François Dress

Déterminants de Hankel du quotient de deux séries entières

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 4 (1962-1963), exp. nº 21, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1962-1963__4__A17_0>

DÉTERMINANTS DE HANKEL DU QUOTIENT DE DEUX SÉRIES ENTIÈRES

par François DRESS

1. Définitions.

On se donne un corps K et deux séries formelles inverses :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n , \qquad a_n \in K , \quad a_0 \neq 0$$

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n , \qquad c_n \in K , \quad c_0 \neq 0$$

$$F(z)\, G(z) \equiv 1$$

et on considère deux sortes de déterminants attachés aux fonctions $F(z)$ et $G(z)$:

$$D_m^{(p)}(F) = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_0 & \cdots & a_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0 & \cdots & a_m & \cdots & a_{m+p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_p & \cdots & a_{m+p} & \cdots & a_{m+2p} \end{vmatrix}$$

et $D_m^{(p)}(G)$ défini de la même manière,

$$H_m^{(p)}(F) = \begin{vmatrix} a_m & \cdots & a_{m+P} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m+p} & \cdots & a_{m+2p} \end{vmatrix}$$

et $H^{(p)}(G)$ défini de la même manière, les déterminants H étant les déterminants de Hankel de $F(z)$ et de $G(z)$.

2. Résultat de BOREL ([1], p. 32-43).

BOREL a démontré que :

$$H_m^{(p)}(F) = \pm \frac{D_{m-2}^{(p+1)}(G)}{c_0^{m+2p+1}} \qquad (m \geqslant 2)$$

et, en corollaire :

$$D_m^{(p)}(F) = \pm \frac{H_{m+2}^{(p-1)}(G)}{c_0^{m+2p+1}} \qquad (p \geqslant 1) .$$

Démonstration. - Considérons le déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{m+p-1} \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{m+p-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = a_0^{m+p}$$

et effectuons le produit (lignes par colonnes) $D_{m-2}^{(p+1)}(G).\Delta$, en tenant compte des relations suivantes (qui expriment $F(z)\,G(z) \equiv 1$) :

$$\begin{aligned} &a_0\,c_0 &&= 1 \\ &a_0\,c_1 + a_1\,c_0 &&= 0 \\ &\cdots &&= 0 \\ &a_0\,c_k + a_1\,c_{k-1} + \cdots + a_k\,c_0 &&= 0 , \end{aligned}$$

Il vient :

$$a_0^{m+p}\,D_{m-2}^{(p+1)}(G) =$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline a_0c_1 & \cdots & a_0c_{m-1}+\cdots+a_{m-2}c_1 & a_0c_m+\cdots+a_{m-1}c_1 & \cdots & a_0c_{m+p}+\cdots+a_{m+p-1}c_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0c_{p+1} & \cdots & a_0c_{m+p-1}+\cdots+a_{m-2}c_{p+1} & a_0c_{m+p}+\cdots+a_{m-1}c_{p+1} & \cdots & a_0c_{m+2p}+\cdots+a_{m+p-1}c_{p+1} \end{array}\right|$$

Ce déterminant se réduit au produit des deux déterminants mineurs des coins supérieur gauche et inférieur droit. Le premier de ceux-ci étant formé d'une diagonale de 1, il vient, en tenant compte encore une fois des relations ci-dessus :

$$a_0^{m+p}\,D_{m-2}^{(p+1)}(G) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_0c_m+\cdots+a_{m-1}c_1 & \cdots & a_0c_{m+p}+\cdots+a_{m+p-1}c_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0c_{m+p}+\cdots+a_{m-1}c_{p+1} & \cdots & a_0c_{m+2p}+\cdots+a_{m+p-1}c_{p+1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \begin{vmatrix} -a_mc_0 & \cdots & -a_{m+p}c_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_mc_p-\cdots-a_{m+p}c_0 & \cdots & -a_{m+p}c_p-\cdots-a_{m+2p}c_0 \end{vmatrix} .$$

Or ce dernier déterminant est égal au produit (lignes par colonnes) suivant :

$$(-1)^{p+1} \begin{vmatrix} c_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ c_p & \dots & c_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_m & \dots & a_{m+p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m+p} & \dots & a_{m+2p} \end{vmatrix} .$$

D'où :

$$a_0^{m+p} D_{m-2}^{(p+1)}(G) \equiv (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}+p+1} c_0^{p+1} H_m^{(p)}(F)$$

ce qui démontre le résultat de BOREL.

