Charles Pisot

L'équation fonctionnelle de Cauchy avec des propriétés arithmétiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 4 (1962-1963), exp. nº 14, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1962-1963__4__A12_0>

L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE CAUCHY AVEC DES PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES

par Charles PISOT

Une fonction F définie sur les entiers rationnels positifs est dite multiplicative si l'on a $F(mn) = F(m) + F(n)$ chaque fois que m et n sont premiers entre eux. P. ERDÖS [2] a démontré que, si F est non décroissant, alors

$$F(n) = C \log n \ .$$

Diverses démonstrations ont été données depuis ([1], [3]) ; en particulier SCHOENBERG [5] a réduit le problème à une question sur l'équation fonctionnelle de Cauchy, ce que nous ferons également ici.

En décomposant n en ses facteurs premiers $n = p_1^{u_1} \dots p_k^{u_k}$, on a

$$F(n) = F(p_1^{u_1}) + \dots + F(p_k^{u_k}) \ .$$

Posant $f(t) = F(e^t)$, il vient

$$f(\sum_{i=1}^{k} u_i \log p_i) = \sum_{i=1}^{k} f(u_i \log p_i) \ .$$

Nous allons alors considérer l'équation fonctionnelle suivante :

$$(1) \qquad f(u_1 \alpha_1 + \dots + u_k \alpha_k) = f(u_1 \alpha_1) + \dots + f(u_k \alpha_k) \ , \qquad k \geqslant 2$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont des nombres réels avec $\alpha_i \geqslant 0$, pour $i = 1, \dots, k$, où $u_1, \dots, u_k$ sont des entiers rationnels avec $u_i \geqslant 0$, pour $i = 1, \dots, k$. La fonction f est définie sur l'ensemble E des nombres réels x qui peuvent s'écrire sous la forme $x = \sum_{i=1}^{k} u_i \alpha_i$, $u_i \geqslant 0$ entier rationnel. De plus, nous supposons que f est "bien définie", c'est-à-dire que si x peut se mettre de plusieurs manières sous la forme $\sum_{i=1}^{k} u_i \alpha_i$, la relation (1) est vraie pour toutes les manières de décomposer x en somme $\sum_{i=1}^{k} u_i \alpha_i$. Enfin nous supposons que les valeurs de f sont réelles.

Remarquons encore que l'ensemble E est discret.

Dans une lettre à I. J. SCHOENBERG, P. ERDÖS a esquissé une démonstration du fait que si $F(n)$ est multiplicative et définie seulement pour les entiers n de la forme

$$n = p_1^{u_1}\ p_2^{u_2}\ p_3^{u_3}$$

où p_1, p_2, p_3 sont trois nombres premiers différents fixes, et si $F(n)$ est non décroissant, alors $F(n) = C \log n$, mais que ce résultat est faux si l'on n'a que deux nombres premiers, comme le montre par exemple le contre-exemple de la fonction

$$F(n) = \left[\frac{\log n}{\log p_1}\right] + \left[\frac{\log n}{\log p_2}\right]$$

qui est multiplicative pour tout n de la forme $p_1^{u_1}\ p_2^{u_2}$, non décroissante et qui n'est pas de la forme $C \log n$.

Nous allons retrouver ces résultats, et constater que le cas $k = 2$ est le plus intéressant, et peut être caractérisé entièrement.

Donnons d'abord quelques conséquences immédiates de (1). Pour $u_i = 0$, $i = 1, \ldots, k$, on obtient $f(0) = kf(0)$, d'où $f(0) = 0$ puisque $k \geq 2$.

Pour chaque constante ρ, si f est solution de (1), la fonction f^* définie par $f^*(x) = f(\rho x)$ est une solution de (1) avec α_i/ρ à la place de α_i.

L'ensemble des solutions de (1) pour $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ fixes, est un espace vectoriel.

Toute forme linéaire $\lambda(x)$, $x \in \mathbb{R}$ est aussi solution de (1). Il y a encore d'autres solutions évidentes de (1). Soit φ_i une fonction vérifiant $\varphi_i(0) = 0$, et ayant pour période tous les α_j avec $j \neq i$, c'est-à-dire telle que

$$\varphi_i(x + \alpha_j) = \varphi_i(x) \qquad \text{pour tout } j \neq i$$

alors φ_i est solution de (1) ; en effet

$$\varphi_i\Big(\sum_{j=1}^{k} u_j\ \alpha_j\Big) = \varphi_i(u_i\ \alpha_i)$$

à cause de la périodicité et

$$\varphi_i(u_i\ \alpha_i) = \sum_{j=1}^{k} \varphi_i(u_j\ \alpha_j)$$

car

$$\varphi_i(u_j\ \alpha_j) = \varphi_i(0) = 0 \qquad \text{si } j \neq i .$$

Nous pouvons illustrer cela par le cas particulier suivant, où tous les rapports α_i/α_j sont rationnels. On peut alors supposer que $\alpha_i = a_i$ est un entier rationnel pour $i = 1, \ldots, k$, et que $(a_1, \ldots, a_k) = 1$.

