Hubert Delange

Application de la méthode du crible à l'étude des valeurs moyennes de certaines fonctions arithmétiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 3 (1961-1962), exp. n° 16, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1961-1962__3__A10_0>

Séminaire DELANGE-PISOT
(Théorie des nombres)
3e année, 1961/62, n° 16

28 mai 1962

APPLICATION DE LA MÉTHODE DU CRIBLE À L'ÉTUDE DES VALEURS MOYENNES DE CERTAINES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES

par Hubert DELANGE

Dans un exposé de l'an dernier, j'ai considéré la classe des fonctions arithmétiques à valeurs réelles ou complexes ayant les propriétés suivantes :

1. $f(1) = 1$;

2. $f(mn) = f(m)\, f(n)$ quand $(m, n) = 1$;

3. $|f(n)| \leqslant 1$ quel que soit n .

Je désignais cette classe par $\mathfrak{M}_0$.

Une fonction de la classe $\mathfrak{M}_0$ est déterminée quand on connaît ses valeurs pour les puissances des nombres premiers, valeurs qui sont assujetties à la seule condition d'être de module $\leqslant 1$.

On a pour $n > 1$

$$f(n) = \prod_{\substack{p^\alpha | n \\ p^{\alpha+1} \nmid n}} f(p^\alpha) \quad .$$

J'ai montré que, si $f \in \mathfrak{M}_0$ et si la série $\sum \frac{1 - f(p)}{p}$ (où p parcourt l'ensemble des nombres premiers, rangés par ordre croissant) est convergente, f possède une valeur moyenne égale à

$$\prod \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left[1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(p^j)}{p^j}\right]$$

(produit infini qui est alors convergent).

J'utilisais pour cela une méthode assez détournée :

Grâce à un théorème permettant d'affirmer l'existence d'une valeur moyenne pour une fonction de la classe $\mathcal{M}_0$ lorsqu'une autre fonction, qui n'en diffère pas trop, possède une valeur moyenne, je me ramenais au cas où $f(p)$ tend vers 1 quand le nombre premier p tend vers $+\infty$.

Dans cette hypothèse, je montrais, en utilisant le théorème des nombres premiers, que l'on a, pour x infini,

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} f(n) = \frac{1}{\log x}\sum_{n\leqslant x}\frac{f(n)}{n} + o[1] \quad .$$

Un théorème taubérien, appliqué à la série de Dirichlet $\sum_{1}^{+\infty}\frac{f(n)}{n^s}$, permettait de montrer que, si la série $\sum\frac{1-f(p)}{p}$ converge, le premier terme du second membre tend vers une limite quand x tend vers $+\infty$.

Je me propose d'indiquer ici une autre méthode, entièrement élémentaire, basée sur des résultats que l'on peut établir par la méthode du crible. La même méthode permet d'établir d'autres résultats concernant l'existence de valeurs moyennes pour des fonctions telles que $f[P(n)]$, où P est un polynôme à coefficients entiers et $f\in\mathcal{M}_0$, ou bien $f_1(a_1 n + b_1)\, f_2(a_2 n + b_2) \cdots f_q(a_q n + b_q)$, où $a_1, a_2, \ldots, a_q$, $b_1, b_2, \ldots, b_q$ sont des entiers et $f_1, f_2, \ldots, f_q \in \mathcal{M}_0$.

L'idée de base est que l'on voit facilement que la fonction f, de la classe $\mathcal{M}_0$, possède une valeur moyenne si l'on n'a $f(p^k)\neq 1$ que pour un nombre fini de p.

On introduit donc d'abord, pour chaque $y\geqslant 2$, la fonction f_y définie de la façon suivante :

f_y est la fonction de la classe $\mathcal{M}_0$ définie par

$$f_y(p^k) = \begin{cases} f(p^k) & \text{si } p\leqslant y \quad , \\ 1 & \text{si } p > y \quad . \end{cases}$$

On pourrait aussi la définir de la façon suivante :

Soit $\mathcal{E}_y$ l'ensemble des entiers positifs qui ne sont divisibles par aucun nombre premier $> y$, et soit $\psi_y(n)$ le plus grand nombre de $\mathcal{E}_y$ qui divise n.

