Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

François Dress

Formule d'inversion et fonction de Möbius sur les ensembles ordonnés

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 5 (1963-1964), exp. n° 16, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1963-1964__5__A10_0>

Séminaire DELANGE-PISOT
(Théorie des nombres)
5e année, 1963/64, n° 16

20 avril 1964

FORMULE D'INVERSION ET FONCTION DE MÖBIUS
SUR LES ENSEMBLES ORDONNÉS

par François DRESS

Introduction.

La notion de fonction de Möbius sur un treillis fini, ainsi que la formule d'inversion, ont été introduites par WEISNER ([5]) en 1935 et HALL ([2]) en 1936 lors de leurs recherches sur les sous-groupes d'un groupe d'ordre une puissance de nombre premier.

Cet exposé fait l'analyse de la partie théorique d'un article à paraître de Gian-Carlo ROTA ([4]), les applications étant plutôt du domaine de la théorie des graphes.

1. Notions préliminaires.

P , Q , ... désigneront des ensembles munis d'une relation d'ordre partiel, notée $\leqslant$. P^* , Q^* , ... désigneront les mêmes ensembles, munis de l'ordre inverse.

Pour $x , y \in P$, le segment $[x , y]$ représentera l'ensemble des éléments de P compris entre x et y :

$$[x , y] = \{p ; \quad p \in P , \quad x \leqslant p \leqslant y\} .$$

P sera dit localement fini si tout segment $[x , y]$ est fini. Dans tout cet exposé, il ne sera considéré d'ensembles ordonnés que localement finis.

Le produit $P \times Q$ sera défini comme l'ensemble des couples (p , q) , $p \in P$, $q \in Q$, avec l'ordre habituel :

$$(p , q) \leqslant (r , s) \iff p \leqslant r \quad \text{et} \quad q \leqslant s .$$

S'il existe dans P un élément minimal unique, on le notera 0 , un élément maximal unique, on le notera U . On rappelle les notions d'élément couvrant un autre élément, d'atome et d'atome dual.

Une relation de fermeture dans P ordonné sera une fonction $p \to \bar{p}$ de P dans P , possédant les trois propriétés suivantes :

a) $\bar{p} \geqslant p$;
b) $\bar{\bar{p}} = \bar{p}$;
c) $p \leqslant q \implies \bar{p} \leqslant \bar{q}$.

On définira enfin une <u>connection de Galois</u> entre P et Q ordonnés, comme étant un couple de fonctions $\varphi : P \to Q$ et $\psi : Q \to P$ satisfaisant à :

a) φ et ψ inversent les ordres ;

b) $\forall\, p \in P$, $\psi[\varphi(p)] \geqslant p$ et $\forall\, q \in Q$, $\varphi[\psi(q)] \geqslant q$.

Remarquons que, sous ces conditions, les applications $p \to \psi[\varphi(p)]$ et $q \to \varphi[\psi(q)]$ sont des relations de fermeture.

2. L'algèbre d'incidence.

On considère P ordonné localement fini. L'algèbre d'incidence de P est formée des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) $f(x , y)$, $x , y \in P$, ayant la propriété $f(x , y) = 0$ si $x \nleqslant y$.

La somme de deux fonctions et la multiplication par un scalaire sont définies comme d'ordinaire.

Le produit $f.g = h$ est défini par

$$h(x , y) = \sum_{x \leqslant p \leqslant y} f(x , p)\, g(p , y) ,$$

somme finie, car P est localement fini. On vérifiera aisément que ce produit est associatif.

Cette algèbre possède un élément-unité, $\delta(x , y)$, δ symbole de Kronecker. La fonction zêta, $\zeta(x , y)$, est la fonction de l'algèbre d'incidence telle que $\zeta(x , y) = 1$, $\forall\, x , y$, $x \leqslant y$. On définit enfin la fonction d'incidence, $i(x , y)$, par $i = \zeta - \delta$.

3. La fonction de Möbius.

PROPOSITION 3.1. - La fonction zêta est inversible dans l'algèbre d'incidence.

