Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

JEAN-PAUL BERTRANDIAS

Répartition modulo 1 des puissances successives des nombres réels

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 3 (1961-1962), exp. nº 11, p. 1-19

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1961-1962__3__A6_0>

Séminaire DELANGE-PISOT
(Théorie des nombres)
3e année, 1961/62, n° 11

26 mars 1962

RÉPARTITION MODULO 1 DES PUISSANCES SUCCESSIVES DES NOMBRES RÉELS

par Jean-Paul BERTRANDIAS

1. Théorème de Koksma.

KOKSMA a démontré le théorème métrique suivant (voir l'exposé n° 7 de J. CHAUVINEAU [3]).

La suite $\varphi(n) = \lambda\omega^n$ est équirépartie modulo 1 pour presque tous les nombres $\omega > 1$.

On ne connaît pas actuellement de nombres ω tels que ω^n soit équiréparti modulo 1 , mais par contre quelques propriétés de l'ensemble de mesure nulle C du théorème de Koksma ont été étudiées, et on a trouvé des familles très intéressantes de nombres ω lui appartenant.

C'est cet ensemble C , et certains de ses sous-ensembles, que nous allons examiner.

2. Nombres de Pisot-Vijayaraghavan (P-V).

On dira qu'un nombre réel ω supérieur à 1 est un nombre θ (nombre P-V) si c'est un entier algébrique dont tous les conjugués ont un module strictement inférieur à 1 .

Un entier rationnel est évidemment un nombre θ , et toute puissance d'un nombre θ est encore un nombre θ .

Si ω est un nombre θ de degré $r \geqslant 1$ dont les conjugués, rangés par ordre de module décroissant, sont $\omega_1 = \omega$, ω_2 , ... , ω_r , le nombre

$$\omega^n + \omega_2^n + \omega_3^n + \dots + \omega_r^n = u_n$$

est un entier rationnel, ce qui donne

$$\omega^n = u_n - \varepsilon_n \quad \text{avec} \quad |\varepsilon_n| < r|\omega_2|^n \quad .$$

Comme $|\omega_2| < 1$, ω^n (*) tend vers zéro très vite et n'est donc certainement pas équirépartie. Cette propriété caractérise les nombres θ .

Le premier théorème concernant cette question est dû à THUE.

THÉORÈME I (THUE [14]). - Si ω est un nombre réel supérieur à 1 et si

$$\|\omega^n\| < C\rho^n \quad \text{avec} \quad \rho < 1 \quad ,$$

alors ω est un nombre algébrique.

Des théorèmes plus précis ont été obtenus ensuite.

THÉORÈME II (PISOT [7], VIJAYARAGHAVAN [15], [16]). - Si ω est un nombre algébrique réel supérieur à 1 , λ un nombre réel quelconque non nul, et si

$$\|\lambda\omega^n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad , \tag{1}$$

alors ω est un nombre θ et λ est un nombre du corps de ω .

THÉORÈME III (PISOT [7]). - Si ω est un nombre réel supérieur à 1 , λ un nombre réel non nul et si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\lambda\omega^n\|^2 < \infty \quad , \tag{2}$$

alors ω est un nombre algébrique et, d'après le théorème II, c'est un nombre θ.

Remarques. - Si ω est algébrique, il suffit que $\|\lambda\omega^n\|$ tende vers zéro, pour que ce soit un nombre θ . Si on ne sait rien sur la nature de ω , il faut savoir que $\|\lambda\omega^n\|$ tend vers zéro assez vite (plus vite que $\frac{1}{\sqrt{n \log n}}$ par exemple) pour être sûr que c'est un nombre θ .

(*) Notation. - On notera : $x = \hat{x} + \check{x}$, $\hat{x}$: partie entière de x , $\check{x}$: partie fractionnaire, $0 \leqslant \check{x} < 1$, et $\|x\| = \min(\check{x} , 1 - \check{x})$, $\|x\|$: distance à l'entier le plus proche.

Cette condition (2) a été améliorée par R. SALEM qui donne comme condition :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} n\|\lambda\omega^n\|^2 = 0 \tag{2'}$$

qui permet de conclure par exemple dès que $\|\lambda\omega^n\| = 0(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

C'est actuellement la meilleure condition, et on ne sait rien de la nature des nombres tels que $\|\lambda\omega^n\|$ tende vers zéro lentement. On sait simplement que leur ensemble est dénombrable (théorème VII).