Alors

$$f_y(n) = f[\psi_y(n)] \quad .$$

L'idée générale de la nouvelle démonstration est alors celle-ci :

f_y possède une valeurs moyenne égale à

$$M_y(f) = \prod_{p \leq y} (1 - \frac{1}{p})[1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(p^j)}{p^j}] \quad ,$$

autrement dit, quand x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f_y(n)$ tend vers $M_y(f)$.

Par ailleurs, la convergence de la série $\sum \frac{1 - f(p)}{p}$ entraîne que, quand y tend vers $+\infty$, $M_y(f)$ tend vers

$$\mu = \prod(1 - \frac{1}{p})[1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(p^j)}{p^j}] \quad .$$

On aurait le résultat voulu en intervertissant les passages à la limite, car, quand y tend vers $+\infty$, $f_y(n)$ tend vers $f(n)$ et $\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f_y(n)$ tend vers $\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n)$.

En fait, on fera tendre simultanément x et y vers $+\infty$. On écrira

$$(1) \qquad \left|\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n) - \mu\right| \leq \left|\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n) - \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f_y(n)\right|$$

$$+ \left|\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f_y(n) - M_y(f)\right| + \left|M_y(f) - \mu\right| \quad ,$$

et on utilisera des majorations des deux premières expressions du second membre (la troisième tendant évidemment vers zéro).

Pour majorer la première expression, on remarque que

$$f(n) = f_y(n) \prod_{\substack{p^\alpha | n \\ p^{\alpha+1} \nmid n \\ p > y}} f(p^\alpha) \quad ,$$

ce qui donne

$$f(n) - f_y(n) = f_y(n) \{ \prod_{\substack{p^\alpha | n \\ p^{\alpha+1} \nmid n \\ p>y}} f(p^\alpha) - 1 \} \quad .$$

Comme, si $a_1 , a_2 , \dots , a_q$ sont des nombres de module $\leqslant 1$,

$$|a_1 a_2 \dots a_q - 1| \leqslant \sum_{j=1}^{q} |a_j - 1|$$

car

$$a_1 a_2 \dots a_q - 1 = a_1 - 1 + \sum_{1<j\leqslant q} a_1 \dots a_{j-1}(a_j - 1) \quad ,$$

on voit que, si $0 < y < x$,

$$\left|\frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} f(n) - \frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} f_y(n)\right| = \frac{1}{x} \left|\sum_{n\leqslant x} [f(n) - f_y(n)]\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} |f(n) - f_y(n)|$$

$$\leqslant \frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} \left(\sum_{\substack{p^\alpha | n \\ p^{\alpha+1} \nmid n \\ p>y}} |f(p^\alpha) - 1| \right)$$

$$\leqslant \frac{1}{x} \sum_{y<p\leqslant x} \{\frac{|1 - f(p)|}{p} x + \sum_{\alpha=2}^{+\infty} \frac{|1 - f(p^\alpha)|}{p^\alpha} x\}$$

$$\leqslant \sum_{y<p\leqslant x} \frac{|1 - f(p)|}{p} + 2 \sum_{p>y} \frac{1}{p(p - 1)} \quad .$$

Il résulte de là que, si la série $\sum \frac{1 - f(p)}{p}$ est convergente et si $y = x^{\varepsilon}$, avec $0 < \varepsilon < 1$,

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} f(n) - \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} f_y(n)\right] = 0 \quad .$$

Cela tient à ce que, pour tout $\lambda > 1$, $\sum_{y < p \leqslant y^{\lambda}} \frac{|1 - f(p)|}{p}$ tend vers zéro quand y tend vers $+\infty$.