La fonction inverse, $\mu(x , y)$, appelée fonction de Möbius, est aisément calculable par récurrence :

$$\mu(x , x) = 1 , \qquad \forall\, x \in P ,$$

et, si on connaît $\mu(x , p)$, $\forall\, p \in [x , y[$, $\mu.\zeta = \delta$ donne

$$\mu(x , y) = - \sum_{x \leqslant p < y} \mu(x , p) .$$

On vérifiera aisément que μ ainsi définie vérifie $\zeta.\mu = \delta$.

PROPOSITION 3.2 (<u>Formule d'inversion de Möbius</u>). - Soit $f(x)$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) définie sur P localement fini, et supposons qu'il existe $z \in P$ tel que $f(x) = 0$ si $z \not\leq x$. Alors :

$$F(x) = \sum_{p \leq x} f(p) \implies f(y) = \sum_{x \leq y} F(x)\ \mu(x , y) .$$

Démonstration. - Posons $g(z , p) = \zeta(z , p)\ f(p)$. D'où $F(x) = g.\zeta(z , x)$. On a alors :

$$\sum_{x \leq y} F(x)\ \mu(x , y) = g.\zeta.\mu(z , y) = g(z , y) = f(y) .$$

COROLLAIRE. - Soit $f(x)$ une fonction définie sur P , et supposons qu'il existe $z \in P$ tel que $f(x) = 0$ si $x \not\leq z$. Alors :

$$F(x) = \sum_{p \geq x} f(p) \implies f(y) = \sum_{x \geq y} \mu(y , x)\ F(x) .$$

PROPOSITION 3.3 (Dualité). - Soient μ et μ^* les fonctions de Möbius de P et de P^* . Alors :

$$\mu^*(x , y) = \mu(y , x) .$$

Démonstration. - μ^* satisfait à $\mu^*.\zeta^* = \delta^*$, soit :

$$\sum_{x \geq y \geq z} \mu^*(x , y) = \delta^*(x , z) = \delta(x , z) ,$$

mais

$$\sum_{z \leq y \leq x} \mu(y , x) = \delta(z , x) = \delta(x , z) ;$$

comme l'inverse de ζ dans P est unique, $\mu^*(x , y) = \mu(y , x)$.

PROPOSITION 3.4. - La fonction de Möbius sur un segment quelconque $[x , y]$ de P , est égale à la restriction à $[x , y]$ de la fonction de Möbius sur P .

C'est cette proposition qui explique que, dans la suite, on calculera toujours la fonction $\mu(0 , U)$ pour un ensemble ordonné admettant un 0 et un U .

PROPOSITION 3.5. - Soit $P \times Q$ le produit direct de P par Q , ordonnés localement finis. Alors, la fonction de Möbius sur $P \times Q$ est :

$$\mu[(x , y) , (u , v)] = \mu(x , u)\ \mu(y , v) .$$

Démonstration. - Immédiate, en remarquant que

$$\zeta_{P\times Q} = \zeta_P\ \zeta_Q \qquad \text{et} \qquad \delta_{P\times Q} = \delta_P\ \delta_Q .$$

COROLLAIRE. - Soit P l'algèbre de Boole des sous-ensembles d'un ensemble fini de n éléments. Alors :

$$\mu(x , y) = (-1)^{\sigma(y)-\sigma(x)} .$$

Démonstration. - $[x , y]$ est isomorphe à l'algèbre de Boole B des sous-ensembles d'un ensemble fini de $\sigma(y) - \sigma(x)$ éléments, car $x \subseteq y$. Mais B (qui possède 2^m éléments) est isomorphe au produit de m chaînes de 2 éléments. Donc $\mu_B(0 , U) = (-1)^m$.

On pourrait retrouver ce résultat par la définition directe donnée pour la proposition 3.1 :

$$\mu(0 , U) = - \sum_{p<U} \mu(0 , p) = - \sum_{k=0}^{k=m-1} (-1)^k C_m^k = (-1)^m .$$

PROPOSITION 2.6 (HALL). - Soit P un ensemble ordonné fini possédant un 0 et un U. Soit λ_k le nombre de chaînes de longueur k (donc ayant $k+1$ éléments) reliant 0 à U. Alors :

$$\mu(0 , U) = \lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \dots .$$

LEMME. - $i^k(x , y)$ représente le nombre de chaînes de longueur k reliant x à y.