3. Principes des démonstrations des théorèmes I, II et III.

THÉORÈME I. - Il est contenu dans le théorème III. La démonstration initiale de THUE s'appuyait sur le principe des tiroirs.

Démonstration du théorème II. - Elle s'appuie sur deux propriétés des fractions rationnelles.

a. Pour qu'une série entière représente une fraction rationnelle, il faut et il suffit que ses coefficients vérifient une relation de récurrence linéaire à coefficients constants (voir par exemple, MONTEL [5]).

b. Théorème de Fatou [4] (voir par exemple, [11], ex. VIII, p. 156). - Si les coefficients de la série de Taylor d'une fraction rationnelle sont des entiers rationnels, les inverses des pôles de cette fraction rationnelle sont des entiers algébriques.

Soit alors

$$a_0 + a_1\, \omega + \dots + a_k\, \omega^k = 0$$

l'équation que vérifie le nombre algébrique ω . On a

$$a_0\, \lambda\omega^n + a_1\, \lambda\omega^{n+1} + \dots + a_k\, \lambda\omega^{n+k} = 0 \tag{3}$$

donc si on pose

$$\lambda\omega^n = u_n + \varepsilon_n \qquad (u_n \text{ entier et } -\frac{1}{2} \leqslant \varepsilon_n < \frac{1}{2}) \tag{4}$$

les nombres entiers u_n vérifient à partir d'un entier n_0 suffisamment grand la relation de récurrence

(5) $$a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \dots + a_k u_{n+k} = 0$$

la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ représente, au voisinage de l'origine, la "fonction génératrice" $\psi(z)$ de la suite u_n. D'après les propriétés (a) et (b), $\psi(z)$ est une fraction rationnelle $\frac{P(z)}{Q(z)}$ dont les pôles sont des inverses d'entiers algébriques.

D'autre part $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n z^n$ représente une fonction $\varphi(z)$ holomorphe, pour $|z| < 1$ et ne pouvant avoir de pôles sur le cercle unité $|z| = 1$, car

$$\lim_{z \to e^{it}} |1 - z| \; \varphi(z) = \lim_{\rho \to 1} (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n e^{int} \rho^n$$

$$= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n e^{int} = 0 \quad \text{quel que soit } t \quad .$$

On a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda \omega^n z^n = \psi(z) + \varphi(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} + \varphi(z) = \frac{\lambda}{1 - \omega z} \quad ;$$

$Q(z)$ a donc un seul zéro $z = \frac{1}{\omega}$ à l'intérieur du cercle unité et les autres sont strictement à l'extérieur du cercle unité : ω est bien un nombre θ.

Comme $\varphi(z)$ est holomorphe pour $z = \frac{1}{\omega}$, $\frac{-\lambda}{\omega}$ est le résidu de $\frac{P(z)}{Q(z)}$ au pôle simple $z = \frac{1}{\omega}$. Donc

$$\lambda = -\omega \frac{P(\frac{1}{\omega})}{Q'(\frac{1}{\omega})} \quad ,$$

ce qui montre que λ apppartient au corps de ω.

Démonstration du théorème III. - Elle s'appuie sur deux théorèmes :

THÉORÈME de Kronecker (voir par exemple [1], VII, § 2). - Une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ soit le développement d'une fraction rationnelle est que

$$D_n = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_n \\ & & & \\ u_n & u_{n+1} & \cdots & u_{2n} \end{vmatrix} = 0 \text{ pour tout } n \geqslant N \quad .$$

THÉORÈME d'Hadamard (voir par exemple [1]). - Si D est le déterminant d'une matrice réelle (a_{ij}) d'ordre n, on a :

$$D^2 \leqslant \prod_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 \quad .$$

Posons $\lambda\omega^n = u_n + \varepsilon_n$. On a

$$u_{n+1} - \omega u_n = \omega\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} = \delta_n \quad .$$

D'après l'inégalité de Schwarz

$$\delta_n^2 \leqslant (\omega^2 + 1)(\varepsilon_n^2 + \varepsilon_{n+1}^2) \quad .$$

