François Dress

Fonctions arithmétiques sur l'anneau des polynômes à coefficients dans un corps fini

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 4 (1962-1963), exp. nº 13, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1962-1963__4__A11_0>

FONCTIONS ARITHMÉTIQUES SUR L'ANNEAU DES POLYNÔMES À COEFFICIENTS DANS UN CORPS FINI

par François DRESS

1. Introduction.

On se donne un corps fini $CG(p^n)$, $p^n = q$, et on considère l'anneau des polynômes à une indéterminée X . Soit

$$F(X) = a_0 x^{\nu} + a_1 x^{\nu-1} + \ldots + a_{\nu-1} x + a_{\nu} \ .$$

Deux polynômes F et G sont dits associés si $F = aG$, $a \in CG(p^n)$. Si $a_0 = 1$, F est dit unitaire. Dans toute la suite de cet exposé, il ne sera considéré que des polynômes unitaires.

Si $\partial^0 F = \nu$, on pose $|F| = q^{\nu}$. On peut alors définir une fonction zêta :

$$\zeta(s) = \sum_F \frac{1}{|F|^s} = \sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\nu} \frac{1}{q^{\nu s}} = \frac{1}{1 - q^{1-s}} \qquad (s = \sigma + i\tau \ , \quad \sigma > 1) \ .$$

L'unicité de la décomposition en polynômes irréductibles et l'absolue convergence pour $\sigma > 1$ des séries et produits considérés permet d'obtenir l'égalité fonctionnelle :

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{|p|^s}}$$

le produit infini étant étendu à tous les polynômes irréductibles (unitaires).

2. Fonctions arithmétiques. Valeurs moyennes.

On peut définir dans cet anneau, les fonctions arithmétiques usuelles de la même manière que dans $\underset{\sim}{Z}$. En raison de la constance de la norme pour les polynômes de même degré, et de la forme très simple de la fonction zêta, la sommation à degré constant des fonctions arithmétiques multiplicatives sera aisée.

Fonctions de diviseurs. - $d(F) = \sum_{f|F} 1$ et $\sigma(F) = \sum_{f|F} |F|$. On a

$$\sum_F \frac{d(F)}{|F|^s} = \prod_p \left(1 + \frac{2}{|p|^s} + \frac{3}{|p|^{2s}} + \ldots\right) = \prod_p \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{|p|^s}}\right)^2 = \zeta^2(s) = \left(\frac{1}{1 - q^{1-s}}\right)^2$$

d'où

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sum_{\partial^0 F=\nu} d(F)}{q^{\nu s}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\nu+1)\, q^{\nu}}{q^{\nu s}}$$

et

$$\sum_F \frac{\sigma(F)}{|F|^s} = \prod_p \left(1 + \frac{1+|p|}{|p|^s} + \frac{1+|p|+|p|^2}{|p|^{2s}} + \dots\right)$$

$$= \prod_p \left(1 + \frac{1}{|p|^s} + \frac{1}{|p|^{2s}} + \dots\right)\left(1 + \frac{|p|}{|p|^s} + \frac{|p|^2}{|p|^{2s}} + \dots\right)$$

$$= \zeta(s)\,\zeta(s-1) = \frac{1}{(1-q^{1-s})(1-q^{2-s})} = 1 + \frac{q+q^2}{q^s} + \frac{q^2+q^3+q^4}{q^{2s}} + \dots$$

d'où :

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sum_{\partial^0 F=\nu} \sigma(F)}{q^{\nu s}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{\nu}(q^{\nu+1}-1)/q-1}{q^{\nu s}}$$

ce qui donne

$$\mathfrak{M}_{\partial^0 F=\nu}\, d(F) = \nu + 1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}_{\partial^0 F=\nu}\, \sigma(F) = \frac{q^{\nu+1}-1}{q-1} .$$

Indicateur d'Euler.

$$\varphi(F) = \sum_{\overline{(f,F)=1}} 1 = \prod_{\substack{p^k | F \\ p^{k+1} \nmid F}} |p|^k - |p|^{k-1} .$$

On a .