3. Résultats littéraux sur des dénominateurs des déterminants de HANKEL [2].

A partir de maintenant, on supposera que $F(z)$ et $G(z)$ sont les quotients de deux séries entières (formelles toujours) :

$$F(z) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n}{\sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n} \quad \text{et} \quad G(z) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n}{\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n} \qquad \begin{matrix} u_n , v_n \in K \\ u_0 , v_0 \neq 0 \end{matrix}$$

<u>Expression des coefficients et des déterminants de</u> F <u>et</u> G. – On a :

$$v_0 F(v_0 z) = \frac{u_0 + u_1 v_0 z + u_2 v_0^2 z^2 + \dots}{1 + v_1 z + v_2 v_0 z^2 + \dots} = A_0 + A_1 z + \dots + A_n z^n + \dots$$

avec $A_n = A_n(u_0 , \dots , u_n ; v_0 , \dots , v_n)$ polynôme à coefficients entiers, d'où :

$$a_n = \frac{A_n}{v_0^{n+1}} .$$

On a alors :

$$H_m^{(p)}(F) = \begin{vmatrix} a_m & \dots & a_{m+p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m+p} & \dots & a_{m+2p} \end{vmatrix} = \Sigma(-1)^I a_{m+i_0} \dots a_{m+p+i_p}$$

où $(i_0 , \dots , i_p)$ est une permutation de parité I des nombres $(0 , \dots , p)$.

Or :

$$v_0^{m+i_0+1} \dots v_0^{m+p+i_p+1} a_{m+i_0} \dots a_{m+p+i_p}$$

$$= v_0^{(m+1)(p+1)+\frac{p(p+1)}{2}+\frac{p(p+1)}{2}} a_{m+i_0} \dots a_{m+p+i_p} = v_0^{(m+p+1)(p+1)} a_{m+i_0} \dots a_{m+p+i_p}$$

est un polynôme à coefficients entiers en les u_i et les v_j . D'où :

$$H_m^{(p)}(F) = \frac{P_m^{(p)}(u_i , v_j)}{v_0^{(m+p+1)(p+1)}} .$$

On démontrerait de même que :

$$D_m^{(p)}(F) = \frac{Q_m^{(p)}(u_i , v_j)}{v_0^{(m+p+1)(p+1)+\mu_m}}$$

(avec $\mu_m = [\frac{m}{2}][\frac{m-1}{2}]$, ce qui est d'ailleurs sans importance pour la suite).

On a, bien entendu, des résultats similaires pour les coefficients et les déterminants de G .

<u>Dénominateurs des expressions littérales des déterminants</u> H <u>et</u> D . - La relation :

$$H_m^{(p)}(F) = \pm \frac{D_{m-2}^{(p+1)}(G)}{c_0^{m+2p+1}} \qquad (m \geq 2)$$

donne :

$$H_m^{(p)}(F) = \pm \left(\frac{u_0}{v_0}\right)^{m+2p+1} \frac{Q'^{(p+1)}_{m-2}(u_i , v_j)}{u_0^{(m+p)(p+2)+\mu_{m-2}}}$$

mais on a également :

$$H_m^{(p)}(F) = \frac{P_m^{(p)}(u_i , v_j)}{v_0^{(m+p+1)(p+1)}} .$$

Par suite :

$$\pm \frac{v_0^{(m+p)p} \, Q'^{(p+1)}_{m-2}(u_i , v_j)}{u_0^{(m+p-1)(p+1)+\mu_{m-2}}} = P_m^{(p)}(u_i , v_j) .$$

Si maintenant on laisse fixes les u_i $(i \geq 1)$ et les v_j $(j \geq 0)$, en ne considérant plus que la seule variable u_0 , il en résulte que $Q'^{(p+1)}_{m-2}(u_i , v_j)$ contient nécessairement $u_0^{(m+p-1)(p+1)+\mu_{m-2}}$ en facteur, d'où :

$$H_m^{(p)}(F) = \frac{\mathcal{H}_m^{(p)}(u_i , v_i)}{v_0^{m+2p+1}} \qquad (m \geq 2)$$

où $\mathcal{H}_m^{(p)}(u_i \, , \, v_j)$ est un polynôme à coefficients entiers.

On démontrerait de même que :

$$D_m^{(p)}(F) = \frac{\mathcal{D}_m^{(p)}(u_i \, , \, v_j)}{v_0^{m+2p+1}} \qquad (p \geqslant 1)$$

où $\mathcal{D}_m^{(p)}(u_i \, , \, v_j)$ est un polynôme à coefficients entiers.

