|a_s|_p \geqslant R_p^{-s}$ si $R_p > 1$. D'autre part $|a_s| \prod_p |a_s|_p = 1$ (car $a_s \neq 0$). D'où

$$|a_s| = \prod_p |a_s|_p^{-1} \leqslant (\prod_p{}' R_p)^s ,$$

où le produit infini $\prod'$ est pris sur les premiers p tels que $R_p > 1$ et converge d'après l'hypothèse : $\prod$ absolument convergent. Il en résulte :

$$|a_i| \leqslant (\prod_p{}' R_p)^s \binom{s}{i} R^{s-i} .$$

Les R_p étant donnés, les entiers a_0 , a_1 , ... , a_s sont donc en nombre fini.

1.6.2. Démonstration du théorème. - Supposons qu'il existe une infinité de nombres θ vérifiant les hypothèses du théorème : d'après le lemme précédent, il en existe de degré s arbitrairement grand.

Considérons le Van Der Monde des θ :

$$\Delta(\theta^i) = \Delta(\theta_1 , \theta_2 , \ldots , \theta_s) = \prod_{i \neq j} (\theta_i - \theta_j) ,$$

c'est un nombre rationnel non nul.

Pour s suffisamment grand, d'après la première définition du diamètre transfini, on a :

$$|\Delta(\theta_i)|^{1/n(n-1)} < (1 + \varepsilon) \ \tau(A)$$

$$|\Delta(\theta_i)|_p^{1/n(n-1)} < (1 + \varepsilon) \ \tau(A_p) \qquad (p \in P \text{ ensemble fini}) .$$

Comme pour $p \notin P$, $|\theta_i|_p \leq 1$ et donc $|\Delta(\theta_i)|_p \leq 1$, il en résulte

$$|\Delta(\theta_i)| \prod_p |\Delta(\theta_i)|_p < 1 ,$$

ce qui est absurde puisque $\Delta(\theta_i) \neq 0$.

2. Application au prolongement analytique dans Ω .

2.1. Soit Ω un corps valué, complet, non archimédien, algébriquement clos.

On sait que dans un corps K valué complet non archimédien on a la notion de fonction analytique dans un disque, mais que la méthode de Weierstrass pour le prolongement analytique ne donne pas de résultat. L'étude des séries de Laurent $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ permet de définir des fonctions analytiques dans une couronne $R' \leq r \leq R$ et ces fonctions vérifient, dans le cas d'un corps Ω , les inégalités de Cauchy :

$$|a_n| \ r^n \leq M(f , r) = \sup_{|x|=r} |f(x)|$$

pour tout $n \in Z$ et $R' < r < R$.

On doit à Marc KRASNER [3] une méthode de prolongement analytique uniforme dans Ω : un élément analytique de support D est la limite $f(x)$ d'une suite de fractions rationnelles $f_n(x)$ n'ayant pas de pôle dans D et convergeant uniformément dans D , D étant un domaine quasi connexe. Cette notion d'analyticité coïncide avec la précédente dans le cas d'un disque et d'une couronne, et on a la propriété fondamentale : si un élément analytique $f(x)$ de support D est nul sur un sous-ensemble de D ayant un point d'accumulation dans D , $f(x)$ est identiquement nul.

On se propose de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME. - Si la série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{-n-1} \qquad (u_n \in \Omega)$$

est prolongeable dans un domaine quasi connexe D de Ω , dont le complémentaire A est borné, on a l'inégalité :

$$\limsup_{n\to\infty} |D_n(f)|^{1/n^2} \leq \tau(A)$$

où $D_n(f) = \det(u_{h+k})$ $(0 \leq h , k \leq n)$ (déterminant de Kronecker). Ce théorème est l'analogue d'un résultat connu dans C , corps des complexes [4], D étant alors un domaine simplement connexe.

Plusieurs résultats intermédiaires seront nécessaires pour la démonstration.

2.2. $P(x)$ étant un polynôme de degré k de $\Omega[x]$ et r un réel positif, la lemniscate $B(r , P)$ définie par :

$$B(r , P) = \{x \in \Omega : |P(x)| \leq r\}$$

est formée de la réunion de h disques circonférenciés disjoints $(1 \leq h \leq k)$:

$$B(r , P) = \bigcup_{i=1}^{h} \{x \in \Omega : |x - x_i| \leq r_i\}$$

(r_i réel positif, $|x_i - x_j| > \sup (r_i , r_j)$ si $i \neq j$).

Démonstration. - L'étude du polygone de Newton de $P(x)$ montre que tout $y \in B$ est centre d'un disque contenu dans B . Soit $\mathcal{D}(y)$ le plus grand disque de centre y contenu dans B .