$$\sum_F \frac{\varphi(F)}{|F|^s} = \prod_p \left\{1 + (|p|-1)\left(\frac{1}{|p|^s} + \frac{|p|}{|p|^{2s}} + \dots\right)\right\} = \prod_p \left(\frac{1-\dfrac{1}{|p|^s}}{1-\dfrac{|p|}{|p|^s}}\right)$$

$$= \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \frac{1-q^{1-s}}{1-q^{2-s}}$$

d'où

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sum_{\partial^0 F=\nu} \varphi(F)}{q^{\nu s}} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^{2\nu}-q^{2\nu-1}}{q^{\nu s}}$$

ce qui donne

$$\mathfrak{M}_{\partial^0 F=\nu\geq 1}\, \varphi(F) = q^{\nu}\left(1-\frac{1}{q}\right) .$$

Fonction de Möbius.

$$\mu(F) = \begin{cases} 1 & \text{si } F = 1 \\ (-1)^{\sum_i 1} & \text{si } F = \prod_i p_i \\ 0 & \text{si } f^2 | F \end{cases}$$

on a

$$\sum_F \frac{\mu(F)}{|F|^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{|p|^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)} = 1 - q^{1-s}$$

ce qui donne

$$\underset{\partial^0 F=\nu}{\mathfrak{M}} \mu(F) = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu = 0 \\ -1 & \text{si } \nu = 1 \\ 0 & \text{si } \nu \geqslant 2 \end{cases}$$

On peut enfin calculer la proportion de polynômes "square-free" par degré :

$$\sum_F \frac{|\mu(F)|}{|F|^s} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{|p|^s}\right) = \prod_p \frac{1 - \frac{1}{|p|^{2s}}}{1 - \frac{1}{|p|}} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \frac{1 - q^{1-2s}}{1 - q^{1-s}}$$

d'où

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sum_{\partial^0 F=\nu} |\mu(F)|}{q^{\nu s}} = 1 + \frac{q}{q^s} + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{q^\nu - q^{\nu-1}}{q^{\nu s}}$$

ce qui donne

$$\underset{\partial^0 F=\nu}{\mathfrak{M}} |\mu(F)| = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu = 0 \text{ ou } 1 \\ 1 - \frac{1}{q} & \text{si } \nu \geqslant 2 \end{cases}$$

3. Polynômes irréductibles. Nombre par degré.

On désigne par $\pi(\nu) = \pi_q(\nu)$ le nombre de polynômes irréductibles (unitaires) de degré ν. La fonction zêta donne

$$\frac{1}{1 - q^{1-s}} = \zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{|p|^s}} = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{q^{\nu s}}}\right)^{\pi(\nu)} \qquad (s = \sigma + i\tau \ , \ \sigma > 1) \quad ;$$

on prend alors les logarithmes des deux membres, ce qui donne

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda q^{\lambda(s-1)}} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \pi(\lambda) \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu q^{\lambda\mu s}}$$

soit, en égalant les coefficients de $\frac{1}{q^{\nu s}}$,

$$\frac{q^\nu}{\nu} = \sum_{\lambda|\nu} \frac{\lambda\pi(\lambda)}{\nu}$$

d'où, en utilisant la formule d'inversion de Möbius ,

$$\nu\pi(\nu) = \sum_{\lambda|\nu} \mu(\nu)\, q^{\nu/\lambda}$$

résultat qui peut encore s'écrire :

$$\pi(\nu) = \frac{1}{\nu}\,(q^{\nu} - \sum_{p_i|\nu} q^{\nu/p_i} + \sum_{p_ip_j|\nu} q^{\nu/p_ip_j} - \dots) = \frac{1}{\nu}\,\{q^{\nu} + O(q^{\nu/2})\} \quad (\nu \to \infty) \ .$$

4. Répartition fine. Premiers résultats de CARLITZ et UCHIYAMA.

On désigne par $\pi(\nu\ ;\ r\ ,\ t) = \pi_q(\nu\ ;\ r\ ,\ t)$ le nombre de polynômes irréductibles tels que les r premiers coefficients $(a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_r)$ et les t derniers $(a_{\nu-t+1}\ ,\ \dots\ ,\ a_{\nu})$ soient fixés.