En effet, si $0 < \delta < 2$, on peut écrire

$$\sum_{y<p\leqslant y^{\lambda}} \frac{|1 - f(p)|}{p} = \sum_{\substack{y<p\leqslant y^{\lambda} \\ |1-f(p)|>\delta}} \frac{|1 - f(p)|}{p} + \sum_{\substack{y<p\leqslant y^{\lambda} \\ |1-f(p)|\leqslant\delta}} \frac{|1 - f(p)|}{p}$$

$$\leqslant \frac{4}{\delta^2} \sum_{p>y} \frac{1 - \Re f(p)}{p} + \delta \sum_{y<p\leqslant y^{\lambda}} \frac{1}{p} \quad ,$$

puisque $|1 - f(p)| > \delta$ entraîne $1 - \Re f(p) > \frac{\delta^2}{2} \geqslant \frac{\delta^2}{4} |1 - f(p)|$, et ceci entraîne

$$\overline{\lim_{y \to +\infty}} \sum_{y<p\leqslant y^{\lambda}} \frac{|1 - f(p)|}{p} \leqslant \delta \log \lambda \quad .$$

Pour majorer $\left|\frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} f_y(n) - M_y(f)\right|$, la méthode consistera à évaluer l'expression

$$\sum_{n\leqslant x} f_y(n) = \sum_{n\leqslant x} f[\psi_y(n)]$$

en groupant les n suivant les valeurs de $\psi_y(n)$.

Les n tels que $\psi_y(n) = m$, où m est un nombre donné de $\mathcal{E}_y$, sont les produits de m par des entiers qui ne sont divisibles par aucun nombre premier $< y$.

$N(x\ ,\ y)$ étant le nombre des entiers positifs $\leqslant x$ qui ne sont divisibles par aucun entier $\leqslant y$, nous poserons

$$N(x\ ,\ y) = x\varphi(x\ ,\ y) \prod_{p\leqslant y} (1 - \frac{1}{p}) \quad .$$

Ainsi, le nombre des $n \leqslant x$ tels que $\psi_y(n) = m$ sera

$$\frac{x}{m}\, \varphi(\frac{x}{m}\ ,\ y) \prod_{p\leqslant y} (1 - \frac{1}{p}) \quad .$$

z étant un nombre quelconque > 1 et $\leqslant x$, on peut écrire

$$\sum_{n\leqslant x} f_y(n) = \sum_{\substack{m\in\mathcal{E}_y \\ m\leqslant z}} f(m)\, \frac{x}{m}\, \varphi(\frac{x}{m}\ ,\ y) \prod_{p\leqslant y} (1 - \frac{1}{p}) + \sum_{\substack{n\leqslant x \\ \psi_y(n)>z}} f_y(n) \quad ,$$

d'où

$$\frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} f_y(n) = \{ \prod_{p\leqslant y} (1 - \frac{1}{p}) \} \sum_{\substack{m\in\mathcal{E}_y \\ m\leqslant z}} \frac{f(m)}{m}\, \varphi(\frac{x}{m}\ ,\ y) + \frac{1}{x} \sum_{\substack{n\leqslant x \\ \psi_y(n)>z}} f_y(n) \quad .$$

D'autre part, on voit immédiatement que

$$M_y(f) = \{ \prod_{p\leqslant y} (1 - \frac{1}{p}) \} \sum_{m\in\mathcal{E}_y} \frac{f(m)}{m} \quad .$$

Par suite

$$\frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} f_y(n) - M_y(f) = \{ \prod_{p\leqslant y} (1 - \frac{1}{p}) \} \sum_{\substack{m\in\mathcal{E}_y \\ m\leqslant z}} \frac{f(m)}{m} [\varphi(\frac{x}{m}\ ,\ y) - 1]$$

$$+ \frac{1}{x} \sum_{\substack{n\leqslant x \\ \psi_y(n)>z}} f_y(n) - \{ \prod_{p\leqslant y} (1 - \frac{1}{p}) \} \sum_{\substack{m\in\mathcal{E}_y \\ m>z}} \frac{f(m)}{m} \quad ,$$