Démonstration du lemme. - La propriété est vraie pour $k = 1$: $i(x , y) = 1$ si $x < y$. D'autre part, il y a correspondance biunivoque entre les chaînes $(x , \dots , p , y)$ de longueur $k+1$ et les chaînes $(x, \dots , p)$ de longueur k; d'où :

$$\lambda_{k+1}(x , y) = \sum_{x \leq p < y} i^k(x , p) = \sum_{x \leq p \leq y} i^k(x , p)\, i(p , y) = i^{k+1}(x , y) .$$

Démonstration de la proposition 2.6. -

$$\mu = \zeta^{-1} = (\delta + i)^{-1} = \delta - i + i^2 - \dots + (-1)^N i^N ,$$

car $i^{N+k} \equiv 0$ si N est la plus grande longueur des chaînes reliant 0 à U dans P (fini).

Il est à remarquer que, dans la pratique $(0 \neq U)$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$, d'où

$$\mu(0 , U) = -1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \dots .$$

4. Quelques exemples.

La fonction de Möbius classique. - $P = \underset{\sim}{N}$, où $a \leq b$ est défini par $a | b$.

Dans ce cas, il existe une sous-algèbre distinguée $f(x , y) = f(\frac{y}{x})$ dont font partie les fonctions δ , ζ , μ. On retrouve la formule d'inversion classique (MÖBIUS, 1832).

Il est à noter que la correspondance entre le produit (au sens de l'algèbre d'incidence) dans cette sous-algèbre distinguée et le produit (usuel) des séries formelles de Dirichlet associées, ne paraît avoir été l'objet d'aucune généralisation.

Les entiers $\underset{\sim}{Z}$ avec l'ordre naturel. - Ici, $\mu(m, n) = 1$ si $n = m$, $= -1$ si $n = m + 1$, $= 0$ dans les autres cas. La formule d'inversion devient :

$$F(n) = \sum_{0}^{n} f(k) \ ; \qquad f(n) = F(n) - F(n-1) \ .$$

Cet exemple montre que l'algèbre d'incidence permet de développer le calcul des différences finies sur un ensemble partiellement ordonné.

Les treillis distributifs. - Voir le § 6.

Les sous-espaces d'un espace vectoriel fini. - Voir le § 8.

Les sous-groupes d'un groupe. - Un aperçu sur cet exemple serait trop long à développer ici. Voir [1] et [2].

5. Premier théorème fondamental.

On verra que, les fonctions de Möbius de deux ensembles ordonnés peuvent être comparées, en un certain sens, lorsque ces deux ensembles sont en connection de Galois. En prenant fixe l'un des ensembles, et en faisant varier l'autre parmi des structures plus simples (algèbres de Boole, sous-espaces vectoriels finis, partitions, etc.), on pourra en déduire des informations relatives à la fonction de Möbius sur le premier ensemble.

THÉORÈME A. - Soient P et Q deux ensembles ordonnés ; P possédant un 0, et Q un 0 et un U ; et soient μ_P et μ_Q leurs fonctions de Möbius respectives. Soit $\varphi : P \to Q$ et $\psi : Q \to P$ une connection de Galois possédant les propriétés suivantes :

1° $\varphi(0) = U$;

2° $\psi(x) = 0 \Longleftrightarrow x = U$.

