PAUL MALLIAVIN

Sur une propriété asymptotique des fonctions de diviseurs

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 4 (1962-1963), exp. nº 6, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1962-1963__4__A5_0>

SUR UNE PROPRIÉTÉ ASYMPTOTIQUE DES FONCTIONS DE DIVISEURS

par Paul MALLIAVIN

Notant $\zeta(s)$ avec $s = \sigma + it$ la fonction de Riemann, on désigne par $d_k(n)$ les coefficients de $\zeta^k(s)$

$$\zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_k(n)\ n^{-s}$$

si k est entier > 0, $d_k(n)$ est égal au nombre de manières distinctes d'exprimer n comme le produit de k entiers. Les propriétés des fonctions de diviseurs sont intimement liées à la répartition asymptotique des nombres premiers. On se propose ici d'établir l'équivalence de l'hypothèse de Riemann avec l'évaluation asymptotique d'une certaine somme associée aux $d_k(n)$.

Posons

$$A_{k,\sigma} = \sum_n d_k^2(n)\ n^{-2\sigma} \qquad \sigma > \frac{1}{2}$$

$$K(t) = \frac{2^t}{it} \int_0^{+\infty} W^{-t} \frac{J_0'(iW)}{J_0(iW)}\, dW$$

où J_0 désigne la fonction de Bessel d'ordre zéro.

On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME. - <u>L'hypothèse de Riemann est équivalente au fait que, quel que soit</u> $\varepsilon > 0$ <u>et quel que soit</u> $\sigma > \frac{1}{2}$ <u>fixés, on ait</u> $k \to +\infty$

$$\log A_{k,\sigma} = \int_1^{\sigma^{-1}} k^{\xi}\, K(\xi)\, d\xi + O(k^{1+\varepsilon}) . \tag{1}$$

On déduit immédiatement de ce théorème le corollaire suivant.

COROLLAIRE. - <u>Supposons que quel que soit</u> $\varepsilon > 0$, <u>on ait</u>

$$\frac{2}{A_{k,\sigma}} \sum_n d_k^2(n) n^{-2\sigma} \log n = \frac{1}{\sigma^2} K\left(\frac{1}{\sigma}\right) k^{1/\sigma} + O(k^{1+\varepsilon})$$

<u>estimée uniforme en</u> $\sigma \geq \sigma_0 > \frac{1}{2}$, $k \to +\infty$, <u>alors l'hypothèse de Riemann est satisfaite.</u>

Nous allons, pour démontrer le théorème, interpréter $A_{k,\sigma}$ comme une norme L_2 sur un groupe de Bohr.

Posons

$$j(u) = \log[\int_0^{2\pi} e^{u \cos \theta} \frac{d\theta}{2\pi}] .$$

Notons par $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers $\leq x$. On a

LEMME 1. - <u>Soit</u> $\sigma_0 > \frac{1}{2}$ <u>fixé, alors on a uniformément en</u> $\sigma \geq \sigma_0$ $k \to +\infty$

(2) $$\log A_{k,\sigma} = \int_0^{+\infty} j(2kt^{-\sigma})\, d\pi(t) + O(k) .$$

<u>Preuve</u>. - Soit Q^* le groupe multiplicatif des rationnels > 0, Q^* étant muni de la topologie discrète, G notera le groupe compact dual de Q^*. Si $g \in G$, $r \in Q^*$, on notera $g(r)$ l'accouplement de la dualité. On pose

$$\zeta_\sigma(g) = \sum_{n=1}^{+\infty} g(n)\, n^{-\sigma} .$$

Alors on a

$$A_{k,\sigma} = \int_G |\zeta_\sigma(g)|^{2k}\, dg \qquad \sigma > \frac{1}{2} .$$

D'autre part, si $\sigma > \frac{1}{2}$, le produit d'Euler converge presque partout en $g \in G$. On a ainsi

$$\zeta_\sigma(g) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-\sigma}\, g(p)}$$

presque partout et

$$A_{k,\sigma} = \int_G [\prod_p |1 - p^{-\sigma}\, g(p)|^{-2k}]\, dg .$$

Les nombres premiers p constituant un système de générateurs de Q^*, tout élément $g \in G$ s'écrit

$$g = \prod_p g_p$$

où g_{p_0} est défini par $g_{p_0}(p_0) = g(p_0)$, $g_{p_0}(p) = 1$ si $p \neq p_0$. Cette décomposition identifie G à un tore à une infinité de dimension et dg à une mesure produit. On a ainsi

$$A_{k,\sigma} = \prod_p \int_0^{2\pi} (1 - 2p^{-\sigma} \cos\theta + p^{-2\sigma})^{-k} \frac{d\theta}{2\pi} .$$