Par combinaison entre les colonnes, on peut mettre D_n sous la forme

$$D_n = \begin{vmatrix} u_0 & \delta_0 & \cdots & \delta_{n-1} \\ u_1 & \delta_1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ u_n & \delta_n & \cdots & \delta_{2n-1} \end{vmatrix}$$

et la majoration d'Hadamard donne :

$$D_n^2 \leq \sum_{i=0}^{n} u_i^2 \sum_{j=0}^{n} \delta_j^2 \cdots \sum_{j=n-1}^{2n-1} \delta_j^2 \quad .$$

En posant

$$R_h = \sum_{i=h}^{\infty} \varepsilon_i^2$$

(reste d'ordre h de la série convergente $\sum_1^{\infty} \varepsilon_i^2$)

$$\sum_{j=h}^{h+n} \delta_j^2 \leq \sum_{j=h}^{\infty} \delta_n^2 \leq (\omega^2 + 1)(R_h + R_{h+1}) \leq 2(\omega^2 + 1)\ R_h \quad ,$$

$$\sum_{i=0}^{n} u_i^2 < \sum_{i=0}^{n} (\lambda\omega^i + 1)^2 < \sum_{i=0}^{n} (\lambda + 1)^2\ \omega^{2i} < C\omega^{2n} \quad .$$

Donc

$$D_n^2 < C[2\omega^2(\omega^2 + 1)]^n\ R_0 \cdots R_{n-1} = C \prod_{h=0}^{n-1} 2\omega^2(\omega^2 + 1)\ R_h \quad .$$

Comme R_h tend vers zéro, le produit tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. D_n est un entier qui tend vers zéro ; il existe donc un entier N tel que

$$D_n = 0 \quad \text{pour} \quad n \geq N \quad .$$

Par suite la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ représente une fraction rationnelle et on termine la démonstration comme pour le théorème II.

4. Propriété importante des nombres θ .

THÉORÈME IV (PISOT [7]). - Dans tout corps algébrique, il y a des nombres θ ayant le degré du corps.

Soient s le degré du corps, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ une base des entiers du corps et $\Delta = (\det \gamma_j^{(i)})^2$ le discriminant du corps ($\gamma_j^{(i)}$ = conjugués de γ_j).

On considère les équations en entiers rationnels $x_1, \dots, x_s$:

$$\begin{aligned} \omega = \omega_1 &= x_1 \gamma_1 + x_2 \gamma_2 + \dots + x_s \gamma_s \\ \omega_2 &= x_1 \gamma_1^{(2)} + x_2 \gamma_2^{(2)} + \dots + x_s \gamma_s^{(2)} \\ &\dots \\ \omega_s &= x_1 \gamma_1^{(s)} + x_2 \gamma_2^{(s)} + \dots + x_s \gamma_s^{(s)} \end{aligned} .$$

D'après le théorème de Minkowski, elles ont une solution vérifiant les inégalités :

$$\begin{cases} 0 < \omega \leq M \\ |\omega_i| \leq \eta \end{cases} ,$$

dès que M et η vérifient la condition $M\eta^{s-1} \geq \sqrt{|\Delta|}$.

Si on prend $\eta < 1$, on a donc toujours un entier algébrique ω du corps tel que

$$\omega \leq \frac{\sqrt{|\Delta|}}{\eta^{s-1}}$$

dont tous les conjugués sont de module inférieur à 1. Comme le produit $|\omega_1\omega_2\dots\omega_s|$ est un entier, ω est supérieur à 1 et est donc bien un nombre θ.

5. Répartition modulo 1 ayant un nombre fini de valeurs limites.

Les nombres θ apparaissent à nouveau mais, là encore, on ne sait pas si ce sont les seuls.

THÉORÈME II' (PISOT [8]). - Si ω est un nombre algébrique réel supérieur à 1 et λ un nombre réel non nul, une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $\lambda\omega^n$ ait un nombre fini de valeurs limites modulo 1, est que ω

soit un nombre θ et λ soit un nombre du corps de ω.

THÉORÈME III' (PISOT [8]). - Si ω est un nombre réel supérieur à 1 et λ un nombre réel non nul, tels que $\lambda\omega^n$ n'ait qu'un nombre fini de valeurs limites, et si de plus la convergence vers ces valeurs limites est $O(\frac{1}{n^{k+1}})$, k étant le nombre des valeurs limites irrationnelles, alors ω est un nombre θ et λ un nombre du corps de ω.