On montre que $\mathcal{D}(y)$ est circonférencié et contient au moins un zéro de $P(x)$. $\xi_1 , \ldots , \xi_k$ étant les zéros distincts ou non de $P(x)$, il en résulte aisément :

$$B = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{D}(\xi_i) .$$

2.3. Soit une série de Laurent

$$g(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n x^n \qquad (a_n \in \Omega)$$

convergeant dans la couronne $R' < |x| < R$ $(0 < R' < R)$ et prolongeable, dans le disque $|x| \leq R'$, dans le complémentaire d'une leminiscate $B = B_1 \cup \dots \cup B_h$ (B_i est le disque $|x - x_i| \leq R'_i$, les disques B_i sont disjoints).

1° $g(x)$ est décomposable d'une manière unique en la somme :

$$g(x) = g_0(x) + g_1(x) + \dots + g_h(x)$$

où $g_0(x)$ est une fonction analytique dans le disque $|x| < R$; $g_i(x)$ est analytique dans le complémentaire du disque B_i et nulle à l'infini $(i = 1, 2, \dots h)$.

2° On a les inégalités :

$$M(g_0 , r_0) \leq M(g , r_0) \qquad R' < r_i < R$$

$$M_{x_i}(g_i , r_i) \leq M(g , r_i) \qquad R'_i < r_i < \inf_{\substack{j \neq i \\ j=1,2,\dots h}} |x_i - x_j|$$

(où $M(f , r) = \sup_{|x|=r} |f(x)|$ et $M_{x_i}(f , r) = \sup_{|x-x_i|=r} |f(x)|$).

Démonstration. - $g(x)$ est analytique dans la couronne

$$R'_1 < |x - x_1| < \inf_{j \neq 1} |x_j - x_1| .$$

Elle est donc développable en série de Laurent dans cette couronne :

$$g(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n^{(1)} (x - x_1)^n = g_1(x) + g_1^*(x)$$

en posant

$$g_1(x) = \sum_{-\infty}^{-1} a_n^{(1)} (x - x_1)^n \quad \text{et} \quad g_1^*(x) = \sum_{0}^{+\infty} a_n^{(1)} (x - x_1)^n$$

$g_1(x)$ est analytique dans le complémentaire de B_1, nulle à l'infini, et $g_1^*(x)$ est analytique, dans le disque $|x| < R$, dans le complémentaire de $B_2 \cup \dots \cup B_h$. De plus les inégalités de Cauchy appliquées à la série de Laurent en $(x - x_1)$ montrent que :

$$M_{x_1}(g , r_1) = \sup_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n^{(1)}| \, r_1^n = \sup \{ \sup_{n=-\infty}^{-1} |a_n^{(1)}| \, r_1^n , \sup_{n=0}^{+\infty} |a_n^{(1)}| \, r_1^n \}$$

$$= \sup \{ M_{x_1}(g_1 , r_1) , M_{x_1}(g_1^* , r_1) \}$$

pour $R_1' < r_1 < \inf |x_1 - x_j|$.

On développe ensuite la fonction $g_1^*(x)$ en série de Laurent en $|x - x_2|$ dans la couronne

$$R_2' < |x - x_2| < \inf_{j=3,\dots h} |x_j - x_2|$$

et l'on a :

$$g_1^*(x) = g_2(x) + g_2^*(x)$$

où $g_2(x)$ est analytique dans le complémentaire de B_2 et nulle à l'infini, $g_2^*(x)$ est analytique, dans le disque $|x| < R$, dans le complémentaire de $B_3 \cup \dots \cup B_h$ et $M_{x_2}(g , r_2) = \sup \{M_{x_2}(g_2 , r_2) , M_{x_2}(g_2^* , r_2)\}$, etc.

On aboutit à $g_{h-1}^*(x) = g_h(x) + g_h^*(x)$,

où $g_h(x)$ est analytique dans le complémentaire de B_h et nulle à l'infini

$g_h^*(x)$ est analytique dans $|x| < R$

on a donc obtenu la décomposition cherchée, en posant $g_0 = g_h^*$, et les inégalités.

Reste à démontrer l'unicité de la décomposition.

Supposons qu'on ait trouvé un deuxième système $g_0' \; g_1' \dots g_h'$ de fonctions analytiques répondant à la question. On a :

$$g_0 - g_0' = g_1 - g_1' + g_2 - g_2' + \dots + g_h - g_h' .$$

Au premier membre on a une fonction analytique dans $|x| < R$ et au second membre une fonction analytique dans $|x| > R'$: ces deux fonctions coïncident dans la couronne $R' < |x| < R$. Elles sont donc identiques et définissent une fonction entière dans Ω , et nulle à l'infini : c'est la fonction identiquement nulle. D'où $g_0 \equiv g_0'$. Et de manière analogue $g_i \equiv g_i'$.

