Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres

JEAN-PAUL BERTRANDIAS

Applications des nombres Θ

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 3 (1961-1962), exp. nº 12, p. 1-21

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1961-1962__3__A7_0>

Séminaire DELANGE-PISOT
(Théorie des nombres)
3e année, 1961/62, n° 12

2 avril 1962

APPLICATIONS DES NOMBRES θ

par Jean-Paul BERTRANDIAS

A. Caractérisation des nombres algébriques.

1. Approximations simultanées des nombres algébriques.

Le théorème de Minkowski permet de démontrer le résultat suivant (voir : CASSELS [2]).

THÉORÈME I. - *Etant donnés* μ *nombres réels* $\alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_\mu$, *le système d'inéquations*

$$|q\alpha_i - p_i| < \frac{\mu}{\mu + 1} \times \frac{1}{q^{1/\mu}} \tag{1}$$

a une infinité de solutions en nombres entiers $(q , p_1 , p_2 , \dots , p_\mu)$.

Soit ξ un nombre algébrique réel de degré $\mu + 1$. On va montrer que les approximations simultanées des μ nombres réels $\xi , \xi^2 , \xi^3 , \dots , \xi^\mu$ ne peuvent pas être "bien meilleures" que celles données par le théorème I.

Pour cela, on utilise une propriété des nombres algébriques : la quantité

$$\tau = x_0 + x_1 \xi + x_2 \xi^2 + \dots + x_\mu \xi^\mu \quad , \tag{2}$$

où les x_i sont des entiers rationnels, reste toujours assez loin de zéro en un certain sens :

$$\tau \geqslant \frac{C_1}{X^\mu} \quad \text{si} \quad 0 < |x_i| \leqslant X \quad . \tag{3}$$

En effet, il existe un entier rationnel ℓ tel que $\ell\xi$ soit un entier algébrique. $\ell^\mu \tau$ est alors un entier algébrique dont la norme dans le corps de ξ est non nulle :

$$\ell^{\mu(\mu+1)} \, |\tau\tau_1 \, \tau_2 \, \ldots \, \tau_\mu| \geqslant 1 \qquad (\tau_j = \text{conjugués de } \tau) \quad .$$

Or

$$(4) \qquad |\tau_j| = |x_{j0} + x_{j1}\,\xi + \ldots + x_{j\mu}\,\xi^\mu| < C_2\,X$$

où C_2 ne dépend que de ξ et non des x. On a donc :

$$(5) \qquad |\tau C_2^\mu \, X^\mu| \geqslant \frac{1}{\ell^{\mu(\mu+1)}}$$

ce qui donne bien l'inégalité (3).

Supposons maintenant que le système d'inéquations

$$(6) \qquad |q\xi^i - p_i| \leqslant \frac{C}{q^{1/\mu}}$$

ait une infinité de solutions. On sait déjà, par le théorème I, que la constante C peut être prise inférieure à $\frac{\mu}{\mu+1}$; on va montrer qu'on ne peut pas la prendre arbitrairement petite.

Considérons l'équation diophantienne en x_0, x_1, ..., x_μ :

$$(7) \qquad qx_0 + p_1\,x_1 + p_2\,x_2 + \ldots + p_\mu\,x_\mu = 0 \quad .$$

Le principe des tiroirs montre qu'elle a une solution (autre que la solution identiquement nulle) telle que :

$$\begin{cases} (8) \quad |x_i| < q^{1/\mu} \qquad i = 1, 2, \ldots, \mu \\ (9) \quad |x_0\,q| < \mu q^{1/\mu}\,P \qquad P = \max|p_i| \end{cases} \quad .$$

Comme

$$(10) \qquad |p_i| < q\xi^j + \frac{C}{q^{1/\mu}} < C_3\, q \qquad ,$$

l'équation (7) a une solution telle que :

$$(11) \qquad |x_i| < C_4\, q^{1/\mu} \quad \text{pour} \quad i = 0 \,,\, 1 \,,\, 2 \,,\, \dots \,,\, \mu \qquad .$$

Formons alors la combinaison :

$$(12) \qquad \tau' = x_1(q\xi - p_1) + x_2(q\xi - p_2) + \dots + x_\mu(q\xi^\mu - p_\mu) \qquad .$$

D'après (7) :

$$(13) \qquad \tau' = q(x_0 + x_1\,\xi + x_2\,\xi^2 + \dots + x_\mu\,\xi^\mu) \qquad .$$

D'après (6), (8), et (12) :

$$(14) \qquad \tau' \leqslant \frac{C}{q^{1/\mu}} . \mu . q^{1/\mu} = C_\mu \qquad .$$

D'après (3), (11) et (13) :

$$(15) \qquad \tau' \geqslant q \frac{C_1}{(C_4\, q^{1/\mu})^\mu} = \frac{C_1}{C_4^\mu} \qquad .$$

Donc

$$(16) \qquad C \geqslant \frac{C_1}{\mu C_4^\mu} = C_5$$

qui est une constante indépendante de q . On voit donc que pour les approximations simultanées des nombres algébriques, la meilleure limitation des quantités $|q\xi^i - p|$ est effectivement de l'ordre de $\frac{1}{q^{1/\mu}}$.