Les démonstrations sont plus difficiles que celles des théorèmes II et III. Celle du théorème III' s'appuie sur un théorème qui est intéressant pour lui-même.

THÉORÈME V (PISOT [8]). - Soient ω et λ deux nombres réels supérieurs à 1. Si, pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$(1) \qquad \|\lambda\omega^n\| \leqslant \frac{1}{2e\omega(\omega+1)(1+\log\lambda)} ,$$

alors ω et λ sont tous les deux algébriques.

La démonstration se fait en approfondissant la démonstration de THUE du théorème I. On montre par le principe des tiroirs que si la condition (1) est réalisée, on peut trouver une relation de récurrence linéaire entre les u_n.

La fonction génératrice donne alors :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda\omega^n z^n = \frac{1}{1-\omega z} = \frac{P(z)}{Q(z)} + \varphi(z) .$$

$\varphi(z)$ est donc une fraction rationnelle qui a des pôles à l'extérieur ou sur le cercle unité. ω est alors un entier algébrique dont les conjugués sont dans ou sur le cercle unité.

On voit ainsi apparaître une nouvelle classe de nombres algébriques.

6. Nombres de Salem.

On dira qu'un nombre réel $\omega > 1$ est un nombre σ (nombre de Salem) si c'est un entier algébrique dont tous les conjugués ont un module inférieur ou égal à 1, l'un d'entre eux au moins étant de module 1.

Tous les conjugués de ω sauf un sont alors de module 1 car si ω_0 est un conjugué de module 1 , $\overline{\omega}_0 = \frac{1}{\omega_0}$ est aussi un conjugué de ω. L'équation irréductible qui vérifie ω est réciproque (un nombre σ est une unité algébrique) et si ω_i est un conjugué quelconque de ω , $\frac{1}{\omega_i}$ est aussi un conjugué. Le seul conjugué de module strictement inférieur à 1 est donc $\frac{1}{\omega}$, et tous les autres conjugués sont de module 1 , associés par paires. Le degré d'un nombre σ est obligatoirement pair.

Contrairement aux nombres θ , il n'y en a pas dans tout corps algébrique. Il n'y en a que dans certaines extensions quadratiques des corps totalement réels [13] ce que l'on voit en posant

$$\varpi_i = \omega_i + \frac{1}{\omega_i} = \omega_i + \overline{\omega}_i \quad .$$

Les ϖ_i sont des entiers algébriques <u>réels</u>.

7. Répartition modulo 1 de σ^n .

Soit $2s$ le degré de σ et soient $\pm 2\pi\varphi_i$ $(i = 2 , 3 , \dots , s)$ les arguments des conjugués imaginaires de σ. On a :

$$\sigma^n + \frac{1}{\sigma^n} + \sum_{i=2}^{s} 2 \cos 2\pi n\varphi_i = u_n \quad \text{(entier rationnel)} \quad .$$

Comme $\frac{1}{\sigma^n}$ tend vers zéro, la répartition modulo 1 de σ^n sera celle de

$$\Phi(n) = - 2 \sum_{i=2}^{s} \cos 2\pi n\varphi_i \quad .$$

a. Les φ_i sont linéairement et rationnellement indépendants avec 1 , c'est-à-dire qu'il n'existe pas de relation linéaire à coefficients entiers entre les φ_i de la forme

$$A_2 \varphi_2 + A_3 \varphi_3 + \dots + A_s \varphi_s = A \quad .$$

En effet cela entraînerait que

$$\sigma_2^{A_2}\,\sigma_3^{A_3}\cdots\sigma_s^{A_s}=1$$

ce qui est impossible car, par une permutation du groupe de Galois adjoint à l'équation, on devrait avoir $|\sigma| = 1$.

D'après le critère de Weyl, les points de coordonnées $x_i = n\varphi_i$ sont donc équirépartis modulo 1 dans l'espace R_{s-1} .

b. $\Phi(n)$ est réparti de manière dense sur l'intervalle $(-2(s-1)\ ,\ 2(s-1))$ (Donc σ^n est réparti modulo 1 de manière dense).

En effet si $(\alpha\ ,\ \beta)$ est un intervalle quelconque contenu dans $(-2(s-1)\ ,\ 2(s-1))$, il suffit de déterminer n tel que

$$\frac{\alpha}{2(s-1)} \leqslant \cos 2\pi n\varphi_i \leqslant \frac{\beta}{2(s-1)}$$

ce qui est possible à cause de la répartition uniforme des points de coordonnées $n\varphi_i$ dans l'espace R_{s-1} .

c. Répartition de $\lambda\sigma^n$.