2.4. - Soit une série de Laurent $g(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ $(a_n \in \Omega)$ convergeant dans la couronne $R' < |x| < R$ et prolongeable, dans le disque $|x| \leqslant R'$, dans le complémentaire d'un disque $B_1 = \{x \in \Omega : |x - x_1| < R_1'$ (avec $|x_1| \leqslant R'$; $R_1' \leqslant R'$). On a les inégalités :

si $n < 0$: $|a_n| \leqslant r_1^{-n} \sup \{1 , (\frac{|x_1|}{r_1})^{-n-1}\} M_{x_1}(g , R_1)$ $\quad (R_1' < r_1 < R)$

(où $M_{x_1}(g , r_1) = \sup_{|x-x_1|=r_1} |g(x)|$).

Démonstration. - Elle est inutile dans le cas $|x_1| \leq R_1'$ car les disques B_1 et $\{x : |x| \leq R_1'\}$ coïncident. L'inégalité n'est autre que l'inégalité de Cauchy relative à a_{-1}. Dans le cas $|x_1| > R_1'$: la fonction $g(x)$ est analytique dans la couronne. $R_1' < |x - x_1| < R$. Elle est donc développable en série de Laurent en $(x - x_1)$ convergeant dans cette couronne. On démontre que ce développement se déduit de la série de Laurent en x en posant $x = x_1 + X$ et en réordonnant par rapport aux puissances de X :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (x_1 + X)^n = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n X^n .$$

Ce résultat est connu pour les puissances positives de X, et pour $n < 0$, on utilise l'égalité

$$b_n = a_n - \binom{-n-1}{1} x_1 a_{n+1} + \cdots + (-1)^k \binom{-n-k}{k} x_1^k a_{n+k} + \cdots + (-1)^{n-1} x_1^{-n-1} a_{-1}$$

d'où il résulte que la série $\sum_{n=-1}^{-\infty} b_n X^n$ a un rayon de convergence inférieur ou égal à celui de la série $\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n x^n$. On en déduit que les deux séries représentent la même fonction.

Les inégalités cherchées se déduisent des inégalités de Cauchy pour la série de Laurent en X.

2.5. - Des résultats 2.3 et 2.4 on déduit le lemme suivant :

LEMME. - Soit une série de Laurent $g(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ convergeant dans la couronne $R' < |x| < R$ de Ω et définissant une fonction analytique prolongeable, dans le disque $|x| \leq R'$, dans le complémentaire d'une lemniscate $B = B_1 \cup \cdots \cup B_h$ ($B_i = \{x \in \Omega : |x - x_i| \leq R_i'\}$, les disques B_i sont disjoints) on a l'inégalité, pour $n < 0$:

$$|a_n| \leq \sup_{i=1,2,\ldots,h} \{r_i^{-n} \sup\{1 , (\frac{|x_i|}{r_i})^{-n-1}\} M_{x_i}(g , r_i)\}$$

pour un système de réels r_i vérifiant : $R_i' < r_i < \inf_{j \neq i} |x_j - x_i|$.

Démonstration. - Avec les notations du § 2.3

$$\sum_{i=1}^{h} g_i(x) = \sum_{-\infty}^{-1} a_n x^n .$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{h} a_n^{(i)} = a_n \qquad (n < 0) .$$

En appliquant à $g_i(x)$ les résultats du § 2.4 :

$$|a_n^{(i)}| \leqslant r_i^n \sup \{1 , (\frac{|x_i|}{r_i})^{-n-1}\} M_{x_i}(g_i , r_i)$$

et d'après 2.3 :

$$|a_n^{(i)}| \leqslant r_i^n \sup \{1 , (\frac{|x_i|}{r_i})^{-n-1}\} M_{x_i}(g , r_i) .$$

L'inégalité $|a_n| \leqslant \sup_i |a_n^{(i)}|$ donne le résultat cherché.

2.6. Démonstration du théorème 2.1. – Par hypothèse $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{-n-1}$ est limite uniforme dans D d'une suite de fractions rationnelles ayant tous leurs pôles dans A .