Posons $P = a_1 \ldots a_k$ et d_i = p. g. c. d. des a_j avec $j \neq i$. Si ω est une solution de (1) telle que $\omega(P) = 0$, alors on a $\omega(m\ a_i\ a_j) = 0$ pour tout

$m \geqslant 1$ entier et tout $i \neq j$. En effet, on a

$$\omega(u_i\, a_i + u_j\, a_j) = \omega(u_i\, a_i) + \omega(u_j\, a_j)$$

pour $u_i \geqslant 0$, $u_j \geqslant 0$.

En posant $\mu = \omega(a_i\, a_j)$, on en déduit pour $u_i = a_j$, $u_j = a_i$: $\omega(2\, a_i\, a_j) = 2\mu$ et par récurrence, $\omega(m\, a_i\, a_j) = m\mu$. Pour $m = \prod_h a_h$, $h \neq i$, $h \neq j$, on a

$$\omega(P) = \frac{P}{a_i\, a_j}\, \mu = 0 , \qquad \text{donc} \quad \mu = 0 .$$

Posons maintenant $\lambda = f(P)/P$, alors la fonction $\omega(x) = f(x) - \lambda x$ vérifie (1) et $\omega(P) = 0$. Définissons

$$\varphi_i(x) = \omega(u_i\, a_i) \qquad \text{si} \quad x = \sum_{j=1}^{k} u_j\, a_j$$

alors $x \equiv y \pmod{d_i}$ donne $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$, ainsi $\varphi_i(x)$ est bien défini et possède la période d_i, donc aussi tous les a_j avec $j \neq i$. Par suite f est linéaire si et seulement si tous les d_i valent 1 pour $i = 1, \ldots, k$. D'autre part on a

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x) .$$

Cherchons aussi maintenant, dans quel cas f est non décroissant, alors

$$(f(x) - f(y))/(x - y) \geqslant 0$$

ou encore

$$(\omega(x) - \omega(y))/(x - y) \geqslant - \lambda .$$

Posons

$$- \lambda_i = \min(\varphi_i(x) - \varphi_i(y))/(x - y)$$

ce minimum est atteint pour un couple x, y au moins. En divisant l'intervalle (x, y) en intervalles de longueur 1, on voit qu'il existe un x_i tel que

$$\varphi_i(x_i + 1) - \varphi_i(x_i) = - \lambda_i .$$

Comme a_i est premier avec d_i, on peut trouver un entier $u_i \geqslant 0$ tel que $x_i \equiv a_i\, u_i \pmod{d_i}$; en posant $x = \sum_{i=1}^{k} a_i\, u_i$ on aura $x \equiv x_i \pmod{d_i}$ pour tout $i = 1, \ldots, k$, donc

$$\varphi_i(x + 1) - \varphi_i(x) = - \lambda_i$$

et par suite

$$\omega(x + 1) - \omega(x) = - (\lambda_1 + \ldots + \lambda_k) \geqslant - \lambda .$$

Il en résulte que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k \leqslant \lambda$.

Réciproquement, soit $\varphi_i(x)$ une fonction périodique de période d_i, avec $\varphi_i(0) = 0$ et soit $-\lambda_i = \min \varphi_i(x+1) - \varphi_i(x)$. Posons

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x)$$

et soit λ un nombre vérifiant $\lambda \geqslant \lambda_1 + \ldots + \lambda_k$, alors $f(x) = \omega(x) + \lambda x$ est une solution non décroissante de (1).

Etudions maintenant le cas général. Pour cela nous allons établir d'abord une égalité fondamentale. Soit I, J une partition de l'ensemble des indices $1, \ldots, k$. Nous allons prendre dans E deux éléments x_h, y_h tels que $x_h - y_h$ soit fixe. Pour cela nous poserons

$$x_h = \sum_{i\in I} u_i\, \alpha_i + \sum_{j\in J} u_j^{(h)}\, \alpha_j\,, \qquad y_h = \sum_{i\in I} v_i\, \alpha_i + \sum_{j\in J} v_j^{(h)}\, \alpha_j$$

et nous nous donnons des entiers q_j, $j \in J$, de signe arbitraire. Posons $\delta_j = \pm 1$ tel que $\delta_j\, q_j \geqslant 0$.