On peut choisir λ de manière que la répartition de $\lambda\sigma^n$ ne soit dense modulo 1 que sur un intervalle qu'on peut rendre arbitrairement petit. La suite $\lambda\sigma^n$ n'est alors certainement pas équirépartie modulo 1 .

Remarque. - R. SALEM a précisé que la répartition de σ^n n'était pas uniforme, même si elle est partout dense sur l'intervalle $(0\ ,\ 1)$.

λ étant un entier du corps de σ , on a

$$\lambda\sigma^n + \frac{\lambda_2}{\sigma^n} + \lambda_3\,\sigma_3^n + \cdots + \lambda_{2s}\,\sigma_{2s}^n = u_n \quad \text{(entier rationnel)} \qquad .$$

Si on choisit pour λ un nombre θ défini comme au § 4 , la partie relative aux conjugués de $\lambda\sigma^n$ remplira de façon dense un intervalle de longueur inférieure à $4\eta(s-1)$, η pouvant être choisi arbitrairement petit.

8. Nombres α .

On dira qu'un nombre réel ω , supérieur ou égal à 1 , est un nombre α s'il peut être obtenu comme la limite

$$\omega = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad ,$$

associée à une suite d'entiers rationnels donnée par la relation de récurrence

$$\text{(R)} \qquad -\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} - \frac{u_n^2}{u_{n-1}} < \frac{1}{2} \quad ,$$

les deux premiers termes u_0 et $u_1 > u_0 > 0$ étant donnés.

La relation (R) définit bien u_{n+1} de manière unique à partir de u_n et u_{n-1} : u_{n+1} est l'entier le plus proche des $\frac{u_n^2}{u_{n-1}}$. La suite $\{u_n\}$ est donc définie par la donnée de deux entiers u_0 et u_1. Par suite :

THÉORÈME VI. - L'ensemble des nombres α est dénombrable.

Avant de montrer que, pour chaque suite $\{u_n\}$, la limite définissant ω existe bien, on va examiner la manière dont s'introduit cet ensemble de nombres et ses rapports avec les deux ensembles précédents.

Soient ω un nombre réel supérieur à 1 et λ un nombre réel positif. On pose :

$$\lambda\omega^n = u_n + \eta_n$$

(u_n entier et $-\frac{1}{2} \leqslant \eta_n < \frac{1}{2}$).

On a

$$\delta_n = u_{n+1} - \frac{u_n^2}{u_{n-1}} = \frac{(\lambda\omega^{n+1} - \eta_{n+1})(\lambda\omega^{n-1} - \eta_{n-1}) - (\lambda\omega^n - \eta_n)^2}{\lambda\omega^{n-1} - \eta_{n-1}}$$

$$= -\eta_{n+1} + 2\eta_n\,\omega - \eta_{n-1}\,\omega^2 + \varepsilon(n)$$

$\varepsilon(n)$ étant une quantité qui tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. On voit que

a. Si $\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors $\delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Donc à partir d'un certain n_0 , la relation (R) est vérifiée.

THÉORÈME VII. - Les nombres ω , tels que $\lambda\omega^n$ tende vers zéro modulo 1 , sont des nombres α . Leur ensemble est donc dénombrable.

COROLLAIRE. - Les nombres θ sont des nombres α .

b. Si $\eta_n \leqslant \eta < \dfrac{1}{2(\omega+1)^2}$, c'est-à-dire si les points d'accumulation de la répartition modulo 1 sont suffisamment proches de l'origine, on a $|\delta_n| \leqslant \delta < \frac{1}{2}$ à partir d'un certain n_0 . En tenant compte du résultat du § 7 (c), on voit que les nombres σ sont des nombres α .

Les nombres α apparaissent donc comme une généralisation des nombres θ et σ , mais on ne sait pas si l'ensemble des nombres α contient d'autres nombres que les nombres θ et σ .