2. Approximation des nombres quadratiques.

Soit ξ un irrationnel quadratique. Le théorème I dit que l'inéquation

$$(1) \qquad |q\xi - p| \leqslant \frac{1}{2q}$$

a une infinité de solutions.

On sait (voir : [1] et [4]) que ces solutions sont telles que $\frac{p}{q} = \frac{p_k}{q_k}$, $\frac{p_k}{q_k}$ étant les "réduites" de ξ qui s'obtiennent par l'algorithme des fractions continues.

Le théorème suivant caractérise les irrationnels quadratiques (réels) :

THÉORÈME II (LAGRANGE. Voir [1]). – Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre réel soit un irrationnel quadratique réel est que son développement en fraction continue soit périodique.

On peut chercher à traduire ce théorème sur la suite des solutions en p et q de (1).

THÉORÈME III. – Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre réel soit un irrationnel quadratique réel est qu'il existe une suite de solutions de (1) qui soient "presque" en progression géométrique, c'est-à-dire telle qu'on puisse trouver un nombre $\omega > 1$ tel que :

$$(2) \qquad |Q_{h+1} - \omega Q_h| < \frac{K}{Q_h}$$

K étant une constante ne dépendant que de ξ.

a. La condition est nécessaire. – D'après le théorème II, le développement de ξ est périodique :

$$\xi = [a_0 , a_1 , \dots , a_i , \overline{b_0 , b_1 , \dots , b_j} , \overline{b_0 , b_1 , \dots , b_j} , \overline{b_0 , \dots}] .$$

Soient $\frac{P_0}{Q_0} , \frac{P_1}{Q_1} , \dots , \frac{P_h}{Q_h}$ les réduites de ξ définies par :

$$\frac{P_0}{Q_0} = [a_0 , a_1 , \dots , a_i]$$

$$\frac{P_1}{Q_1} = [a_0 , a_1 , \dots , a_i , b_0 , b_1 , \dots , b_j]$$

$\dots$

$$\frac{P_h}{Q_h} = [a_0 , a_1 , \dots , a_i , \overline{b_0 , \dots b_j} , \overline{b_0 , \dots , b_j} , \overline{b_0 , \dots , b_j}]$$

et soient $\frac{p'}{q'}$ et $\frac{p''}{q''}$ la dernière et l'avant-dernière réduites de

$$[b_0 , b_1 , \dots , b_j] \quad .$$

Un calcul élémentaire, mais assez long, montre que Q_h vérifie la relation de récurrence :

$$Q_{h+1} = (p' + q'')Q_h - (-1)^{j+1} Q_{h-1} \quad .$$

On a donc

$$Q_h = \lambda\omega_1^h + \mu\omega_2^h \quad ,$$

ω_1 et ω_2 étant les racines de l'équation

$$\omega^2 - (p' + q'')\omega - (-1)^j = 0$$

$(\omega_1 > 1)$ et $|\omega_1| < 1)$, λ et μ étant des nombres algébriques du corps de ω_1 dépendant des deux premiers termes Q_0 et Q_1 :

$$\lambda + \mu = Q_0 , \qquad \lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = Q_1 \quad .$$

On peut alors écrire :

$$Q_{h+1} - \omega_1 Q_h = \mu\omega_2^h [\omega_2 - \omega_1] = \frac{\mu(-1)^j}{\omega_1^h} [\omega_2 - \omega_1]$$

et par suite il existe une constante K telle que :

$$|Q_{h+1} - \omega_1 Q_h| < \frac{K}{Q_h} \quad ,$$

Les Q_h étant des dénominateurs de réduites de ξ , ils sont bien solutions de (1) et la condition exprimée par (2) est bien nécessaire pour que ξ soit un irrationnel quadratique réel.

b. La condition est suffisante. - Supposons qu'il existe une suite de solutions Q_h de (1) satisfaisant à (2). On remarque d'abord que P_h satisfait à une inégalité de la même forme (2) avec le même nombre ω :

$$(2') \qquad |P_{h+1} - \omega P_h| < \frac{\xi K}{Q_h} + \frac{\omega + 1}{2Q_h} < \frac{K'}{Q_h} < \frac{H}{P_h} \quad .$$

A partir de (2), on obtient :

$$\left| \frac{Q_{h+1}}{\omega^{h+1}} - \frac{Q_h}{\omega^h} \right| < \frac{K}{Q_h \, \omega^{h+1}} \quad .$$

Un calcul analogue à celui fait pour les nombres α ([I], § 9) montre que :

$$Q_h = \lambda\omega^h + \zeta_h \quad \text{avec} \quad |\zeta_h| < \frac{K}{\omega^h(\omega - 1)} \quad .$$

La série $\sum\limits_{h=1}^{\infty} |\zeta_h|^2$ est convergente, ω est donc un nombre θ_∞ ([I], théorème III) de degré s, et λ appartient au corps de ω. La série $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \zeta_h z^h$ a un rayon de convergence $R \geq \omega$, donc les conjugués $\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s$ de ω ont un module inférieur à $\frac{1}{\omega}$. Or la norme de ω est un entier positif. On peut donc écrire :

$$1 \leq |\omega\omega_2 \cdots \omega_s| \leq \frac{\omega}{\omega^{s-1}} \quad ,$$

ce qui n'est possible que pour $s = 2$. Par suite ω est un entier quadratique et λ un nombre quadratique.