Le paragraphe précédent montre que

$$\pi(\nu\ ;\ 0\ ,\ 0) = \frac{1}{\nu}\,\{q^{\nu} + O(q^{\nu/2})\} \quad (\nu \to \infty)\ .$$

Un résultat déjà ancien donne des formules exactes [6] pour $\pi(\nu\ ;\ 1\ ,\ 0)$. Elles sont du même type que celles permettant de calculer $\pi(\nu)$, mais beaucoup plus compliquées. Elles ne seront pas indiquées ici. Elles peuvent d'ailleurs se résumer en

$$\pi(\nu\ ;\ 1\ ,\ 0) = \frac{1}{\nu}\,\{q^{\nu-1} + O(q^{\nu/2})\} \quad (\nu \to \infty)\ .$$

CARLITZ en 1952 ([6]) et UCHIYAMA en 1954 ([7]) ont démontré les formules suivantes :

$$\pi(\nu\ ;\ 1\ ,\ 1) = \frac{1}{\nu}\,\{\frac{q^{\nu-1}}{q-1} + O(q^{\nu/2})\} \quad (\nu \to \infty)$$

$$\pi(\nu\ ;\ 0\ ,\ 2) = \frac{1}{\nu}\,\{\frac{q^{\nu-1}}{q-1} + O(q^{\nu/2})\} \quad (\nu \to \infty)$$

valables pour $q = p^n$, p premier impair (la présence du facteur $\frac{q^{\nu-1}}{q-1}$ et non de $q^{\nu-2}$ est due au fait que la valeur 0 du dernier coefficient a_{ν} est exclue).

Etude de $\pi(\nu\ ;\ 1\ ,\ 1)$. Préliminaires. - On définit tout d'abord deux fonctions $\lambda(F)$ et $\chi(F)$, $F = x^{\nu} + a_1 x^{\nu-1} + \dots + a_{\nu}$, fonctions qui sont respectivement des caractères additif et multiplicatif sur le corps fini $CG(p^n)$:

Si $t(\alpha)$ désigne la trace absolue de $\alpha \in CG(p^n)$, $t(\alpha) = \alpha + \alpha^p + \dots + a^{p^{n-1}}$, on définit $E(\alpha) = e^{(2i\pi t(\alpha))/p}$. Ensuite, b étant un élément quelconque de $CG(p^n)$, on pose

$$\begin{cases} \lambda(F) = \lambda_b(F) = E(ba_1) & \text{si } \partial^0 F \geqslant 1 \\ \lambda(1) = 1\ . & \end{cases}$$

Si γ désigne une racine primitive de $CG(p^n)$, on peut écrire $\alpha = \gamma^r$, et on définit $X(\alpha) = e^{2i\pi r/q-1}$ $(\alpha \neq 0)$, $X(0) = 0$. Ensuite, étant donné c entier, $0 \leqslant c < q-1$, on pose :

$$\chi(F) = \chi_c(F) = X^c(a_\nu) \ .$$

Ces fonctions λ et χ possèdent un certain nombre de propriétés qui serviront pour la suite de la démonstration et qui vont être exposées maintenant.

Comme conséquences directes de la définition, on a

(1) $$\lambda(AB) = \lambda(A)\ \lambda(B) \qquad \chi(AB) = \chi(A)\ \chi(B) \ .$$

(2) $$\sum_\lambda \lambda(F) = \begin{cases} q & \text{si } a_1 = 0 \\ 0 & \text{si } a_1 \neq 0 \end{cases} \qquad \sum_\chi \chi(F) = \begin{cases} q-1 & \text{si } a_\nu = 1 \\ 0 & \text{si } a_\nu \neq 1 , \end{cases}$$

(3) $$\sum_{\substack{F \\ \partial^0 F = \nu \geq 1 \\ \lambda \neq \lambda_0}} \lambda(F) = 0 \qquad \sum_{\substack{F \\ \partial^0 F = \nu \geq 1 \\ \chi \neq \chi_0}} \chi(F) = 0 \ .$$