Soient $w_j \geqslant 0$ et $h \geqslant 1$ des entiers ; soit

$$u_j^{(h)} = w_j + h\, q_j \qquad \text{si} \quad \delta_j = +1$$

$$u_j^{(h)} = w_j + (h-1)\, |q_j| \qquad \text{si} \quad \delta_j = -1$$

et

$$v_j^{(h)} = w_j + (h-1)\, q_j \qquad \text{si} \quad \delta_j = +1$$

$$v_j^{(h)} = w_j + h|q_j| \qquad \text{si} \quad \delta_j = -1\,.$$

On a ainsi dans les deux cas $u_i^{(h)} - v_i^{(h)} = q_j$ et

$$x_h - y_h = \sum_{i\in I} (u_i - v_i)\, \alpha_i + \sum_{j\in J} q_j\, \alpha_j\,.$$

D'autre part

$$f(x_h) - f(y_h) = \sum_{i\in I} (f(u_i\, \alpha_i) - f(v_i\, \alpha_i)) + \sum_{j\in J} (f(u_j^{(h)}\, \alpha_j) - f(v_j^{(h)}\, \alpha_j))\,.$$

En sommant pour $h = 1, 2, \ldots, m$, il vient l'égalité :

(2) $$\sum_{h=1}^{m} \{f(x_h) - f(y_h)\}$$

$$= m \sum_{i\in I} \{f(u_i\, \alpha_i) - f(v_i\, \alpha_i)\} + \sum_{j\in J} \delta_j \{f((w_j + m|q_j|)\, \alpha_j) - f(w_j\, \alpha_j)\}$$

où

$$x_h - y_h = \sum_{i\in I} (u_i - v_i)\, \alpha_i + \sum_{j\in J} q_j\, \alpha_j\,.$$

Supposons maintenant que f soit monotone, non décroissant.

1° **Prenons tous les u et v nuls sauf pour un indice i, où nous supposerons** $u_i = u > 0$ et $v_i = 0$, et pour un indice j ; nous supposons $q_j = -q$, avec $q > 0$. Nous prendrons une partition I, J telle que $i \in I$ et $j \in J$. Pour chaque $u \geqslant 2$, nous choisissons q de sorte que $0 \leqslant u\,\alpha_i - q\,\alpha_j < \alpha_j$; posant $q' = q + 1$, on aura $-\alpha_j \leqslant u\,\alpha_i - q'\,\alpha_j < 0$. Pour tout entier positif n, nous définissons m et w_j par division : $n = mq + w_j$, $0 \leqslant w_j \leqslant q - 1$. On aura

$$x_h - y_h = u\,\alpha_i - q\,\alpha_j > 0\,, \qquad \delta_j = -1$$

donc (2) et la monotonie de f donnent

$$mf(u\,\alpha_i) - f(n\,\alpha_j) + f(w_j\,\alpha_j) \geqslant 0\,.$$

Comme $f(0) = 0$, on a $f(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$ et par suite :

$$\frac{f(n\,\alpha_j)}{n\,\alpha_j} \leqslant \frac{m}{(qm + w_j)\,\alpha_j}\, f(u\,\alpha_i) + \frac{f(w_j\,\alpha_j)}{n\,\alpha_j}\,.$$

Posons alors

$$\lambda' = \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n\,\alpha_j)}{n\,\alpha_j}$$

on a donc

$$\lambda' \leqslant f(u\,\alpha_i)/q\,\alpha_j\,.$$

De manière analogue, en posant

$$\lambda'' = \liminf_{n\to\infty} \frac{f(n\,\alpha_j)}{n\,\alpha_j}$$

on obtient avec q' l'inégalité

$$\lambda'' \geqslant f(u\,\alpha_i)/q'\,\alpha_j\,.$$

On a ainsi

$$\frac{f(u\,\alpha_i)}{u\,\alpha_i + \alpha_j} \leqslant \lambda'' \leqslant \lambda' \leqslant \frac{f(u\,\alpha_i)}{u\,\alpha_i - \alpha_j}$$

ces inégalités montrent que $f(n\,\alpha_j)/n\,\alpha_j$ a une limite si $n \to \infty$, et que cette limite est indépendante de l'indice j. Nous poserons