A partir de (2') on aurait de même

$$P_h = \mu\omega^h + \zeta'_h$$

μ appartenant aussi au corps de ω et étant par suite quadratique.

Comme

$$\xi = \lim_{h \to \infty} \frac{P_h}{Q_h} = \frac{\lambda}{\mu} \quad ,$$

on voit que ξ est bien un nombre quadratique.

3. Approximation des nombres algébriques.

On pourrait penser qu'il existe pour les nombres algébriques de degré supérieur des critères analogues à celui de Lagrange. En réalité, l'algorithme des fractions continues se généralise très mal au cas de l'approximation simultanée de plusieurs irrationnels.

JACOBI [5] a trouvé un algorithme qui est périodique dans le cas de certains irrationnels cubiques. On n'a pas pu en tirer de critère général. MINKOWSKI [6] et FURTWÄNGLER [3] ont aussi trouvé des algorithmes permettant de caractériser les nombres algébriques, mais ils ne sont pas d'utilisation très facile.

Il est alors naturel de se demander si le théorème III, qui est équivalent au critère de Lagrange, ne fournit pas une généralisation plus aisée.

Introduisons d'abord une définition : on dira qu'un nombre réel ξ admet des approximations simultanées régulièrement réparties si le système fournissant des approximations simultanées :

$$(1)\qquad \begin{aligned} &|u_n \xi - v_{1,n}| < \frac{C}{u_n^\eta} \\ &|u_n \xi^2 - v_{2,n}| < \frac{C}{u_n^\eta} \\ &\cdots \\ &|u_n \xi^\mu - v_{\mu,n}| < \frac{C}{u_n^\eta} \end{aligned} \qquad \text{avec } \eta \leqslant \frac{1}{\mu}$$

a des solutions telles que les u_n soient "presque" en progression géométrique c'est-à-dire que :

$$(2)\qquad |u_{n+1} - \omega u_n| < \frac{K}{u_n^\eta} \quad .$$

Le critère cherché est alors donné par le théorème suivant :

THÉORÈME IV (PISOT [7]). - Les approximations simultanées régulièrement réparties caractérisent les nombres algébriques réels.

On démontrera le théorème équivalent :

THÉORÈME IV'. - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre réel ξ soit algébrique est qu'il ait des approximations rationnelles régulièrement réparties c'est-à-dire qu'il existe une suite de couples d'entiers (u_n , v_n) et un nombre réel $\omega > 1$ tels que :

$$|u_n \xi - v_n| < \frac{C}{u_n^\eta} \tag{3}$$

$$|u_{n+1} - \omega u_n| < \frac{K}{u_n^\eta} \quad . \tag{4}$$

1° Les nombres algébriques ont des approximations rationnelles régulièrement réparties.

Un nombre algébrique ξ d'un corps $\mathcal{C}$ de degré s et de discriminant Δ^2 est le quotient de deux entiers β et γ du corps $\mathcal{C}$.

$$\xi = \frac{\beta}{\gamma} \quad .$$

ω étant un nombre θ du corps $\mathcal{C}$, posons

$$v_n = \beta\omega^n + \beta_2 \omega_2^n + \dots + \beta_s \omega_s^n$$

$$u_n = \gamma\omega^n + \gamma_2 \omega_2^n + \dots + \gamma_s \omega_s^n$$

et montrons que les entiers u_n et v_n satisfont à (3) et (4).

Soit ρ le plus grand des modules des conjugués de ω

$$\rho = \max_{i=2,3,\dots,s} |\omega_i| < 1 \quad .$$

On a

$$|u_n \xi - v_n| < C_1 \rho^n$$

$$|u_{n+1} - \omega u_n| < K\rho^n \qquad .$$

Si on pose

$$\rho = \frac{1}{\omega^\eta} \qquad (\eta > 0) \qquad ,$$

on a

$$1 \leqslant |\omega\omega_2 \ldots \omega_s| \leqslant \omega\rho^{s-1} = \omega^{1-\eta(s-1)}$$

donc

$$\eta \leqslant \frac{1}{s-1} \qquad .$$

- a. <u>Si $\eta = \frac{1}{s-1}$</u> , ω est alors une unité et les modules de tous ses conjugués sont égaux. MINKOWSKI a montré que ce cas ne peut se présenter que si $s = 2$ (ξ nombre quadratique) ou si $s = 3$, les deux conjugués de ω étant imaginaires conjugués.

- b. <u>Si $\eta < \frac{1}{s-1}$</u> . On peut choisir le nombre ω de manière que η soit arbitrairement voisin de $\frac{1}{s-1}$. En effet d'après [I], théorème IV, on a pu choisir ω tel que :

$$\omega\rho^{s-1} \leqslant |\Delta|$$

ce qui donne :

$$\eta \geqslant \left(1 - \frac{\log |\Delta|}{\log \omega}\right) \frac{1}{s-1} \qquad ;$$

mais on aurait pu choisir une puissance positive arbitraire de ω ce qui rapproche η de $\frac{1}{s-1}$.