On étudie enfin la somme

$$\sum_{a \in CG(p^n)} E(ba)\ X^c(a) \qquad (b \neq 0 \ , \quad c \neq 0) \ .$$

Soit donc

$$\tau = \sum E(ba)\ X^c(a) = \sum_{a \neq 0} E(ba)\ X^c(a)$$

puisque $X(0) = 0$

$$\begin{aligned} |\tau|^2 = \tau.\bar{\tau} &= \sum_{a \neq 0} E(ba)\ X^c(a) \sum_{a' \neq 0} E(-ba')\ X^c(a'^{-1}) \\ &= \sum_{a \neq 0} \sum_{a' \neq 0} E[b(a-a')]\ X^c(aa'^{-1}) = \sum_{a'' \neq 0} X^c(a'') \sum_{a' \neq 0} E[ba'(a''-1)] \\ &= \sum_{a''=1} + \sum_{a'' \neq 1} = X^c(1).q + \sum_{a'' \neq 1} X^c(a'').0 = q \end{aligned}$$

donc :

(4) $$|\tau| = \sqrt{q} \ .$$

Démonstration de $\pi(\nu\ ;\ 1\ ,\ 1)$. - On considère la série

$$L(s\ ,\ \lambda\ ,\ \chi) = \sum_F \frac{\lambda(F)\ \chi(F)}{|F|^s} \qquad (s = \sigma + i\tau\ , \quad \sigma > 1)$$

si on pose :

$$\tau_\nu = \tau_\nu(\lambda\ ,\ \chi) = \sum_{\partial^0 F = \nu} \lambda(F)\ \chi(F)$$

il vient :

$$L(s\ ,\ \lambda\ ,\ \chi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\tau_\nu(\lambda\ ,\ \chi)}{q^{\nu s}} \ .$$

Quatre cas sont alors à considérer :

1° $\lambda = \lambda_0$, $\chi = \chi_0$

$$L(s , \lambda_0 , \chi_0) = \sum_{x \not| F} \frac{1}{|F|^s} = \frac{1 - q^{-s}}{1 - q^{1-s}}$$

2° $\lambda = \lambda_0$, $\chi \neq \chi_0$

$$L(s , \lambda_0 , \chi) = \sum_F \frac{\chi(F)}{|F|^s} = 1 \qquad \text{d'après (3)}$$

3° $\lambda \neq \lambda_0$, $\chi = \chi_0$

$$L(s , \lambda , \chi_0) = \sum_{x \not| F} \frac{\lambda(F)}{|F|^s} = 1 - q^{-s} \qquad \text{d'après (3)}$$

4° $\lambda \neq \lambda_0$, $\chi \neq \chi_0$

$$L(s , \lambda , \chi) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\tau_\nu(\lambda , \chi)}{|q|^{\nu s}} \quad \text{si} \quad \tau_\nu = \sum_{a_1, a\nu} E(ba_1) \, X^c(a_\nu)$$

$$\tau_\nu(\lambda , \chi) = 0 \quad \text{si} \quad \nu \geqslant 1$$

$$|\tau_1(\lambda , \chi)| = \sqrt{q} \qquad \text{d'après (4)}$$

$$L(s , \lambda , \chi) = 1 + \frac{\tau_1(\lambda , \chi)}{q^s} .$$

Mais on a

$$L(s , \lambda , \chi) = \sum_F \frac{\lambda(F) \ \chi(F)}{|F|^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\lambda(p) \ \chi(p)}{|p|^s}}$$

ce qui donne, en prenant le logarithme,

$$\operatorname{Log} L(s , \lambda , \chi) = \sum_p \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{\lambda(p^{rs}) \ \chi(p^r)}{|p|^{rs}} \right\} .$$

Soient maintenant α , $\beta \in CG(p^n)$, $\beta \neq 0$. Si on considère la somme

$$\sum_{\lambda,\chi} E(- b\alpha) \, X^{-c}(\beta) \operatorname{Log} L(s , \lambda , \chi)$$

d'après la propriété (2), seuls les termes dont les premier et dernier coefficients sont α et β vont se trouver affectés d'un coefficient non nul lors de la sommation. Soit

$$\sum_{\lambda,\chi} E(- b\alpha) \, X^{-c}(\beta) \operatorname{Log} L(s , \lambda , \chi) = q(q - 1) \sum_{(p,r)} \frac{1}{r} \frac{1}{|p|^{rs}}$$

où le signe $\sum_{(p,r)}$ indique que la somme est étendue aux couples (p , r) tels que p^r ait pour premier et dernier coefficients α et β .