On peut maintenant remarquer que $D_0^{(p)}(F) = H_0^{(p)}(F)$, ce qui étend à $m = 0$ la relation précédente relative aux déterminants de Hankel (le cas $p = 0$ étant évident).

Il reste $m = 1$. Considérons l'identité classique de Sylvester appliquée aux déterminants de Hankel :

$$H_{m-1}^{(p)} \, H_{m+1}^{(p)} - \{H_m^{(p)}\}^2 = H_{m-1}^{(p+1)} \, H_{m+1}^{(p-1)}$$

et faisons $m = 1$ ($p \geqslant 1$. Comme dans le cas précédent, $p = 0$ est évident).

$$H_0^{(p)} \, H_2^{(p)} - \{H_1^{(p)}\}^2 = H_0^{(p+1)} \, H_2^{(p-1)} .$$

Soit :

$$\{H_1^{(p)}\}^2 = \frac{\mathcal{D}_0^{(p)}}{v_0^{2p+1}} \cdot \frac{\mathcal{H}_2^{(p)}}{v_0^{2p+3}} - \frac{\mathcal{D}_0^{(p+1)}}{v_0^{2p+3}} \cdot \frac{\mathcal{H}_0^{(p-1)}}{v_0^{2p+1}}$$

d'où on déduit que $v_0^{4p+4}\{H_1^{(p)}\}^2$ est un polynôme à coefficients entiers, qui est nécessairement un carré parfait. Donc la relation :

$$H_m^{(p)}(F) = \frac{\text{polynôme à coefficients entiers}}{v_0^{m+2p+1}}$$

est valable quels que soient m et p .

4. THÉORÈME. - Si les séries $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \, z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n \, z^n$ sont à coefficients entiers, on en déduit pour les déterminants de Hankel du quotient :

$$H_m^{(p)}(F) = \frac{\text{entier}}{v_0^{m+2p+1}}$$

et, en particulier, pour les déterminants de Kronecker :

$$K_p(F) = H_0^{(p)}(F) = \frac{\text{entier}}{v_0^{2p+1}} .$$

5. Résultats complémentaire sur les déterminants de Kronecker.

On va montrer qu'en un sens - assez restreint d'ailleurs - ce dernier résultat constitue le meilleur possible.

Supposons que $K_p(F) = \frac{\text{entier}}{v_0^{2p}}$ quel que soit p. Alors $K_0(F) = a_0 = \frac{u_0}{v_0} = \text{entier}$, d'où $v_0 | u_0$.

On va montrer que si, réciproquement $v_0 | u_0$, alors $K_p(F) = \frac{\text{entier}}{v_0^{2p}}$ quel que soit p.

Démonstration. - Reprenons l'expression :

$$K_p = \frac{Q_0^{(p)}(u_i \, , v_j)}{v_0^{2p+1}}$$

et donnons aux u_i $(i \geqslant 1)$ et v_j $(j \geqslant 0)$ leurs valeurs numériques en ne portant plus notre attention que sur la seule variable u_0. On aura :

$$K_p = \frac{d_0 + d_1 u_0 + d_2 u_0^2 + \dots + d_k u_0^k}{v_0^{2p+1}} \qquad d_0 , \dots , d_k \in \underset{\sim}{Z} .$$

Considérons maintenant la fonction :

$$F_1(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{u_1 z + u_2 z^2 + \dots}{v_0 + v_1 z + v_2 z^2 + \dots} = \frac{1}{z} (b_1 z + b_2 z^2 + \dots)$$

et son déterminant :

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & \dots & b_p \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_p & b_{p+1} & \dots & b_{2p} \end{vmatrix} = D_1^{(p-1)}(F_1) = \frac{\text{entier}}{v_0^{2p}}$$

qui n'est autre que :

$$K_p(F \, ; u_0 = 0) = \frac{d_0}{v_0^{2p+1}}$$

ce qui prouve que $v_0 | d_0$. Si de plus $v_0 | u_0$, alors :

$$K_p = \frac{\text{entier}}{v_0^{2p}} .$$

Signalons pour terminer que la recherche de résultats plus forts se heurte à de sérieuses difficultés en particulier lorsque v_0 est une puissance parfaite.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (Emile). - Leçons sur les fonctions méromorphes. - Paris, Gauthier-Villars, 1903.

[2] DRESS (François). - Déterminants de Hankel du quotient de deux séries entières à coefficients entiers, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 256, 1962, p.4338-4340.