Finalement, étant donné $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on peut trouver ω tel que :

$$|u_n \xi - v_n| < \frac{C_2}{u_n^\eta}$$

avec $\frac{1}{s-1} - \varepsilon < \eta \leqslant \frac{1}{s-1}$.

$$|u_{n+1} - \omega u_n| < \frac{K_2}{u_n^\eta}$$

ξ , nombre algébrique de degré s , a donc des approximations rationnelles régulièrement réparties presqu'aussi bonnes que les meilleures approximations simultanées de ξ , ξ^2 , ... , ξ^{s-1} .

2° Si un nombre réel a des approximations rationnelles régulièrement réparties, il est algébrique.

Hypothèse :

$$\begin{cases} (3) \qquad |u_n \xi - v_n| < \dfrac{C}{u_n^\eta} \\ \\ (4) \qquad |u_{n+1} - \omega u_n| < \dfrac{K}{u_n^\eta} \end{cases}$$

La seconde inégalité, traitée comme au § 2, b, montre que :

$$u_n = \lambda\omega^n + \zeta_n \quad \text{avec} \quad |\zeta_n| < \frac{K}{u_n^\eta(\omega - 1)}$$

ω est un nombre θ et λ appartient au corps de ω .

Les conjugués de ω ont un module inférieur à $\frac{1}{\omega^\eta} = \rho$. Si s est le degré de ω , on doit avoir :

$$1 \leqslant \omega\rho^{s-1} = \omega^{1-\eta(s-1)}$$

donc

$$s \leqslant 1 + \frac{1}{\eta} \quad .$$

Comme les deux inégalités (3) et (4) entraînent

$$|v_{n+1} - \omega v_n| < \frac{H}{v_n^{\eta}} ,$$

on a de même

$$v_n = \mu\omega^n + \zeta_n$$

μ appartenant au corps de ω . On a alors

$$\xi = \frac{\lambda}{\mu}$$

qui est bien un nombre algébrique. Son degré est inférieur ou égal à $1 + \frac{1}{\eta}$.

4. Calcul numérique des approximations régulières.

Les suites u_n et v_n se calculent facilement par le procédé récurrent R (voir [I], § 8).

$$w_{n+1} = \text{ entier le plus proche de } \frac{w_n^2}{w_{n-1}} .$$

On obtient ainsi rapidement d'excellentes approximations de tout nombre algébrique.

B. Ensembles d'unicité des séries trigonométriques.

1. Généralités. Définitions.

La théorie des séries de Fourier permet d'associer à une fonction $f(x)$, périodique et intégrable, une certaine série trigonométrique qui représente la fonction $f(x)$ d'une certaine façon (convergence locale, convergence dans L^2 , etc.).

Inversement, on peut se demander si une fonction $f(x)$ peut être représentée par une série trigonométrique qui peut éventuellement ne pas être la série de Fourier (par exemple si $f(x)$ n'est pas intégrable). La représentation dont on s'occupera sera celle de la <u>convergence locale</u> : on dira que $f(x)$ est <u>représentée</u>

par la série trigonométrique (S) :

$$a_n \cos 2\pi nx + b_n \sin 2\pi nx$$

si (S) converge vers $f(x)$ en tout point x où $f(x)$ est définie.

Un problème important sera celui de savoir dans quel cas la représentation est unique. Le théorème fondamental est le suivant :

THÉORÈME I (CANTOR. Voir [16]). - Si la série (S) converge pour tout x vers $f(x)$, (S) est la seule série trigonométrique représentant $f(x)$.

Si on n'impose plus la convergence de (S) en tout point de l'intervalle $[0, 1]$ c'est-à-dire si $f(x)$ est définie sur un ensemble $\mathcal{E} \subset [0, 1]$, on pourra classer les ensembles $E = \complement\mathcal{E}$ sur lesquels la fonction $f(x)$ n'est pas définie en deux catégories :

- Les ensembles d'unicité (U). - E est un ensemble (U) si toute série trigonométrique convergeant vers zéro sur $\mathcal{E}$ a ses coefficients nuls. La représentation d'une fonction $f(x)$ définie sur $\mathcal{E}$ est alors unique.

- Les ensembles de multiplicité (M). - Ce sont les ensembles qui ne sont pas des ensembles (U). Si E est un ensemble (M), on peut trouver plusieurs séries trigonométriques distinctes qui convergent sur $\mathcal{E}$ vers une même fonction.

Les premiers résultats sur cette question sont dus à CANTOR (1872). Le théorème I montre que l'ensemble vide est un ensemble d'unicité. CANTOR a démontré que si E est fini ou si son ensemble dérivé E' est fini ou plus généralement si E est réductible (c'est-à-dire si E admet l'ensemble vide comme ensemble dérivé d'ordre fini ou transfini), alors E est un ensemble d'unicité. Plus tard (vers 1910) YOUNG a montré que tout ensemble dénombrable est un ensemble (U).

Dans l'autre sens, tout ensemble de mesure $|E| > 0$ est un ensemble de multiplicité. Pour le voir, il suffit de développer en série de Fourier la fonction caractéristique de E : le premier coefficient n'est certainement pas nul.

MENCHOFF (1916) a construit un ensemble de mesure nulle E et une série trigonométrique non identiquement nulle convergeant vers zéro sur $\mathcal{E}$. Ainsi se trouvait posé le problème de la classification des ensembles de mesure nulle en ensembles (U) ou (M).