D'après 1.4.6, quel que soit le réel positif η , il existe une lemniscate A contenant A et telle que $\tau(A) \leqslant \tau(A_\eta) \leqslant (1 + \eta)\ \tau(A)$. D'après 2.2, cette lemniscate est formée de la réunion d'un nombre fini h de disques circonférenciés disjoints B_i de rayon R_i' de centre x_i $(i = 1, 2 , \dots h)$. Par suite D_η , complémentaire de A_η, est quasi convexe. Les fractions rationnelles $f_j(x)$, qui convergent uniformément dans D vers $f(x)$, sont uniformément bornées dans D_η car : $\forall\ x \in D$, $y \in D_\eta$; $|x - y| \geqslant \inf_{i=1,\dots,h} R_i'$

$$\sup_{x\in D_\eta} |f_j(x)| \leqslant M_\eta \text{ , d'où } \sup_{x\in D_\eta} |f(x)| \leqslant M_\eta$$

$f(x)$ est bornée dans D_η .

Soit $T_n^\eta(x)$ (ou pour abréger $T_n(x)$) un polynôme de Čebičev de degré n de la lemniscate A_η , relatif à la valeur η (voir § 1.2) on a :

$$\sup_{x\in A_\eta} |T_n(x)| \leqslant (1 + \eta)\ \tau_n(A_\eta)$$

or pour $n > n_0(\eta)$; $\tau_n(A_\eta)^{1/n} \leqslant (1 + \eta)\ \tau(A_\eta) \leqslant (1 + \eta)^2\ \tau(A)$.

D'où

$$\sup_{x\in A_\eta} |T_n(x)| \leqslant (1 + \eta)^{2n+1}\ \tau(A)^n \quad \text{pour } n > n_0(\eta) .$$

Considérons un système $r_1 , \dots , r_h$ de réels tels que $R_i' < r_i < \inf_{j\neq i} |x_j - x_i|$.

Pour r_i suffisamment voisin de R_i' :

$$\sup_{|x-x_i|=r_i} |T_n(x)| \leqslant (1 + \eta) \sup_{|x-x_i|\leqslant R_i'} |T_n(x)|$$

on peut donc trouver un système (r_i) tel que l'inégalité précédente soit vérifiée pour $i = 1, 2, \ldots, h$. D'où

$$\sup_{\substack{|x-x_i|=r_i \\ i=1,2,\ldots,h}} |T_n(x)| \leq (1+\eta)^{2n+2} \tau(A)^n \qquad (\text{pour } n > n_0(\eta)) .$$

On considère le déterminant de Kronecker $D_n(f)$ et on le transforme par les combinaisons entre les lignes et les colonnes définies par les polynômes T_n (voir [4])

$$D_n(f) = \det(u_{h+k}) = \det(T_h(T_k(u_{h+k}))) \qquad 0 \leq h, \; k \leq n$$

$T_k(u_n)$ (avec $n \geq k$) désigne le coefficient de $x^{-(n+1-k)}$ de la série de laurent en x de $T_h(x)\, f(x)$. Par suite $T_h(T_k(u_{h+k}))$ <u>est le coefficient de</u> x^{-1} <u>de la série de Laurent en</u> x <u>de</u> $T_h(x)\, T_k(x)\, f(x)$.

D'après le lemme 2.5 :

$$|T_h(T_k(u_{h+k}))| \leq \sup_{i=1,2,\ldots h} r_i\, M_{x_i}(T_h\, T_k\, f, r_i) .$$

Comme

$$M_{x_i}(T_h\, T_k\, f, r_i) \leq M_\eta (1+\eta)^{2(h+k)+4} \tau(A)^{h+k}$$

pour le système (r_i) choisi et pour $h, k > n_0(\eta)$, on a, dans ces conditions :

$$|T_h(T_k(u_{h+k}))| \leq \rho\, M_\eta (1+\eta)^{2(h+k)+u} \tau(A)^{h+k}$$

avec $\rho = \sup_{j \neq i} |x_i - x_j|$.

Il existe donc une constante $c \geq \rho\, M_\eta (1+\eta)^4$ telle que, pour le système (r_i) choisi et quels que soient h et $k > 0$:

$$|T_h\, T_k(u_{h+k})| \leq c((1+\eta)^2 \tau(A))^{h+k}$$

on majore ensuite $|D_n(f)|$ sur son développement :

$$|D_n(f)| \leq \sup |V_{h_0,k_0}\, V_{h_1,k_1} \cdots V_{h_n,k_n}|$$

où $V_{h,k}$ désigne $T_h\, T_k(V_{h+k})$ et où $(h_0, \ldots, h_n)$ et $(k_0, \ldots, k_n)$ sont des permutations de $0, 1, 2, \ldots, n$.