Alors :

$$\mu_Q(0, U) = \sum_{p>0} \mu_P(0, p)\, \delta_Q[0, \varphi(p)] = \sum_{p\in\varphi^{-1}(0)} \mu_P(0, p) \ .$$

LEMME. -

$$\sum_{a\geq b} \delta_P[\psi(x), a] = \zeta_Q[x, \varphi(b)] \ , \qquad \forall\ b \in P \ .$$

Démonstration du lemme. - La formule écrite ci-dessus équivaut à

$$\psi(x) \geqslant b \iff x \leqslant \varphi(b) ,$$

qui est une conséquence directe de la connection de Galois :

$$\psi(x) \geqslant b \quad \text{entraîne} \quad x \leqslant \varphi[\psi(x)] \leqslant \varphi(b) ,$$

$$x \leqslant \varphi(b) \quad \text{entraîne} \quad \psi(x) \geqslant \psi[\varphi(b)] \geqslant b .$$

Démonstration du théorème A. - Appliquons, à la formule du lemme, la formule d'inversion de Möbius (forme corollaire). Il vient :

$$\delta_P[\psi(x) , 0] = \sum_{p\geqslant 0} \mu_P(0 , p) \zeta_Q[x , \varphi(p)] .$$

Mais $\delta_P[\psi(x) , 0]$ n'est non nul que si $\psi(x) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x = U$, d'où :

$$\delta_P[\psi(x) , 0] = 1 - i_Q(x , U) .$$

On a alors, en isolant dans le second membre de l'égalité du début $\mu_P(0 , 0) \zeta_Q[x , \varphi(0)] = \zeta_Q(0 , U) = 1$:

$$1 - i_Q(x , U) = 1 + \sum_{p>0} \mu_P(0 , p) \zeta_Q[x , \varphi(p)] .$$

On a enfin $\zeta = \delta + i$, d'où $\mu.\zeta = \mu.\delta + \mu.i$, ce qui donne $\mu = \delta - \mu.i$, d'où :

$$\mu_Q(0 , U) = \delta(0 , U) - \sum_{0\leqslant x\leqslant U} \mu_Q(0 , x) i_Q(x , U) ,$$

soit, en reportant la valeur trouvée plus haut pour i_Q :

$$\begin{aligned}\mu_Q(0 , U) &= \sum_{0\leqslant x\leqslant U} \sum_{p>0} \mu_Q(0 , x) \mu_P(0 , p) \zeta_Q[x , \varphi(p)] \\ &= \sum_{p>0} \mu_P(0 , p) \sum_{0\leqslant x\leqslant U} \mu_Q(0 , x) \zeta_Q[x , \varphi(p)] \\ &= \sum_{p>0} \mu_P(0 , p) \delta_Q[0 , \varphi(p)] ,\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.

Pour la commodité des applications, on peut donner une autre forme de ce théorème, en inversant l'ordre dans P :

COROLLAIRE. - Soient $\rho : P \to Q$ et $\pi : Q \to P$ deux fonctions conservant l'ordre et telles que :

$$\rho[\pi(x)] \geqslant x \quad \text{et} \quad \pi[\rho(y)] \geqslant y ;$$

de plus, elles possèdent les propriétés suivantes :

1° $\rho(U) = U$;

2° $\pi(x) = U \iff x = U$.

Alors :

$$\mu_Q(0\ ,\ U) = \sum_{p<U} \mu_P(p\ ,\ U)\ \zeta_Q[\rho(p)\ ,\ 0] = \sum_{p\in\rho^{-1}(0)} \mu_P(p\ ,\ U)\ .$$

6. Applications du théorème A.

PROPOSITION 6.1. - Soit L un treillis fini possédant un 0 et un U , et soit $R \subset L$ et possédant les propriétés suivantes : $U \notin R$, et $\forall\, x\ (\neq U) \in L$, $\exists\, y \in R$ tel que $x \leqslant y$. Pour $k \geqslant 1$, soit q_k le nombre de sous-ensembles de R contenant k éléments et dont l' inf soit 0 . Alors :

$$\mu_L(0\ ,\ U) = -\ q_1 + q_2 - q_3 + q_4 - \dots\ .$$

Démonstration. - Soit $B(R)$ le treillis de Boole des sous-ensembles de R . On établit la connection de Galois suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Soit } A \in B(R)\text{ . On définit} \\ \qquad \varphi\ .\ B(R) \to L \quad \text{par} \quad \varphi(A) = \inf\ (A) \quad (\text{avec } \inf \emptyset = U\ ). \\ \text{Soit } x \in L\text{ . On définit} \\ \psi\ :\ L \to B(R) \quad \text{par} \quad \psi(x) = \{y \mid y \in R\ ,\ x \leqslant y\} \quad (\text{en particulier } \psi(U) = \emptyset\ ). \end{array}\right.$$

On vérifiera aisément que, d'une part, on a bien là une connection de Galois, et que, d'autre part, elle possède les deux propriétés énoncées dans le théorème A.