d'où

$$\left|\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} f_y(n) - M_y(f)\right| \leqslant \{\prod_{p\leqslant y}(1-\frac{1}{p})\} \sum_{\substack{m\in\mathcal{E}_y\\ m\leqslant z}} \frac{1}{m}\left|\varphi(\frac{x}{m}, y) - 1\right|$$

$$+ \frac{1}{x} \text{ nombre des } n\leqslant x \text{ tels que } \psi_y(n) > z$$

$$+ \{\prod_{p\leqslant y}(1-\frac{1}{p})\} \sum_{\substack{m\in\mathcal{E}_y\\ m>z}} \frac{1}{m} \quad .$$

On voit d'abord que chacune des deux dernières expressions est au plus égale à $4\,\frac{\log y}{\log z}$.

Cela résulte du lemme suivant :

Si $y > 1$, le nombre des $n \leqslant x$ tels que $\psi_y(n) \geqslant z > 1$ est $\leqslant 4x\,\frac{\log y}{\log z}$.

Pour établir cela, observons d'abord que $\prod_{n\leqslant x} \psi_y(n)$ ne contient que des facteurs premiers $\leqslant y$. Pour l'évaluer, il suffit de calculer l'exposant de chaque $p \leqslant y$ dans le produit. Cet exposant est

$$E[\frac{x}{p}] + E[\frac{x}{p^2}] + \dots \quad ,$$

où $E[u]$ désigne le plus grand entier $\leqslant u$.

Il est donc au plus égal à

$$\frac{x}{p} + \frac{x}{p^2} + \dots = \frac{x}{p-1} \leqslant 2.\frac{x}{p} \quad ,$$

et par suite

$$\sum_{n\leqslant x} \log \psi_y(n) \leqslant 2x \sum_{p\leqslant y} \frac{\log p}{p} \quad .$$

Par ailleurs,

$$y \log y \geqslant \sum_{n\leqslant y} \log n \geqslant \sum_{p\leqslant y} E[\frac{y}{p}] \log p \geqslant \frac{y}{2} \sum_{p\leqslant y} \frac{\log p}{p} ,$$

d'où

$$\sum_{p\leqslant y} \frac{\log p}{p} \leqslant 2\log y .$$

Donc

$$\sum_{n\leqslant x} \log \psi_y(n) \leqslant 4x \log y ,$$

d'où le résultat annoncé.

Maintenant, si P est une partie finie quelconque de l'ensemble des nombres de $\mathcal{E}_y$ qui sont $> z$, pour chaque $m \in P$, le nombre des $n \leqslant X$, tels que $\psi_y(n) = m$, est équivalent, pour X infini, à

$$\frac{X}{m} \prod_{p\leqslant y} (1 - \frac{1}{p}) ,$$

et il en résulte que le nombre des $n \leqslant X$ tels que $\psi_y(n) \in P$ est équivalent à

$$X\{\prod_{p\leqslant y} (1 - \frac{1}{p})\} \sum_{m\in P} \frac{1}{m} .$$

Comme ce nombre est $\leqslant 4X \frac{\log y}{\log z}$, on a

$$\{\prod_{p\leqslant y} (1 - \frac{1}{p})\} \sum_{m\in P} \frac{1}{m} \leqslant 4 \frac{\log y}{\log z} .$$

Par suite

$$\{\prod_{p\leqslant y} (1 - \frac{1}{p})\} \sum_{\substack{m\in\mathcal{E}_y \\ m>z}} \frac{1}{m} \leqslant 4 \frac{\log y}{\log z} .$$

On a donc prouvé finalement que, si $y \geqslant 2$ et $1 < z \leqslant x$,

$$(2) \qquad \left|\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} f_y(n) - M_y(f)\right| \leqslant 8 \frac{\log y}{\log z} + \left\{\prod_{p \leqslant y} \left(1 - \frac{1}{p}\right)\right\} \sum_{\substack{m \in \mathcal{E}_y \\ m \leqslant z}} \frac{1}{m} \left|\varphi\left(\frac{x}{m}, y\right) - 1\right| .$$

C'est maintenant que nous faisons intervenir le crible.