Le théorème de localisation (voir [16]) montre qu'on peut se ramener à considérer uniquement des ensembles parfaits c'est-à-dire n'ayant pas de points isolés.

Le problème de la classification des ensembles parfaits de mesure nulle en ensembles (U) ou (M) n'est pas encore complètement résolu ; il fait intervenir des propriétés assez profondes de la structure des ensembles. On se limitera à l'étude d'une certaine classe d'ensembles parfaits (ensembles de Cantor, symétriques, à rapport constant ξ) pour lesquels les deux éventualités sont réalisées, la distinction entre les deux se faisant d'après la nature arithmétique de ξ .

2. Méthodes utilisées.

On va donner sans démonstrations les raisonnements qui conduisent à des conditions utilisables (voir ZYGMOND [16]).

a. Conditions pour qu'un ensemble soit un ensemble (M) . - D'après le théorème de Cantor-Riemann, la convergence de (S) dans un ensemble $\mathcal{E}$ de mesure positive entraîne que a_n et b_n tendent vers zéro lorsque $n \to \infty$. L'intégrale formelle de (S) est alors une série de Fourier.

Pour montrer qu'un ensemble est un ensemble (M) il faut et il suffit alors qu'on puisse construire une fonction $F(x)$ constante sur chaque intervalle fermé de $\mathcal{E}$ mais non constante sur $(0 , 1)$ et ayant des coefficients de Fourier qui soient $o(\frac{1}{n})$. En effet la série obtenue par dérivation formelle de la série de Fourier de $F(x)$ converge alors vers zéro sur $\mathcal{E}$ et n'est pas identiquement nulle.

Si $F(x)$ est à variation bornée, la série (S) qui lui correspond est une série de Fourier-Stieltjes. Donc pour qu'un ensemble E soit un ensemble (M) , il suffit de construire une fonction $F(x)$ continue, non décroissante, constante sur chaque intervalle fermé de $\mathcal{E}$, mais croissante de 0 à 1 lorsque x parcourt $(0 , 1)$ et dont les coefficients de Fourier-Stieltjes

$$C_n = \int_0^1 \exp(2i\pi nx)\ dF(x)$$

tendent vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

b. Conditions pour qu'un ensemble soit un ensemble (U) . - Il est difficile d'utiliser les mêmes méthodes. En effet, il faudrait montrer qu'on ne peut trouver aucune fonction (à variation bornée ou non) constante dans chaque intervalle fermé de $\mathcal{E}$ et dont les coefficients de Fourier-Stieltjes soient $o(\frac{1}{n})$. On ne s'est jamais servi de cette méthode.

Pour les classes connues d'ensembles d'unicité, on a fait une démonstration utilisant directement la définition : si (S) converge vers zéro sur l'ensemble complémentaire, les coefficients a_n et b_n sont nuls. C'est ainsi qu'on obtient les résultats de CANTOR et YOUNG cités plus haut ainsi qu'un théorème plus général.

THÉORÈME II (ZYGMUND [16]). - Si E est non dénombrable mais ne contient aucun ensemble parfait, E est un ensemble d'unicité.

D'autres classes importantes d'ensembles d'unicité sont :

α. Les ensembles (H) de Rajchman. - Etant donnés un intervalle ouvert Δ du tore de longueur 1 et une suite croissante d'entiers $\{u_k\}$, on considère l'ensemble des points x tels que $u_k x$ n'appartienne à Δ pour aucune valeur de k. Un tel ensemble est appelé un ensemble (H).

RAJCHMAN et N. BARY ont démontré (1922-1927) que ce sont des ensembles (U).

β. Les ensembles $(H^{(\nu)})$ de Pjateckij-Šapiro. - C'est la généralisation à ν dimensions des ensembles (H).

On généralise d'abord la notion de suite croissante de la façon suivante : une suite de vecteurs à coordonnées entières de $R^{\nu}\{u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \ldots, u_n^{(\nu)}\}$ est dite "normale" si quels que soient les entiers fixes $a_1, a_2, \ldots a_{\nu}$, on a :

$$|a_1 u_k^{(1)} + a_2 u_k^{(2)} + \ldots + a_{\nu} u_k^{(\nu)}| \to \infty \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty \quad .$$

Etant alors donnés une suite normale $\{u_k^{(1)}, \ldots, u_k^{(\nu)}\}$ et un ensemble ouvert Δ du tore à ν dimensions, on considère l'ensemble des points x tels que le point de coordonnées $u_k^{(1)} x, u_k^{(2)} x, \ldots, u_k^{(\nu)} x$ n'appartienne jamais à Δ. Un tel ensemble est appelé un ensemble $(H^{(\nu)})$ et PJATECKIJ-ŠAPIRO a montré en 1953 que ces ensembles sont des ensembles d'unicité.