Alors (proposition 3.5, corollaire),

$$\mu_{B(R)}(\emptyset\ ,\ A) = (-\ 1)^{\sigma(A)}\ ,$$

d'où (théorème A) :

$$\mu_L(0\ ,\ U) = \sum_{A\in\varphi^{-1}(0)} \mu_{B(R)}(\emptyset\ ,\ A)$$

$$= \sum_{\substack{A \text{ tel que} \\ \inf A = 0}} (-\ 1)^{\sigma(A)} = \sum_k (-\ 1)^k\ q_k\ .$$

Deux cas particuliers intéressants peuvent être obtenus en prenant pour R , soit l'ensemble des atomes duaux de L , soit $L - \{U\}$.

PROPOSITION 6.2. - Soit $x \to \overline{x}$ une relation de fermeture sur Q ordonné et possédant un U, avec la propriété $\overline{x} = U \iff x = U$. Et soit P l'ensemble ordonné de tous les fermés. Alors :

$$\text{si } \overline{x} > x, \quad \mu_Q(x, U) = 0 ;$$
$$\text{si } \overline{x} = x, \quad \mu_Q(x, U) = \mu_P(x, U) .$$

Démonstration. - En vue d'appliquer le corollaire du théorème A, on définit les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} \rho : \ P \to Q & \text{par} \quad \rho(\overline{x}) = \overline{x} \\ \pi : \ Q \to P & \text{par} \quad \pi(x) = \overline{x} \end{cases}$$

dont on vérifiera aisément qu'elles satisfont aux conditions imposées. On peut alors réduire Q au segment $[x, U]$, donc P à $[\overline{x}, U]$. D'où :

$$\mu_Q(x, U) = \mu_{[x,U]}(x, U) = \sum_{p \in \rho^{-1}(x)} \mu_{[\bar{x},U]}(p, U) .$$

Or, $p \in \rho^{-1}(x)$ désigne l'ensemble des $p \in P$ tels que $p = \bar{x} = x$. Cet ensemble est vide si $\bar{x} > x$, et réduit à x si $\bar{x} = x$.

Exemple des treillis distributifs (localement finis). - Soit L un treillis distributif. Pour calculer $\mu(x, y)$, on restreint L à $[x, y]$, qui est alors fini.

Pour $a \in L$, soit $\bar{a} = \sup\{p \mid p \text{ atome de } L, \ p \leqslant a\}$. $\bar{a} \lessapprox a$, et on définit ainsi une relation de fermeture dans L^*. Mais on peut montrer (quoique cela sorte du cadre de cet exposé) que $\overline{L}^*$, ensemble des fermés, est isomorphe à un treillis de Boole (fini).

D'où, par application des propositions 3.5 (corollaire) et 6.2, on obtient :

$$\mu(x, y) = 0 \qquad \text{si } y \neq \sup \text{ des éléments couvrant } x ;$$
$$\mu(x, y) = (-1)^n \qquad \text{si } y = \sup \text{ de } n \text{ éléments couvrant } x .$$

On retrouve ainsi, en particulier, l'expression de la fonction de Möbius classique sur $\underset{\sim}{N}$ ordonné par la divisibilité.

7. Deuxième théorème fondamental.

THÉORÈME B. - Soient P et Q deux ensembles ordonnés possédant chacun un 0. Soit $\pi : Q \to P$ une fonction monotone de Q vers P. On suppose que l'image inverse de chaque intervalle $(0, a) \subseteq P$ est un intervalle $(0, x) \subseteq Q$, et que l'image inverse de $0 \in P$ contient au moins deux points.