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n\,\alpha_j)}{n\,\alpha_j} \qquad \text{quel que soit } j = 1, \dots, k\,.$$

Posons maintenant

$$\omega(x) = f(x) - \lambda x\,.$$

alors $\omega(x)$ vérifie (1) et vérifie de plus

$$(\omega(x) - \omega(y))/(x - y) \geqslant -\lambda \qquad \text{pour} \quad x \in E , \quad y \in E$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \omega(x)/x = 0 \qquad \text{pour} \quad x \in E .$$

2° Supposons maintenant $k = 3$ et $I = \{1\}$, $J = \{2 , 3\}$. Prenons dans (2), pour f , la fonction ω et $w_j = 0$. En divisant par

$$m(x_h - y_h) = m\{(u_1 - v_1)\ \alpha_1 + q_2\ \alpha_2 + q_3\ \alpha_3\}$$

on obtient :

$$\frac{\omega(u_1\ \alpha_1) - \omega(v_1\ \alpha_1) + \delta_2\ \omega(m|q_2|\alpha_2)/m + \delta_3\ \omega(m|q_3|\alpha_3)/m}{(u_1 - v_1)\ \alpha_1 + q_2\ \alpha_2 + q_3\ \alpha_3} \geqslant -\lambda$$

Si α_2/α_3 est irrationnel, nous choisissons $v_1 = 0$, et q_2 et q_3 tels que

$$0 < u_1\ \alpha_1 + q_2\ \alpha_2 + q_3\ \alpha_3 < \varepsilon$$

alors si $m \to \infty$, on en déduit que

$$\omega(u_1\ \alpha_1) \geqslant -\lambda\varepsilon .$$

On peut, pour le même u_1 , trouver q_2' et q_3' tels que

$$-\varepsilon < u_1\ \alpha_1 + q_2'\ \alpha_2 + q_3'\ \alpha_3 < 0 , \qquad \text{d'où} \quad \omega(u_1\ \alpha_1) \leqslant \lambda\varepsilon$$

comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a $\omega(u_1\ \alpha_1) = 0$.

On obtient ainsi le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - Si les rapports α_1/α_2 , α_2/α_3 , α_3/α_1 sont irrationnels, toute fonction f , non décroissante, vérifiant (1) est de la forme λx .

Dans le cas de $k = 2$ et α_1/α_2 irrationnel, l'égalité (2) donne de même pour la fonction ω l'inégalité

$$\frac{\omega(u_1\ \alpha_1) - \omega(v_1\ \alpha_1)}{(u_1 - v_1)\ \alpha_1 + q_1\ \alpha_2} \geqslant -\lambda .$$

Définissons alors la fonction $\varphi_1(x)$ par

$$\varphi_1(0) = 0 , \quad \varphi_1(x + \alpha_2) = \varphi_1(x) , \quad \varphi_1(u_1\ \alpha_1) = \omega(u_1\ \alpha_1)$$

et la fonction $\varphi_2(x)$ par

$$\varphi_2(0) = 0 , \quad \varphi_2(x + \alpha_1) = \varphi_2(x) , \quad \varphi_2(u_2\ \alpha_2) = \omega(u_2\ \alpha_2) .$$

Pour $x = u_1\ \alpha_1 + u_2\ \alpha_2$ on a ainsi

$$\omega(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \qquad \text{et} \quad \omega(u_1\ \alpha_1) = \varphi_1(x) ;$$

de même si $y = v_1 \alpha_1 + v_2 \alpha_2$, on a

$$\omega(v_1 \alpha_1) = \varphi_1(y) , \qquad \text{d'où} \qquad (\varphi_1(x) - \varphi_1(y))/(x - y) > - \lambda \quad .$$

c'est-à-dire $\varphi_1(x) + \lambda x$ est une fonction monotone non décroissante.

On montre de même que $\varphi_2(x) + \lambda x$ est monotone non décroissant.

En vertu de la périodicité de $\varphi_i(x)$, on peut remarquer que $\varphi_i(x)$ est défini sur l'ensemble E_i des x de la forme $u_i \alpha_i + q_j \alpha_j$, où u_i entier $\geqslant 0$, mais où q_j est un entier de signe arbitraire ; par suite E_i est un ensemble de nombres réels partout dense.

Etablissons un lemme.