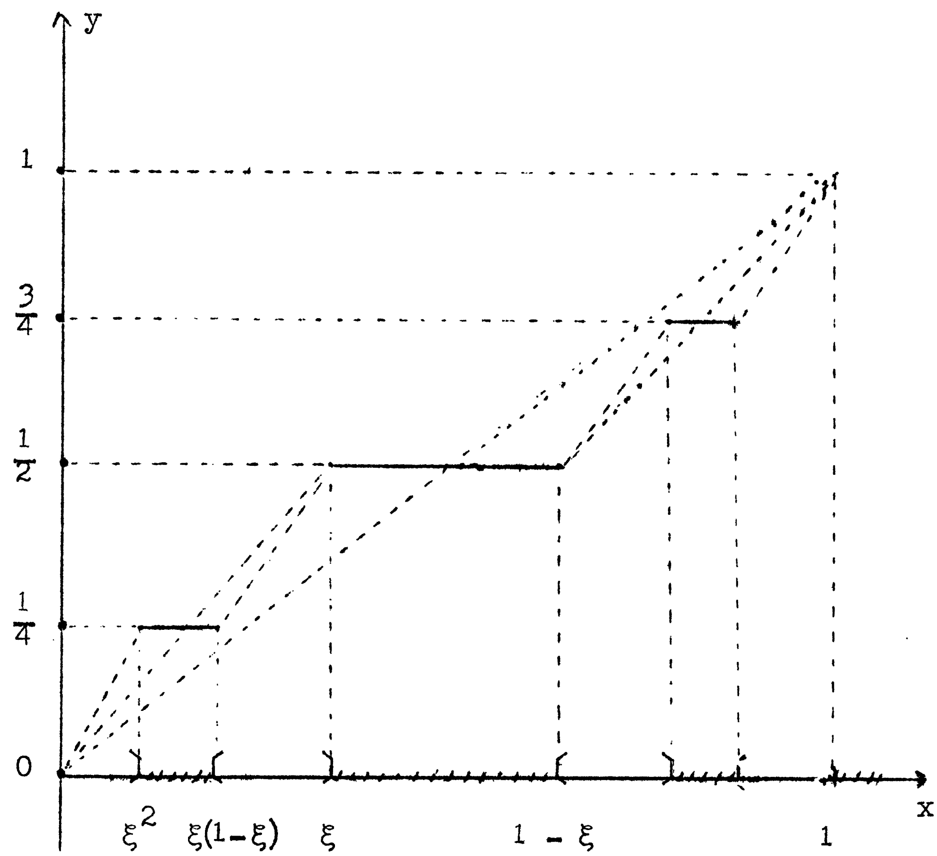
Ces classes d'ensembles (U) peuvent donner des ensembles (U) plus généraux par des opérations simples, mais les théorèmes ne sont pas triviaux car, par exemple, si E_1 et E_2 sont des ensembles (U) (du type du théorème II), $E_1 \cup E_2$ peut être un ensemble (M). On ne connaît pas de théorème général ; deux théorèmes importants dus à N. BARY sont les suivants (voir [16]) :

THÉORÈME III. - Une somme finie ou infinie dénombrable d'ensembles (U) fermés est un ensemble (U) .

THÉORÈME IV. - Etant donné un ensemble E , on note E_λ l'ensemble homothétique de E dans une homothétie de centre 0 et de rapport $\lambda > 0$. Si E et E_λ appartiennent tous deux à $[0 , 1]$, si E est un ensemble (U) , E_λ est aussi un ensemble (U) .

3. Ensembles parfaits symétriques à rapport constant.

A l'aide de ces méthodes, on va étudier une classe d'ensembles parfaits de mesure nulle construits comme l'ensemble triadique de Cantor.



Soit ξ un nombre positif inférieur à $\frac{1}{2}$. On enlève du segment $[0 , 1]$ l'intervalle ouvert $]\xi , 1 - \xi[$.

Sur les deux segments restants, on répète l'opération en les divisant en trois segments proportionnels à ξ , $(1 - 2\xi)$, ξ , et en enlevant l'intervalle médian. Sur les quatre segments restants, on répète l'opération, etc.

Après la k-ième opération, on obtient un ensemble J_k formé de 2^{k+1} intervalles fermés de longueur ξ^k. On appellera $J(\xi)$ l'intersection de tous les J_k. $J(\xi)$ est un ensemble de mesure nulle ($2^{k+1}\xi^k$ tend vers zéro), parfait (tout point de $J(\xi)$ est point d'accumulation de points de $J(\xi)$) et nulle part dense. $J(\frac{1}{3})$ est l'ensemble triadique de Cantor.

L'abscisse d'un point de $J(\xi)$ peut se représenter par :

(1) $$x = \varepsilon_1(1-\xi) + \varepsilon_2\,\xi(1-\xi) + \varepsilon_3\,\xi^2(1-\xi) + \dots +$$

(2) $$= (\frac{1}{\xi} - 1)(\varepsilon_1\,\xi + \varepsilon_2\,\xi^2 + \dots + \varepsilon_k\,\xi^k + \dots)$$

avec $\varepsilon_i = 0$ ou 1. Chaque point de $J(\xi)$ peut être mis en correspondance avec le point de $[0, 1]$ représenté dans le système à base 2 par le développement :

$$y = \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \dots + \frac{\varepsilon_k}{2^k} + \dots \quad .$$

La correspondance entre $J(\xi)$ et $[0, 1]$ est biunivoque : $J(\xi)$ a la puissance du continu.