Alors :

$$\sum_{x \in \pi^{-1}(a)} \mu_Q(0\ ,\ x) = 0\ .$$

Démonstration. - Elle s'effectue par récurrence dans P . $\pi^{-1}[0\ ,0] = [0\ ,q]$, $q > 0$, donc :

$$\sum_{x \in \pi^{-1}(0)} \mu_Q(0\ ,\ x) = \sum_{0 \leqslant x \leqslant q} \mu_Q(0\ ,\ x) = 0\ .$$

Si maintenant on suppose le théorème vrai $\forall\ b < a$ dans P , il vient :

$$\sum_{b<a} \ \sum_{x \in \pi^{-1}(b)} \mu_Q(0\ ,\ x) = 0\ ,$$

d'où :

$$\sum_{x \in \pi^{-1}(a)} \mu_Q(0\ ,\ x) = \sum_{b \leqslant a} \ \sum_{x \in \pi^{-1}(b)} \mu_Q(0\ ,\ x)$$

$$= \sum_{x \in [0,r] = p^{-1}[0,a]} \mu_Q(0\ ,\ x) = \delta_Q(0\ ,\ r)$$

qui est nul car $a > 0$ entraîne $r > 0$.

Ce second théorème a été suggéré par une technique qui reviendrait à RAMANUJAN (cf. [3]).

8. Applications du théorème B.

PROPOSITION 8.1. - Soit $a \to \bar{a}$ une relation de fermeture sur un treillis fini Q , avec les propriétés :

1° $\overline{\sup\ (a\ ,\ b)} = \sup\ (\bar{a}\ ,\ \bar{b})$;

2° $\bar{0} > 0$.

Alors, $\forall\ a \in Q$, on a :

$$\sum_{\substack{x \text{ tel que} \\ \bar{x} = a}} \mu_Q(0\ ,\ x) = 0\ .$$

Démonstration. - Soient P l'ensemble des éléments fermés de Q , et $\pi : Q \to P$ défini par $\pi(x) = \bar{x}$. La première propriété requise permet de démontrer que :

$$x \leqslant y \iff \sup\ (x\ ,\ y) = y \iff \sup\ (\bar{x}\ ,\ \bar{y}) = \bar{y} \iff \bar{x} \leqslant \bar{y}\ .$$

On déduit de là que $\pi^{-1}[\bar{0}\ ,\ \bar{a}] = [0\ ,\ \bar{a}]$. Et comme $\bar{0} > 0$, $\pi^{-1}[\bar{0}] = [0\ ,\ \bar{0}]$, intervalle non trivial.

Les conditions du théorème B sont alors satisfaites.

COROLLAIRE (WEISNER). -
(a) Soit $a > 0 \in L$ treillis fini. $\forall\, b \in L$,

$$\sum_{\sup(x,a)=b} \mu(0\ ,\ x) = 0\ .$$

(b) Soit $a < U \in L$ treillis fini. $\forall\, b \in L$,

$$\sum_{\inf(x,a)=b} \mu(x\ ,\ U) = 0\ .$$

<u>Démonstration</u>. - Pour (a), on pose $\bar{x} = \sup(x\ ,\ a)$. Et pour (b), on inverse l'ordre.

<u>Exemple des sous-espaces d'un espace vectoriel</u> V <u>de dimension finie</u> n <u>sur un corps fini à</u> q <u>éléments</u> (HALL). $L(V)$ sera le treillis des sous-espaces de V .

Dans ce treillis $L(V)$, chaque segment $[x\ ,\ y]$, $x \leq y$, est isomorphe au treillis $L(W)$, où W est l'espace quotient de y par x . Soit $\mu_n = \mu_n(q)$ la valeur de $\mu(0\ ,\ U)$ sur $L(V)$, alors $\mu(x\ ,\ y) = \mu_j$, où j est la dimension de l'espace quotient W .