Le premier membre va avoir des termes dérivant de :

1° $\operatorname{Log} L(s, \lambda_0, \chi_0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{q^{\nu(s-1)}} - \frac{1}{q^{rs}}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \times \frac{q^{\nu} - 1}{q^{\nu s}}$

2° $\operatorname{Log} L(s, \lambda_0, \chi) = 0$

3° $\operatorname{Log} L(s, \lambda, \chi_0) = - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \frac{1}{q^{\nu s}}$

4° $\operatorname{Log} L(s, \lambda, \chi) = \sum_{0=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} \times \frac{r_1^{\nu}(\lambda, \chi)}{q^{\nu s}}$.

Quant au second membre, on aura, en désignant par $N(\nu, r)$ le nombre de p de $\partial^0 \nu/r$ et tels que p^r ait pour premier et dernier coefficients α et β :

$$\sum_{(p, r)} \frac{1}{r} \frac{1}{|p|^{rs}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \frac{w_{\nu}}{q^{\nu s}}$$

avec

$$\frac{1}{\nu} w_{\nu} = \sum_{r|\nu} \frac{1}{r} N(\nu, r)$$

soit

$$\frac{1}{\nu} w_{\nu} = N(\nu, 1) + \sum_{\substack{r|\nu \\ r\geq 2}} \frac{1}{r} N(\nu, r)$$
$$= \pi(\nu ; 1, 1) + O\left(\frac{q^{\nu/2}}{\nu}\right).$$

D'où enfin, en prenant le coefficient de $\frac{1}{q^{\nu s}}$ dans chaque membre :

$$\frac{1}{\nu} \{q^{\nu} - 1 - \sum_{b} E(-b\alpha) + (-1)^{\nu-1} \sum_{\substack{\lambda \neq \lambda_0 \\ \chi \neq \chi_0}} E(-b\alpha)\, \chi^{-c}(\beta)\, \tau_1^{\nu}(\lambda, \chi)\}$$
$$= q(q-1) \{\pi(\nu ; 1, 1) + O(\frac{q^{\nu/2}}{\nu})\}.$$

ce qui, en tenant compte de $|\tau_1| = \sqrt{q}$, soit $|\tau_1^{\nu}| = q^{\nu/2}$, démontre la formule de Carlitz.

On peut remarquer dès maintenant que l'hypothèse de Riemann pour les séries $L(s, \lambda, \chi)$ est vraie d'après $|\tau_1(\lambda, \chi)| = \sqrt{q}$, ce qui entraîne en outre $O(q^{\nu/2})$ pour la formule.

<u>Démonstration de</u> $\pi(\nu ; 0, 2)$. - Cette démonstration est très semblable à la précédente. Au lieu de définir $\lambda(F)$ et $\chi(F)$, on définit $\tilde{\lambda}(F)$ et $\chi(F)$:

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}(F) = \tilde{\lambda}_b(F) = E\left(b\, \frac{a_{\nu-1}}{a_{\nu}}\right) \quad \text{si } \partial^0 F \geq 1, \quad a_{\nu} \neq 0 \\ \tilde{\lambda}(1) = 1 \quad \text{et} \quad \tilde{\lambda}(F) = 0 \quad \text{si } a_{\nu} = 0 \quad ; \end{cases}$$

et on termine la démonstration en utilisant :

$$L(s\ ,\ \tilde{\lambda}\ ,\ \chi) = \sum_F \frac{\tilde{\lambda}(F)\ \chi(F)}{|F|^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\tilde{\lambda}(p)\ \chi(p)}{|p|^s}} .$$

On peut faire la même remarque sur l'hypothèse de Riemann pour les séries $L(s\ ,\ \tilde{\lambda}\ ,\ \chi)$ et pour $O(q^{\nu/2})$.