La fonction continue, qui a pour valeur $y(x)$ en un point x de $J(\xi)$ et qui est constante sur chaque intervalle contigu à $J(\xi)$, est appelée la fonction de Lebesgue construite sur $J(\xi)$. Sa valeur est $\frac{1}{2}$ sur le premier intervalle enlevé, $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ sur les suivants, etc. C'est une fonction singulière pure (fonction continue, à dérivée nulle presque partout, mais non constante).

4. Classification des ensembles $J(\xi)$.

a. Ensembles de multiplicité (SALEM [10], [11], [12]). - On va prendre comme fonction $F(x)$ du § 2, a, la fonction de Lebesgue construite sur $J(\xi)$. Les coefficients de Fourier-Stieltjes sont donnés par :

$$c_n = \int_0^1 \exp(2i\pi nx)\, dF(x) \quad .$$

Par approximations successives on trouve que :

(1) $$c_n = \exp(i\pi n) \prod_{k=0}^{\infty} \cos \pi n(1-\xi)\,\xi^k \quad .$$

Pour savoir si C_n tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, on va étudier le produit infini :

(2) $$P(u) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos \pi u\, \xi^k \quad .$$

On a

(3) $$C_n = \exp(i\pi n)\ P\left(\frac{n\xi}{1 - \xi}\right) \quad .$$

Supposons que $P(u)$ ne tende pas vers zéro lorsque u augmente indéfiniment (par valeurs quelconques). Il existe une suite croissante u_s tendant vers l'infini et telle que :

(4) $$|P(u_s)| \geqslant \delta > 0 \quad .$$

Posons $\omega = \frac{1}{\xi}$, et définissons λ_s et m_s par :

(5) $$u_s = \lambda_s\ \omega^{m_s} \qquad \begin{cases} m_s \text{ entier} \\ 1 \leqslant \lambda_s < \omega \end{cases} \quad .$$

En prenant seulement m_s termes dans $P(u)$, on a encore :

(6) $$|\cos \pi\lambda_s\ \omega^{m_s-1} \cdot \cos \pi\lambda_s\ \omega^{m_s-2} \dots \cos \pi\lambda_s| \geqslant \delta$$

ou en élevant au carré :

(7) $$(1 - \sin^2 \pi\lambda_s)(1 - \sin^2 \pi\lambda_s\ \omega)\dots(1 - \sin^2 \pi\lambda_s\ \omega^{m_s-1}) \geqslant \delta^2 \quad .$$

En utilisant alors l'inégalité $1 + x \leqslant e^x$:

(8) $$\exp(- \sin^2 \pi\lambda_s) \cdot \exp(- \sin^2 \pi\lambda_s\ \omega) \dots \exp(- \sin^2 \pi\lambda_s\ \omega^{m_s-1}) \geqslant \delta^2$$

ou

$$(9) \qquad \sin^2 \pi\lambda_s + \sin^2 \pi\lambda_s \omega + \dots + \sin^2 \pi\lambda_s \omega^{m_s - 1} \leq \log \frac{1}{\delta^2} \quad .$$

D'après (5) on peut extraire de la suite des u_s une suite u_s^* telle que les λ_s^* convergent vers un nombre λ. m étant un entier fixe, on peut appliquer (9) à la suite u_s^* en prenant simplement m termes. On obtient :

$$\sum_{k=1}^{m} \sin^2 \pi\lambda\omega^k \leq \log \frac{1}{\delta^2}$$

m pouvant être choisi arbitrairement grand, on voit que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin^2 \pi\lambda\omega^k$$

est convergente. D'après [I], théorème III, ω est un nombre θ.

Si $P(u)$ ne tend pas vers zéro, c'est que ω est un nombre θ. Par suite, <u>si</u> $\omega = \frac{1}{\xi}$ <u>n'est pas un nombre</u> θ, le coefficient C_n tend vers zéro et d'après § 2, a, <u>l'ensemble</u> $J(\xi)$ <u>est un ensemble de multiplicité</u>.

Réciproquement, si $\frac{1}{\xi}$ est un nombre θ, il est facile de voir que $P(u)$ et C_n ne tendent pas vers zéro, mais on ne peut pas en déduire que $J(\xi)$ est un ensemble (U).

b. <u>Ensembles d'unicité</u> (SALEM et ZYGMUND [14]). - Si $\frac{1}{\xi}$ est un entier rationnel q, $J(\xi)$ est un ensemble (H). La suite $\{u_k\}$ correspondante est $\{q^k\}$, et l'intervalle Δ, l'intervalle $\left]\frac{1}{q}, \frac{q-1}{q}\right[$. Donc $J(\frac{1}{q})$ est un ensemble d'unicité (N. BARY).

Si $\frac{1}{\xi}$ est un nombre θ, supérieur à 2, de degré $\nu > 1$, $J(\xi)$ est homothétique à un ensemble $(H^{(\nu)})$, et, par suite du théorème IV, sont des ensembles d'unicité (SALEM et ZYGMUND).