9. Etude de la relation de récurrence (R).

a. A la suite $\{u_n\}$, on peut associer un nombre α tel que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \doteq \alpha \quad .$$

Pour démontrer cela, on introduit les deux entiers r_n et h_n définis par

$$(1) \qquad r_n = u_{n+1} - u_n \quad ,$$

$$(2) \qquad \frac{r_n^2}{u_n} = h_n + \xi_n \, , \qquad -\frac{1}{2} < \xi_n \leqslant \frac{1}{2} \quad ,$$

ainsi que la suite

$$v_n = \frac{r_n^2}{u_n} \quad .$$

– α. $\{u_n\}$ <u>est une suite monotone croissante.</u>

Démonstration par récurrence : on a $\frac{u_1}{u_0} > 1$, et

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \geqslant 1 \quad \text{entraîne} \quad \frac{u_n^2}{u_{n-1}} \geqslant u_n \quad ,$$

donc

$$u_{n+1} \geqslant u_n \quad \text{ou} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \quad .$$

Donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \quad \text{quel que soit} \quad n \quad .$$

– β. <u>Relation entre</u> h_n <u>et</u> r_n .

On a

(3) $$\frac{r_n^2}{u_n} = \frac{u_{n+1}^2}{u_n} - 2u_{n+1} + u_n \quad .$$

Donc, d'après (R) et (2) :

(4) $$h_n = r_{n+1} - r_n \quad .$$

Deux cas peuvent se produire :

1° $\underline{h_n = 0}$, c'est-à-dire $r_{n+1} = r_n$. Comme $u_{n+1} \geqslant u_n$, on a $v_{n+1} \leqslant v_n$.

D'après (2), $|v_n| \leqslant \frac{1}{2}$, on a donc $h_{n+1} = 0$, c'est-à-dire

$$\left.\begin{aligned} h_m &= 0 \\ r_m &= r_n \end{aligned}\right\} \quad \text{quel que soit} \quad m \geqslant n \quad .$$

La suite $\{u_n\}$ est alors une progression arithmétique de raison r_m et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{m+1}}{u_m} = 1 \quad .$$

Dans ce cas, $\alpha = 1$.

2° <u>$h_n \geqslant 1$</u> . v_n est alors une suite strictement croissante. En effet :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(r_n + h_n)^2}{r_n + u_n} - \frac{r_n^2}{u_n} = \frac{2u_n\, r_n\, h_n + u_n\, h_n^2 - r_n^3}{u_n(r_n + u_n)} \quad .$$

Or

$$r_n^3 = r_n[u_n\, h_n + u_n\, \xi_n] \quad .$$

(5)
$$v_{n+1} - v_n = \frac{r_n(h_n \;\; \xi_n) + h_n^2}{r_n + u_n}$$

qui est certainement positif car $h_n \geqslant 1 > \frac{1}{2} \geqslant |\xi_n|$. On a donc

$$h_{n+1} \geqslant h_n \geqslant 1$$

et la suite des r_n est strictement croissante d'après (4) ,

(4')
$$r_{n+1} = r_n + h_n \quad .$$

On peut déduire de ces relations une minoration des u_n

(6)
$$\begin{cases} r_1 \geqslant r_0 + 1 \\ r_2 \geqslant r_1 \geqslant r_0 + 2 \\ \cdots \\ r_n \geqslant r_0 + n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_1 \geqslant u_0 + r_0 \quad , \\ u_2 \geqslant u_1 + r_0 + 1 \geqslant u_0 + 2r_0 + 1 \quad , \\ \cdots \\ u_n \geqslant u_0 + nr_0 + \dfrac{n(n-1)}{2} \quad . \end{cases}$$

Posons alors

(7) $$\alpha_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

(8) $$|\alpha_{n+1} - \alpha_n| \leqslant \frac{1}{2u_{n+1}} \quad .$$

Donc, si $m > n$,

$$|\alpha_m - \alpha_n| \leqslant \sum_{i=n}^{m} \frac{1}{2u_{i+1}} < \frac{1}{2} \sum_{i=n}^{\infty} \frac{2}{i(i+1)} \quad ,$$

d'après (6) ,

$$|\alpha_m - \alpha_n| < \frac{1}{n} \quad .$$

La suite α_n satisfait à une condition de Cauchy et est donc convergente vers un nombre $\alpha \geqslant 1$.