LEMME. - <u>Soit</u> $g(x)$ <u>une fonction définie sur un ensemble</u> H <u>partout dense.</u> <u>Soient</u> $x' \in H$, $y' \in H$ <u>tels que</u> $x' > y'$ <u>et que</u> $g(x') - g(y') \leqslant \rho(x' - y')$. <u>Alors, quel que soit</u> δ <u>vérifiant</u> $0 < 5\delta \leqslant x' - y'$, <u>on peut trouver</u> $x \in H$, $y \in H$, $x > y$ <u>tels que</u> $\delta < x - y < 5\delta$ <u>et</u> $g(x) - g(y) \leqslant \rho(x - y)$.

L'idée de la démonstration consiste à partager l'intervalle y' , x' en intervalles partiels, de longueur 3δ et de déplacer légèrement les points de division, de façon à ce qu'ils fassent partie de H .

Précisons : il existe un entier impair $2r + 1$ tel que

$$3(x' - y')/5\delta \leqslant 2r + 1 \leqslant (x' - y')/\delta$$

en effet

$$(x' - y')/\delta - 3(x' - y')/5\delta = 2(x' - y')/5\delta > 2 \ .$$

Partageons maintenant l'intervalle y' , x' en $2r + 1$ intervalles égaux et choisissons dans le $2j$-ième intervalle ouvert, un point x_j de l'ensemble partout dense H et cela pour $j = 1 , \ldots , r$. Posons de plus $x_0 = y'$, $x_{r+1} = x'$. On a alors

$$\delta \leqslant (x' - y')/(2r + 1) < x_{j+1} - x_j < 3(x' - y')/(2r + 1) \leqslant 5\delta$$

pour $j = 0 , 1 , \ldots , r$.

Définissons ρ_j par

$$g(x_{j+1}) - g(x_j) = \rho_j(x_{j+1} - x_j)$$

alors

$$g(x') - g(y') = \sum_{j=0}^{r} \rho_j(x_{j+1} - x_j) \ .$$

L'un au moins des ρ_j vérifie $\rho_j \leqslant \rho$, sinon on aurait $g(x') - g(y') > \rho(x'-y')$. En prenant $x = x_{j+1}$, $y = x_j$ avec j tel que $\rho_j \leqslant \rho$, on aura

$$\delta < x - y < 5\delta \qquad \text{et} \qquad g(x) - g(y) \leqslant \rho(x - y) .$$

Le lemme est ainsi démontré. Ce lemme va nous permettre de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Si $k = 2$ et si α_1/α_2 est irrationnel, toute fonction f, non décroissante, vérifiant (1), est de la forme

$$f(x) = \lambda x + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \qquad \text{où} \quad \varphi_i(0) = 0$$

$$\varphi_i(x + \alpha_j) = \varphi_i(x) \quad \text{si} \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2$$

et

$$(\varphi_i(x) - \varphi_i(y))/(x - y) \geqslant -\lambda_i \quad \text{avec} \quad \lambda_1 + \lambda_2 \leqslant \lambda .$$

Il ne nous reste qu'à démontrer que $\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant \lambda$. Pour cela, montrons d'abord que l'on peut trouver $x \in E_1$, $y \in E_1$, $y < x$ tels que

$$(\varphi_1(x) - \varphi_1(y))/(x - y) \leqslant -\lambda_1 + \varepsilon$$

et $s \in E_2$, $t \in E_2$, $t < s$ tels que

$$(\varphi_2(s) - \varphi_2(t))/(s - t) \leqslant -\lambda_2 + \varepsilon$$

avec de plus $x - y < s - t < 5(x - y)$ et cela quel que soit $\varepsilon > 0$ donné.

Posons

$$-\lambda_i = \inf(\varphi_i(x) - \varphi_i(y))/(x - y) , \qquad i = 1, 2, \quad x \in E_i, \quad y \in E_i, \quad x \neq y \quad ;$$

comme $\varphi_i(x) + \lambda x$ est croissant, on a $\lambda_i \leqslant \lambda$ et λ_i est fini. Quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut donc trouver $x_i \in E_i$, $y_i \in E_i$, $y_i < x_i$ tels que

$$(\varphi_i(x_i) - \varphi_i(y_i))/(x_i - y_i) \leqslant -\lambda_i + \varepsilon .$$

1° Si $x_1 - y_1 \geqslant x_2 - y_2$, on applique le lemme avec $g = \varphi_1$, $x' = x_1$, $y' = y_1$, $\rho = -\lambda_1 + \varepsilon$ et en prenant $\delta = (x_2 - y_2)/5$, alors $5\delta \leqslant x' - y'$.