5. Derniers résultats d'UCHIYAMA.

Les résultats précédents peuvent se généraliser, mais on perd $O(q^{\nu/2})$. En 1955, UCHIYAMA [8], a démontré la formule suivante :

$$\pi(\nu\ ;\ r\ ,\ t) = \frac{1}{\nu}\ q^{\nu-r-t}\left(\frac{q}{q-1}\right)^{\varepsilon} + O(q^{\theta\nu}) \qquad (\nu \to \infty)$$

sous la condition $p > \max(r\ ,\ t-1)$, θ étant une constante indépendante de q et de ν , $\frac{1}{2} \leqslant \theta < 1$ (ε étant égal à 0 ou 1 suivant que $t = 0$ ou $t \geqslant 1$, cf. début du paragraphe 4).

Pour sa démonstration, UCHIYAMA généralise les caractères sur $CG(p^n)$ employés par CARLITZ et considère des séries du même type $L(s\ ,\ \lambda^{(r)}\ ,\ \tilde{\chi}^{(t-1)}\ ,\ \chi)$ qu'on n'explicitera pas ici.

Hypothèse de Riemann pour les séries $L(s\ ,\ \lambda\ ,\ \tilde{\lambda}\ ,\ \chi)$. - Si cette hypothèse était vérifiée, on aurait $\theta = \frac{1}{2}$. On peut considérer cette hypothèse comme très probable. En effet UCHIYAMA [8] remarque que cette hypothèse permettrait de démontrer la conjecture de MORDELL (1946) légèrement généralisée, à savoir :

$$\left| \sum_{x \in CG(p^n)} e^{2i\pi t\{f(x)\}/p} \right| \leqslant (\nu - 1)\ q^{1/2} \quad (\nu = \partial^0 f) .$$

Or cette dernière inégalité a été démontré par CARLITZ et UCHIYAMA en 1957 [10] à partir de l'hypothèse de Riemann par André WEIL pour les variétés algébriques, sous réserve que f ne soit pas de la forme $g^p - g + u$, $u \in CG(p^n)$ (ce qui est le cas en particulier si $\partial^0 f \leqslant p - 1$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARLITZ (Leonard). - The arithmetic of polynomials in a Galois field, Amer. J. of Math., t. 54, 1932, p. 39-70.
(Fonctions arithmétiques. Loi de réciprocité quadratique.)

[2] CARLITZ (Leonard). - On the representation of a polynomial in a Galois field as the sum of an even number of squares, Trans. Amer. math. Soc., t. 35, 1933, p. 397-410.

[3] CARLITZ (Leonard). - Some topics in the arithmetic of polynomials, Bull. Amer. math. Soc., t. 48, 1942, p. 679-691.

(Fonctions arithmétiques. Sommes de carrés.)

[4] COHEN (Eckford). - Sums of an even number of squares in $GF[p^n , x]$, Duke math. J., t. 14, 1947, p. 251-267.

[5] COHEN (Eckford). - Arithmetic functions of polynomials, Proc. Amer. math. Soc., t. 3, 1952, p. 352-358.

(Problème type Goldbach.)

[6] CARLITZ (Leonard). - A theorem of Dickson on irreductible polynomials, Proc. Amer. math. Soc., t. 3, 1952, p. 693-700.

[7] UCHIYAMA (Saburô). - Sur les polynômes irréductibles dans un corps fini, I., Proc. Japan Acad., Tokyo, t. 30, 1954, p. 523-527.

[8] UCHIYAMA (Saburô). - Sur les polynômes irréductibles dans un corps fini, II., Proc. Japan Acad., Tokyo, t. 31, 1955, p. 267-269.

[9] UCHIYAMA (Saburô). - Note on the mean value of $V(f)$, I, II et III, Proc. Japan Acad., Tokyo, t. 31, 1955, p. 199-201 et p. 321-323 ; t. 32, 1956, p. 97-98.

($V(f)$ est le nombre de valeurs distinctes prises par un polynôme f .)

[10] CARLITZ (L.) et UCHIYAMA (S.). - Bounds for exponential sums, Duke math. J., t. 24, 1957, p. 37-41.