D'où

$$|D_n(f)| \leq c^{n+1}((1+\eta^2)\, \tau(A))^{n(n+1)} \qquad n = 0, 1, 2 .$$

Il en résulte

$$\limsup_{n\infty} |D_n(f)|^{1/n^2} \leqslant (1+\eta^2)\ \tau(A) .$$

D'où le résultat cherché.

2.7. Exemples. - On a dans tous les cas $\tau(A_f)) \leqslant R(f) = \limsup |u_n|^{1/n}$

si $f(x) = \frac{1}{x} \exp x^{-1}$, on trouve $\tau(A) = p^{1/(p-1)} = R$.

si $f(x) = \mathrm{Log}\ (1-\frac{1}{x})^{-1}$, on trouve $\tau(A) = 1 = R$.

3. Application à une généralisation du théorème de Polya et Carlson [4].

3.1. THÉORÈME. - Soit une série de Taylor $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\ x^{-n-1}$ $(u_n \in Q)$ telle que $|u_n|_p \leqslant 1$ sauf pour un nombre fini de premiers p $(p \in P)$ on suppose que $f(x)$ est prolongeable dans le complémentaire D simplement connexe d'un ensemble borné A de C, et dans le complémentaire D_p quasi-connexe d'un ensemble borné A_p de Ω_p $(p \in P)$.

Si $\tau(A) \prod_{p\in P} \tau(A_p) < 1$, $f(x)$ est rationnelle.

Démonstration.

$$\limsup_{n\infty} |D_n(f)|^{1/n^2} \leqslant \tau(A)$$

$$\limsup_{n\infty} |D_n(f)|_p^{1/n^2} \leqslant \tau(A_p) \qquad \text{si } p \in P .$$

D'où

$$\limsup_{n\infty} (|D_n(f)| \prod_{p\in P} |D_n(f)|_p)^{1/n^2} \leqslant \tau(A) \prod_{p\in P} \tau(A_p) .$$

Il résulte de l'hypothèse $\tau(A) \prod_{p\in P} \tau(A_p) < 1$

$$|D_n(f)| \prod_{p\in P} |D_n(f)|_p < 1 \qquad \text{pour } n \text{ suffisamment grand } (n > n_0)$$

or $|D_n(f)|_p \leqslant 1$ pour $p \notin P$. Donc si $n > n_0$

$$|D_n(f)| \prod_{p} |D_n(f)|_p < 1 .$$

Il en résulte $D_n(f) = 0$ pour $n > n_0$.

Remarque. - Les ensembles A, A_p $(p \in P)$ étant fixés, tels que $\tau(A) \prod_{p\in A_p} \tau(A_p) < 1$, les pôles des fractions rationnelles $f(x)$ sont en nombre fini d'après le théorème 1.6.

3.2. - Le théorème 3.1 peut se généraliser en remplaçant le corps des rationnels Q par un corps Γ avec formule du produit des valuations [1].

Soit Γ un corps tel que l'on puisse définir sur Γ un ensemble de valuation $|\ |_p$ non triviales et non équivalentes telles que :

$$\prod_p |x|_p = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \qquad \text{pour tout } x \in \Gamma .$$

THÉORÈME. - Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{-n-1}$ $(u_n \in \Gamma)$ une série de Taylor telle que $|u_n|_p \leqslant 1$ sauf pour un ensemble fini P de valuation p_i. On suppose que, pour $p_i \in P$, $f(x)$ est prolongeable comme fonction analytique uniforme, dans Ω_{p_i}, dans le complémentaire d'un ensemble borné A_{p_i} si $\prod_{p_i \in P} \Gamma(A_{p_i}) < 1$, $f(x)$ est rationnelle.

Ω_{p_i} désigne la complétion de la clôture algébrique de Γ_{p_i} (si la valuation p_i est archimédienne, Ω_{p_i} est le corps des complexes $\mathfrak{C}$).

La démonstration est analogue à la précédente.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN (Emil). - Algebraic numbers and algebraic functions. - Princeton, Princeton University, 1951 (multigr.).

[2] FEKETE (M.). - Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, Math. Z., t. 17, 1923, p. 228-249.

[3] KRASNER (Marc). - Prolongement analytique dans les corps valués complets : éléments analytiques, préliminaires du théorème d'unicité, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 239, 1954, p. 468-470 ; démonstration de la loi d'unicité : fonctions analytiques uniformes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 239, 1954, p. 745-747.

[4] POLYA (G.). - Über gewisse notwendige Determinantenkriterien für die Fortsetzbarkeit einer Potenzreihen, Math. Annalen, t. 99, 1928, p. 687-706.