Pour être dans ce cas, il faut que $h_0 \geqslant 1$;

$$\frac{r_0^2}{u_0} \geqslant \frac{1}{2} \, , \quad r_0 \geqslant \sqrt{\frac{u_0}{2}} \quad ,$$

donc

(9) $$u_1 \geqslant u_0 + \sqrt{\frac{u_0}{2}} \quad .$$

b. <u>Si</u> α <u>est supérieur à</u> 1 , $\frac{u_n}{\alpha^n}$ <u>tend vers un nombre</u> λ .

On peut trouver ε et $N(\varepsilon)$ tels que :

$$1 < \alpha - \varepsilon < \alpha_n < \alpha + \varepsilon \quad \text{pour} \quad n > N \quad .$$

Alors

(10)
$$|\alpha_{n+1} - \alpha_n| \leqslant \frac{1}{2u_{n+1}} = \frac{1}{2u_n\,\alpha_n} < \frac{1}{2u_n(\alpha - \varepsilon)} \quad ,$$

$$|\alpha - \alpha_n| < \frac{1}{2u_n} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha - \varepsilon)^2} = \frac{1}{2u_n(\alpha - 1 - \varepsilon)} \quad .$$

On peut alors écrire :

(11)
$$\frac{u_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{u_n}{\alpha^n} = \frac{u_n}{\alpha^{n+1}} (\alpha_n - \alpha) \quad ,$$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{u_n}{\alpha^n}\right| < \frac{1}{2(\alpha - 1 - \varepsilon)} \frac{1}{\alpha^{n+1}} \quad ,$$

et pour $m > n$,

(12)
$$\left|\frac{u_m}{\alpha^m} - \frac{u_n}{\alpha^n}\right| < \frac{1}{2(\alpha - 1 - \varepsilon)} \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{\alpha^{k+1}} < \frac{1}{2(\alpha - 1 - \varepsilon)(\alpha - 1)\,\alpha^n} \quad .$$

La suite $\frac{u_n}{\alpha^n}$ satisfait à une condition de Cauchy et converge donc vers un nombre $\lambda > 0$

(13)
$$|u_n - \lambda\alpha^n| < \frac{1}{2(\alpha - 1 - \varepsilon)(\alpha - 1)} \quad .$$

C'est-à-dire :

(14)
$$u_n = \lambda\alpha^n + \zeta_n \; , \quad \text{avec} \quad |\zeta_n| < \frac{1 + \varepsilon'}{2(\alpha - 1)^2} \quad ,$$

ε' étant arbitrairement petit.

Cette majoration est surtout intéressante pour $\alpha > 2$: la répartition modulo 1 de $\lambda\alpha^n$ n'est alors certainement pas uniforme. Elle montre aussi que, pour identifier les nombres α avec les nombres θ et σ , il suffirait de prouver que les u_n vérifient une relation de récurrence linéaire à coefficients entiers (§ 5).

c. Condition pour que $\alpha > 1$.

Appliquons l'inégalité (8) dès le premier terme. On a :

(15) $$|\alpha - \alpha_0| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} + \dots\right) \quad .$$

En tenant compte des minorations (6)

(16) $$u_n \geqslant u_0 + nr_0 + h_0 \frac{n(n-1)}{2} \quad ,$$

$$\geqslant u_0 + \frac{2n-1}{2} r_0 + \frac{r_0^2}{2u_0} n(n-1) = \left[\sqrt{u_0} + \frac{r_0}{2\sqrt{u_0}}(n-1)\right]\left[\sqrt{u_0} + \frac{r_0}{2\sqrt{u_0}} n\right]$$

car on a toujours

$$\frac{r_0^2}{2u_0} = \frac{h_0}{2} + \frac{\zeta_0}{2} \leqslant \frac{h_0}{2} + \frac{1}{4} < h_0 \quad .$$

Cette minoration permet une majoration de la série de (15) par une série sommable :

$$|\alpha - \alpha_0| \leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{2\sqrt{u_0}}{r_0\sqrt{u_0}} - \frac{2\sqrt{u_0}}{r_0\left(\sqrt{u_0} + \frac{r_0}{2\sqrt{u_0}}\right)} + \dots\right] \quad ,$$

(17) $$|\alpha - \alpha_0| \leqslant \frac{1}{r_0} \quad ,$$

ou

(18) $$\left|\alpha - \frac{u_1}{u_0}\right| \leqslant \frac{1}{u_1 - u_0} \quad .$$

Dès que

$$u_1 > u_0 + \sqrt{u_0} \quad ,$$

on est donc sûr que

$$\alpha > 1 \quad .$$

10. Propriétés de la répartition des nombres α , σ et θ .

La relation (9-18) permet de voir facilement que tout intervalle de la demi-droite $\alpha \geqslant 1$ contient au moins un nombre α , ce qui montre que l'ensemble des nombres α est dense sur la demi-droite $\alpha \geqslant 1$.