On démontre d'abord que, si on pose, avec les notations de [I] :

$$\lambda\omega^n = \frac{\lambda}{\xi^n} = u_n + \varepsilon_n \qquad ,$$

la suite des vecteurs $\{u_{n+1}, u_{n+2}, \dots, u_{n+\nu}\}$ est normale. En effet, si les c_i sont des entiers quelconques, on a :

$$Q = c_1 u_{n+1} + c_2 u_{n+2} + \dots + c_\nu u_{n+\nu}$$

$$= \omega^{n+1}[c_1 + c_2 \omega + \dots + c_\nu \omega^{\nu-1}] + \eta_n = K\omega^{n+1} + \eta_n$$

où η_n tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Comme ω est un nombre algébrique de degré ν, le coefficient K n'est jamais nul et par suite Q tend toujours vers l'infini.

On montre ensuite que l'ensemble $F(\xi)$ des points

$$z = \frac{\varepsilon_1}{\omega} + \frac{\varepsilon_2}{\omega^2} + \dots + \frac{\varepsilon_k}{\omega^k} + \dots$$

(ensemble homothétique à $J(\xi)$ d'après (§ 3, 2)) est un ensemble $(H^{(\nu)})$. Il est en effet possible de choisir λ de façon que les points du cube à ν dimensions :

$$\{\underbrace{u_{n+1} z}, \underbrace{u_{n+2} z}, \dots, \underbrace{u_{n+\nu} z}\}$$

se trouvent à l'intérieur de certains cubes qui ne remplissent pas tout le cube unité. Il existe donc un cube fixe ne contenant pas de points, et $F(\xi)$ est un ensemble $(H^{(\nu)})$. Par suite du théorème IV, $J(\frac{1}{\omega})$ <u>est un ensemble d'unicité.</u>

Finalement :

- <u>Si</u> ξ <u>n'est pas l'inverse d'un nombre</u> θ, $J(\xi)$ <u>est un ensemble de multiplicité.</u>

- <u>Si</u> ξ <u>est l'inverse d'un nombre</u> θ <u>(supérieur à</u> 2), $J(\xi)$ <u>est un ensemble d'unicité.</u>

On voit que ce sont des propriétés arithmétiques remarquables et profondes qui déterminent la classification des ensembles parfaits $J(\xi)$ en ensembles (U) ou (M).

Ces résultats peuvent se généraliser au cas d'ensembles dissymétriques à rapport constant [15].

Les produits infinis de cosinus analogues à $P(u)$ provenant de transformées de Fourier de convolutions infinies ont été beaucoup étudiés, et les nombres θ jouent là encore un grand rôle (en particulier les nombres θ compris entre 1 et 2). Sur cette question, l'article le plus récent est celui de GARSIA [9].

BIBLIOGRAPHIE

[I] BERTRANDIAS (Jean-Paul). - Répartition modulo 1 des puissances successives des nombres réels, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 3, 1961/62, n° 11, 19 pages.

[A]

[1] BERTRANDIAS (Françoise). - Fractions continues, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 3, 1961/62, n° 2, 20 pages.

[2] CASSELS (J. W. S.). - An introduction to diophantine approximation. - Cambridge, at the University Press, 1957 (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics, 45).

[3] FURTWÄNGLER (P.). - Über Kriterien für die algebraischen Zahlen, Akad. Wiss. Wien, Sitzungsber., Abteilung II a, t. 126, 1917, p. 299-309.

[4] HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.). - An introduction to the theory of numbers. 3rd edition. - Oxford, at the Clarendon Press, 1954.

[5] JACOBI (C. G. J.). - Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen..., J. für die reine und angew. Math., t. 69, 1868, p. 29-64.

[6] MINKOWSKI (H.). Ein Kriterium für die algebraischen Zahlen, Königl. Gesellsch. Wiss. Götting. Nachrichten, Math.-Phys. Klasse, 1899, p. 64-88.

[7] PISOT (C.). - Sur quelques approximations rationnelles caractéristiques des nombres algébriques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 206, 1938, p. 1862-1864.

[B]

[8] BARY (Mlle N.). - The uniqueness problem of the representation of functions by trigonometric series, Amer. math. Soc., Translation n° 52.

[9] GARSIA (A. M.). - Arithmetic properties of Bernoulli convolutions, Trans. Amer. math. Soc., t. 102, 1962, p. 409-432.

[10] SALEM (Raphaël). - Sets of uniqueness and sets of multiplicity, I., Trans. Amer. math. Soc., t. 54, 1943, p. 218-228.

[11] SALEM (Raphaël). - Sets of uniqueness and sets of multiplicity, II., Trans. Amer. math. Soc., t. 56, 1944, p. 32-49.

[12] SALEM (Raphaël). - Rectification to the papers "Sets of uniqueness and sets of multiplicity", Trans. Amer. math. Soc., t. 63, 1948, p. 595-598.

[13] SALEM (Raphaël). - Recherches récentes sur l'unicité du développement trigonométrique, Enseignement mathématique, t. 4, 1958, p. 284-291.

[14] SALEM (R.) et ZYGMUND (A.). - Sur un théorème de Pjateckij-Šapiro, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 240, 1955, p. 2040-2042.

[15] SALEM (R.) et ZYGMUND (A.). - Sur les ensembles parfaits dissymétriques à rapport constant, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 240, 1955, p. 2281-2283.

[16] ZYGMUND (A.). - Trigonometric series. Vol. 1 and 2, 2nd edition. - Cambridge, at the University Press, 1959.