Considérons maintenant un sous-espace a de dimension $n - 1$. D'après la proposition 8.1 (corollaire), on a

$$\sum_{\inf(x,a)=0} \mu(x\ ,\ U) = 0\ ,$$

0 désignant naturellement le 0-sous-espace. Quels sous-espaces possèdent la propriété $\inf(x\ ,\ a) = 0$? Les droites, et les droites disjointes d'avec a sauf en l'origine.

Le sous-espace a , de dimension $n - 1$, contenant q^{n-1} points distincts, il reste $q^n - q^{n-1}$ points hors de a . Chaque droite contenant $q - 1$ points hors de l'origine, il y a donc $\frac{q^n - q^{n-1}}{q - 1} = q^{n-1}$ droites distinctes x telles que $\inf(x\ ,\ a) = 0$.

Comme chaque intervalle $[x\ ,\ U]$ est isomorphe à un sous-espace de dimension $n - 1$, on obtient :

$$\mu_n = \mu(0\ ,\ U) = -\sum_{\substack{\inf(x,a)=0 \\ x \neq 0}} \mu(x\ ,\ U) = -\, q^{n-1}\, \mu_{n-1}\ ,$$

d'où :

$$\mu_n(q) = (-1)^n q^{n(n-1)/2} = (-1)^n q^{C_n^2} .$$

9. Coupures dans un treillis fini.

On peut trouver des résultats plus fins en utilisant le théorème A, l'ensemble de comparaison étant un treillis de Boole (proposition 6.1).

DÉFINITIONS. - Une coupure dans un treillis L est un sous-ensemble $C \subset L$ possédant les propriétés suivantes :

1° $0 \notin C$, $U \notin C$.

2° Deux éléments de C ne sont jamais comparables.

3° Toute chaîne reliant 0 à U rencontre C (en un seul point d'après le 2°).

Un sous-ensemble extensif $E \subseteq L$ est un sous-ensemble tel que $\inf E = 0$ et $\sup E = U$.

THÉORÈME C. - Soit μ la fonction de Möbius d'un treillis fini L non trivial, et soit C une coupure dans L . Pour $k \geqslant 2$, soit q_k le nombre de sous-ensembles extensifs de C possédant k éléments. Alors :

$$\mu(0 , U) = q_2 - q_3 + q_4 - \dots .$$

Démonstration. - Elle s'effectue par récurrence sur la distance de C à l'élément U .

On définit la distance d_U ($= d$ pour simplifier les notations) ainsi :

$$\begin{cases} d(x) = \text{longueur maximale d'une chaîne reliant } x \text{ à } U \text{ (par exemple} \\ \qquad d\text{ (atome dual)} = 1 \text{) ;} \\ d(C) = \max\limits_{x \in C} d(x) . \end{cases}$$

L'ensemble des atomes duaux est une coupure C , et $d(C) = 1$; inversement, c'est la seule coupure C telle que $d(C) = 1$. D'après la proposition 6.1, le théorème est donc vrai pour $d(C) = 1$ (car L est non-trivial, ce qui entraîne $q_1 = 0$).

Supposons maintenant le théorème vrai pour toutes les coupures C telles que $d(C) < n$. On posera $x \leqslant C$ ou $x > C$ suivant qu'il existe un $y \in C$ tel que $x \leqslant y$ ou $x > y$; si C est une coupure, ces deux possibilités s'excluent mutuellement.

Etant donnée une coupure C , $d(C) = n$, on définit un nouveau treillis L' ainsi :

$$L' = \{x \mid x \leqslant C\} \cup \{U'\} ,$$

U' couvrant les éléments de C ; si μ' est la fonction de Möbius de L' , il vient, en appliquant la proposition 6.1 :

$$\mu'(0 , U') = p_2 - p_3 + p_4 - \dots$$

où p_K' est le nombre de sous-ensembles $A \subseteq C$ tels que $\inf A = 0$. On a d'autre part, pour les treillis L et L' :

$$0 = \sum_{x \leqslant C} \mu(0 , x) + \sum_{x \not\leqslant C} \mu(0 , x) = \sum_{x \leqslant C} \mu'(0 , x) + \mu'(0 , U') ;$$

mais, pour $x \leqslant C$, $\mu'(0 , x) = \mu(0 , x)$ par construction de L' , d'où :

$$\sum_{x \leqslant C} \mu(0 , x) = - \sum_{x > C} \mu(0 , x) = - \mu'(0 , U') = - p_2 + p_3 - p_4 + \dots .$$