L'étude de la répartition des nombres θ et σ est très intéressante ([2], [9], [10], [12], [13]), et donne en particulier les résultats suivants :

THÉORÈME VIII (SALEM [13]). - L'ensemble des nombres θ est fermé, c'est-à-dire que tout point d'accumulation de nombres θ est aussi un nombre θ .

THÉORÈME IX (SALEM [13]). - Tout nombre θ est point d'accumulation (à gauche et à droite) de nombres σ .

L'ensemble dérivé de l'ensemble des nombres σ contient les nombres θ , mais on ne sait pas s'il en contient d'autres.

11. Résultats généraux sur la répartition modulo 1 de ω^n .

D'après les résultats précédents, il serait naturel de penser que seules les puissances de nombres algébriques ont une répartition modulo 1 anormale. Cela n'est certainement pas vrai d'après un résultat de C. PISOT ([6], [7]).

THÉORÈME X. - L'ensemble des nombres réels $\omega > 1$, tel que la suite ω^n ne soit pas équirépartie modulo 1 , a la puissance du continu.

La démonstration se fait en construisant des nombres ω tels que ω^n ait une répartition modulo 1 tombant dans des intervalles assez petits donnés à l'avance.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BECKENBACH (Edwin F.) and BELLMAN (Richard). - Inequalities. - Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer-Verlag, 1961 (Ergebnisse der Mathematik ..., 30).

[2] CASSELS (J. W. S.). - An introduction to diophantine approximation. - Cambridge, at the University Press, 1957 (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics, 45).

[3] CHAUVINEAU (Jean). - Equirépartition et équirépartition uniforme modulo 1, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 3, 1961/62, n° 7, 35 p.

[4] FATOU (P.). - Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Math., t. 30, 1906, p. 335-400 (Thèse Sc. math. Paris. 1907).

[5] MONTEL (Paul). - Leçons sur les récurrences et leurs applications. - Paris, Gauthier-Villars, 1957 (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions).

[6] PISOT (Charles). - Sur la répartition modulo 1, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 204, 1937, p. 1853-1855.

[7] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Série 2, t. 7, 1938, p. 205-248 (Thèse Sc. math. Paris. 1938).

[8] PISOT (Charles). - Répartition (mod 1) des puissances successives des nombres réels, Comment. Math. Helvet., t. 19, 1946-1947, p. 153-160.

[9] PISOT (Charles). - Quelques résultats d'approximation diophantienne, Colloques internationaux du CNRS : Algèbre et Théorie des nombres [24. 1949. Paris] ; p. 57-58. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1950.

[10] PISOT (Charles). - Sur une famille remarquable d'entiers algébriques formant un ensemble fermé, Colloque sur la théorie des nombres [1955. Bruxelles] ; p. 77-83. - Liège, G. Thone ; Paris, Masson, 1956 (Centre belge de Recherches mathématiques).

[11] PÓLYA (G.) und SZEGÖ (G.). - Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. I und II. - Berlin, J. Springer, 1925 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 19-20).

[12] SALEM (Raphaël). - A remarquable class of algebraic integers. Proof of a conjecture of Vijayaraghavan, Duke math. J., t. 11, 1944, p. 103-108.

[13] SALEM (Raphaël). - Power series with integral coefficients, Duke math. J., t. 12, 1945, p. 153-172.

[14] THUE (Axel). - Über eine Eigenschaft, die keine transcendente Grösse haben kann, Videnskapss. Shrifter, Kristiana, I : Mat.-naturv. Klasse, 1912, n° 20, 15 pages.

[15] VIJAYARAGHAVAN (T.). - On the fractionnal part of the powers of a number, II., Proc. Camb. phil. Soc., t. 37, 1941, p. 349-357.

[16] VIJAYARAGHAVAN (T.) - On the fractionnal part of the powers of a number, III., London math. Soc., t. 17, 1942, p. 137-138.