Posons

$$h(r , k) = \int_0^{2\pi} (1 - 2r \cos\theta + r^2)^{-k} \frac{d\theta}{2\pi} .$$

On a, $r \to 0$,

$$\log h(r , k) = j(2kr) + k O(r^2)$$

où O est uniforme en k d'où

$$\log A_{k,\sigma} = \int j(2kt^{-\sigma})\, d\pi(t) + k O(\int t^{-2\sigma}\, d\pi(t)) .$$

Cette dernière intégrale converge uniformément si $\sigma \geqslant \sigma_0 > \frac{1}{2}$, d'où le lemme.

Posons

$$li(t) = \int_e^t \frac{du}{\log u} \quad \text{si } t > e , \quad li(t) = 0 \quad \text{sinon,}$$

$$m(t) = \pi(t) - li(t) .$$

Alors on a le lemme suivant.

LEMME 2. - <u>L'hypothèse de Riemann est équivalente au fait que</u>

$$H(s) = \int_0^{+\infty} t^{-s}\, dm(t)$$

<u>soit holomorphe dans le demi-plan</u> $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$.

<u>Preuve</u>. - **La preuve est immédiate en remarquant que la fonction définie pour** $\sigma > 1$ par

$$\Phi(s) = \exp\left(- \int_e^{+\infty} t^{-s} \frac{dt}{\log t}\right)$$

se prolonge en une fonction entière, admettant un seul zéro au point 1, ce zéro étant simple.

LEMME 3. - <u>L'hypothèse de Riemann est équivalente à</u>

$$\log A_{k,\sigma} = \int_e^{+\infty} j(2kt^{-\sigma}) \frac{dt}{\log t} + O(k) \quad . \tag{3}$$

<u>Preuve</u>. - En transformant (2) par une intégration par parties, puis en remplaçant $\pi(t)$ par $\mathrm{li}(t) + O(t^{1/2+\varepsilon})$ on trouve immédiatement (3).

Inversement, montrons que (3) entraîne l'hypothèse de Riemann. En combinant (3) et (2) on obtient

$$\int_0^{+\infty} j(2kt^{-\sigma})\, dm(t) = O(k) \quad . \tag{4}$$

Posons

$$f_\sigma(u) = j(u^\sigma)$$

$$\ell_\sigma(v) = \int_0^{+\infty} f_\sigma\left(\frac{v}{t}\right) dm(t) \quad . \tag{5}$$

Alors (4) s'écrit

$$\ell_\sigma(v) = O(v^\sigma) \tag{6}$$

égalité valable si v^σ est un entier pair ; en remarquant que $\log A_{k,\sigma}$ est une fonction convexe de k, on étend (6) aux valeurs réelles de $v \to +\infty$. Interprétons (5) en introduisant les transformées de Mellin

$$L_\sigma(s) = \int_0^{+\infty} \ell(v)\, v^{-s-1}\, dv$$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} j(v)\, v^{-s-1}\, dv$$

(5) s'écrit alors

$$H(s)\ F(\frac{s}{\sigma}) = \sigma\ L_\sigma(s) \quad . \tag{7}$$

Il résulte de (6) que L_σ est une fonction holomorphe dans la bande

$$\sigma < \mathrm{Re}(s) < 2\sigma \ .$$

D'autre part F est holomorphe dans la bande

$$1 < \mathrm{Re}(s) < 2 \ .$$

On déduit alors de (7) que $H(s)$ est méromorphe dans la bande

$$\sigma < \mathrm{Re}(s) < 2\sigma \ ,$$

σ étant arbitraire $> \frac{1}{2}$, on obtient que $H(s)$ est méromorphe dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$. Soit s_0 un pôle de H. Alors on doit avoir

$$F(\frac{s_0}{\sigma}) = 0 \quad \text{quel que soit } \sigma \text{ vérifiant } \frac{1}{2} < \sigma < \mathrm{Re}(s_0) \ ,$$

ce qui donnerait un segment de zéros pour la fonction F et par suite serait impossible. H est holomorphe et le lemme 2 donne alors le lemme 3.

Le théorème s'obtient à partir du lemme 3 par un simple calcul de résidus.