On a d'autre part :

$$\mu(0 , U) = - \sum_{x < U} \mu(0 , x) = - \sum_{x \leqslant C} \mu(0 , x) - \sum_{C < x < U} \mu(0 , x)$$

$$= (p_2 - p_3 + p_4 - \dots) - \sum_{C < x < U} \mu(0 , x) .$$

Si on pose maintenant $q_k(x)$ le nombre de sous-ensembles E de C possédant k éléments et tels que $\inf E = 0$ et $\sup E = x$ (en particulier $q_k(U) = q_k$), on a :

$$p_k = \sum_{x > C} q_k(x) ,$$

d'où :

$$\mu(0 , U) = (q_2 - q_3 + q_4 - \dots) + \sum_{C < x < U} X$$

avec $X = [q_2(x) - q_3(x) + q_4(x) - \dots] - \mu(0 , x)$.

La démonstration se termine en montrant que $X = 0$, $\forall x$. Pour cela, il faut montrer que $C(x) = C \cap [0 , x]$ est une coupure dans $[0 , x]$ et que $d_x(C(x)) < n = d_U(C)$.

Les deux premières propriétés des coupures sont satisfaites. Et s'il existait une chaîne reliant 0 à x et ne rencontrant pas $C(x)$, il suffirait de la prolonger de x à U pour obtenir une chaîne reliant 0 à U et ne rencontrant ni $C(x)$ (par construction), ni $C - C(x)$ (car $x > C$), donc ne rencontrant pas C , ce qui est impossible.

Enfin, si on avait $d(C(x)) \geqslant n$, on pourrait trouver une chaîne reliant C à x et de longueur $\geqslant n$, donc en déduire une chaîne reliant C à U et de longueur $\geqslant n + 1$, ce qui est en contradiction avec $d(C) = n$.

Application. - Quand L possède une coupure "étroite" ou col, un petit nombre seulement de valeurs de $\mu(0 , U)$ sont possibles.

$$\sigma(C) = 1 \implies \mu(0 , U) = 0$$
$$\sigma(C) = 2 \implies \mu(0 , U) = 0 \text{ ou } 1$$
$$\sigma(C) = 3 \implies \mu(0 , U) = -1 , 0 , 1 \text{ ou } 2$$

etc.

Signalons enfin un dernier résultat dont la démonstration, simple mais longue, a été omise afin de ne pas alourdir cet exposé :

PROPOSITION 9.1. - Soit C une coupure dans un treillis fini L . Pour $k \geqslant 1$ et $A \subseteq C$, soit $q(A)$ le nombre de sous-ensembles extensifs $E \supseteq A$. On pose $S_k = \sum_{\substack{A \subseteq C \\ \sigma(A)=k}} q(A)$ et $S_0 = \sigma(C)$. Alors :

$$\mu(0 , U) = S_0 - 2S_1 + 2^2 S_2 - 2^3 S_3 + \dots .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] DELSARTE (S.). - Fonctions de Möbius sur les groupes abéliens finis, Annals of Math., Series 2, t. 49, 1948, p. 600-609.

[2] HALL (Philip). - The Eulerian functions of a group, Quart. J. of Math., Oxford Series, t. 7, 1936, p. 134-151.

[3] HARDY (G. H.). - Ramanujan. - Cambridge, at the University Press, 1940 ; New York, Chelsea publishing Company, 1959.

[4] ROTA (Gian-Carlo). - Combinatorial theory and Möbius functions, Amer. math. Monthly (à paraître).

[5] WEISNER (L.). - Abstract theory of inversion of finite series, Trans. Amer. math. Soc., t. 38, 1935, p. 474-484.