Le lemme donne alors des valeurs de x et y et on prend $s = x_2$, $t = y_2$.

2° Si $(x_2 - y_2)/5 < x_1 - y_1 < x_2 - y_2$, il suffit de prendre $x = x_1$, $y = y_1$, $s = x_2$, $t = y_2$.

3° Si $x_1 - y_1 \leqslant (x_2 - y_2)/5$, on applique le lemme avec $g = \varphi_2$, $x' = x_2$, $y' = y_2$, $\rho = -\lambda_2 + \varepsilon$ et en prenant $\delta = x_1 - y_1$. Le lemme donne alors s et t et on prend $x = x_1$, $y = y_1$.

Or l'inégalité $x - y < s - t$ peut s'écrire $x - s < y - t$; comme α_1/α_2 est irrationnel, il existe des entiers positifs u , v aussi grands que l'on veut tels que l'on ait

$$x - s < v\,\alpha_1 - u\,\alpha_2 < y - t$$

c'est-à-dire aussi

$$t + v\,\alpha_1 < y + u\,\alpha_2 \;; \qquad x + u\,\alpha_2 < s + v\,\alpha_1 \,.$$

Comme $y < x$, on a de plus $y + u\,\alpha_2 < x + u\,\alpha_2$. On suppose u , v assez grands pour que les quatre nombres suivants, rangés par ordre croissant :

$$t + v\,\alpha_1 \,,\quad y + u\,\alpha_2 \,,\quad x + u\,\alpha_2 \,,\quad s + v\,\alpha_1$$

appartiennent tous à l'ensemble discret E .

La fonction $\psi(x) = \varphi_2(x) + \lambda_2\, x$ est croissante donc

$$\psi(x + u\,\alpha_2) - \psi(y + u\,\alpha_2) \leqslant \psi(s + v\,\alpha_1) - \psi(t + v\,\alpha_1)\,.$$

En tenant compte de la période α_1 de φ_2 , cela s'écrit :

$$\lambda_2(x - y) + \varphi_2(x + u\,\alpha_2) - \varphi_2(y + u\,\alpha_2) \leqslant \lambda_2(s - t) + \varphi_2(s) - \varphi_2(t) \leqslant \varepsilon(s - t)\,.$$

D'autre part, en tenant compte de la période α_2 de φ_1 , on a :

$$\lambda_1(x - y) + \varphi_1(x + u\,\alpha_2) - \varphi_1(y + u\,\alpha_2) = \lambda_1(x - y) + \varphi_1(x) - \varphi_1(y) \leqslant \varepsilon(x - y)\,.$$

En ajoutant, il vient :

$$(\lambda_1 + \lambda_2)(x - y) + \omega(x + u\,\alpha_2) - \omega(y + u\,\alpha_2) \leqslant 6\varepsilon(x - y)\,.$$

Par ailleurs, on sait que

$$\omega(x + u\,\alpha_2) - \omega(y + u\,\alpha_2) \geqslant - \lambda(x + u\,\alpha_2 - y - u\,\alpha_2) = - \lambda(x - y)$$

donc

$$(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda)(x - y) \leqslant 6\varepsilon(x - y)$$

c'est-à-dire, comme $x - y > 0$, on a l'inégalité cherchée $\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant \lambda$, et le théorème 2 est démontré.

On peut obtenir des résultats analogues en supposant que les valeurs de f appartiennent à un espace de Banach, et en remplaçant la monotonie de f par une condition de continuité uniforme : quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe η tel que $\|x - y\| < \eta$ entraîne $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$, pour x , y appartenant à l'ensemble E , les α_i étant des éléments d'un espace de Banach.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BESICOVITCH (A. S.). - On additive functions of a positive integer, Studies in mathematical analysis and related topics, An essays on honor of George Polya, p. 38-41. - Stanford, Stanford University, 1962.

[2] ERDÖS (P.). - On the districution function of additive functions, Annals of Math., Series 2, t. 47, 1946, p. 1-20.

[3] MOSER (L.) and LAMBEK (J.). - On monotone multiplicative functions, Proc. Amer. math. Soc., t. 4, 1953, p. 544-545.

[4] PISOT (C.) and SCHOENBERG (I. J.). - Arithmetic problems concerning Cauchy's functional equation, Illinois J. of Math., t. 8, 1964, p. 40-56.

[5] SCHOENBERG (I. J.). - On two theorems of P. Erdös and A. Rényi, Illinois J. of Math., t. 6, 1962, p. 53-58.