On peut montrer, par la méthode du crible d'Atle Selberg, qu'il existe $y_0 \geqslant 2$, $\lambda_0 \geqslant 1$ et α et $\beta > 0$ tels que, pour $y \geqslant y_0$ et $x \geqslant y^{\lambda_0}$,

$$|\varphi(x , y) - 1| \leqslant \alpha \exp\left(- \beta \frac{\log x}{\log y}\right) .$$

Il en résulte, ce qui nous suffit, qu'il existe $C > 0$ tel que, pour $y \geqslant y_0$ et $x \geqslant y^{\lambda_0}$,

$$|\varphi(x , y) - 1| \leqslant C \frac{\log y}{\log x} .$$

En prenant dans (2) $z = \sqrt{x}$, de sorte que, pour $m \leqslant z$, $\frac{x}{m} \geqslant \sqrt{x}$, on trouve que, si $y \geqslant y_0$ et $x \geqslant y^{2\lambda_0}$,

$$\left|\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} f_y(n) - M_y(f)\right| \leqslant (16 + 2C) \frac{\log y}{\log x} .$$

(1) montre alors que, si $y = x^{\omega}$, avec $0 < \omega \leqslant \frac{1}{2\lambda_0}$, et $x \geqslant y_0^{1/\omega}$,

$$\left|\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} f(n) - \mu\right| \leqslant \left|\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} f(n) - \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} f_y(n)\right| + |M_y(f) - \mu| + (16 + 2C)\omega .$$

En tenant compte de ce qui a été vu plus haut, ceci entraîne

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \left|\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} f(n) - \mu\right| \leqslant (16 + 2C)\omega ,$$

et on en déduit le résultat voulu en faisant tendre ω vers zéro.

Comme on l'a dit au début, la même méthode permet d'établir, sous des hypothèses convenables, l'existence de valeurs moyennes pour des fonctions telles que $f[P(n)]$, où $f \in \mathfrak{M}_0$ et où P est un polynôme à coefficients entiers, ou bien

$$f_1(a_1\, n + b_1)\, f_2(a_2\, n + b_2) \ldots f_q(a_q\, n + b_q) \qquad ,$$

où $f_1 , f_2 , \ldots , f_q \in \mathfrak{M}_0$ et $a_1 , a_2 , \ldots , a_q$, $b_1 , b_2 , \ldots , b_q$ sont des entiers.

Le résultat que l'on a alors à établir, par la méthode du crible d'Atle Selberg, est le suivant :

Pour chaque nombre premier p , on se donne un système S_p de ω_p restes $(0 \leqslant \omega_p < p)$.

Soit $N(x , y)$ le nombre des $n \leqslant x$ qui restent, une fois enlevés, pour chaque $p \leqslant y$, les nombres congrus modulo p aux nombres de S_p , et soit

$$N(x , y) = x\varphi(x , y) \prod_{p \leqslant y} \left(1 - \frac{\omega_p}{p}\right) \qquad .$$

Si les ω_p sont bornés supérieurement, il existe $y_0 \geqslant 2$, $\lambda_0 \geqslant 1$ et α et $\beta > 0$ tels que, pour $y \geqslant y_0$ et $x \geqslant y^{\lambda_0}$,

$$|\varphi(x , y) - 1| \leqslant \alpha \exp\left(- \beta \frac{\log x}{\log y}\right) \qquad .$$

Pour obtenir ce résultat, on doit majorer et minorer $N(x , y)$.

La majoration s'obtient par la méthode exposée l'an dernier par BRISSE, légèrement modifiée.

On obtient la minoration en majorant le nombre des entiers $\leqslant x$ à enlever pour chaque $p \leqslant y$, l'opération étant supposée déjà faite pour tous les nombres premiers inférieurs à p .