Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

JEAN CHAUVINEAU

Répartition modulo 1 de certaines fonctions périodiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 2 (1960-1961), exp. n° 8, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1960-1961__2__A8_0>

Séminaire DELANGE-PISOT
(Théorie des nombres)
2e année, 1960/61, n° 8

27 février 1961

RÉPARTITION MODULO 1 DE CERTAINES FONCTIONS PÉRIODIQUES

par Jean CHAUVINEAU

1. Notations.

x étant un nombre réel, $\hat{x}$ désignera sa partie entière et $\check{x}$ sa partie complémentaire, de sorte que $\hat{x} + \check{x} = x$ et $0 \leq \check{x} < 1$.

Etant donnés une suite u_n, un entier $N \geq 1$ et deux nombres réels a, b tels que $0 \leq a < b \leq 1$, le nombre des termes de la suite, tels que $a \leq \check{u}_n < b$ [resp. : $a < \check{u}_n \leq b$] et $1 \leq n \leq N$, sera noté $(N , a , b)_u$ [resp. : $(N , a , b)_u^*$], de sorte que $0 \leq (N , a , b)_u \leq N$ et $(N , 0 , 1)_u = N$.

2. Construction des suites u_n qui vont être étudiées.

Soient x_1, x_2 deux nombres réels tels que $\omega = x_2 - x_1$ soit un nombre irrationnel > 0 ; soit F une fonction réelle définie sur l'intervalle ouvert $\mathfrak{J} =]x_1 , x_2[$ et soit F^* la fonction périodique, de période ω, qui est égale à F sur $\mathfrak{J}$. On se propose d'étudier la suite $u_n = F^*(n) = F\left(n - \omega \widehat{\left(\frac{n - x_1}{\omega}\right)}\right)$ où $n \geq 1$, abstraction faite éventuellement d'un seul de ses termes qui peut ne pas exister (un au plus, puisque ω est irrationnel).

3. Première étude.

On appelle conditions C les suivantes :

C1 : F est continue et strictement monotone sur $\mathfrak{J}$.

C2 : $|F(x)| \to \infty$ quand $x_1 < x \to x_1$ et quand $x_2 > x \to x_2$.

Soit alors Φ la fonction inverse de F, qui est définie sur $R = (-\infty , +\infty)$. On va montrer que :

Si F remplit les conditions C, alors la suite u_n admet une fonction de répartition (mod 1) continue sur $[0 , 1]$ dont la valeur en tout point a de $[0 , 1]$ est

$$\chi(a) = \frac{1}{\omega} \sum_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(k + a) - \Phi(k)| \quad .$$

3.1. - Supposons d'abord F <u>strictement croissante sur</u> $\mathfrak{I}$, de sorte que Φ est continue et strictement croissante sur R, avec $\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi(x) = x_1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = x_2$.

Soit $0 \leq a < b \leq 1$ et soit k un entier réel. Pour que $k + a \leq F^*(n) < k + b$, il faut et il suffit que

$$\Phi(k + a) \leq n - \omega\widehat{\left(\frac{n - x_1}{\omega}\right)} < \Phi(k + b)$$

d'où

$$\frac{\Phi(k + a) - x_1}{\omega} \leq \frac{n - x_1}{\omega} - \widehat{\left(\frac{n - x_1}{\omega}\right)} < \frac{\Phi(k + b) - x_1}{\omega}$$

c'est-à-dire, en posant $v_n = \frac{n - x_1}{\omega}$, $A_k = \frac{\Phi(k + a) - x_1}{\omega}$, $B_k = \frac{\Phi(k + b) - x_1}{\omega}$:

$$A_k \leq \check{v}_n < B_k \quad .$$

Le nombre des termes de la suite u_n tels que $k + a \leq u_n < k + b$ et $1 \leq n \leq N$ est donc égal au nombre des termes de la suite v_n tels que $A_k \leq \check{v}_n < B_k$ et $1 \leq n \leq N$, c'est-à-dire $(N , A_k , B_k)_v$. Il en résulte que

$$(N , a , b)_u = \sum_{-\infty}^{+\infty} (N , A_k , B_k)_v$$

où $0 < \ldots \leq A_{k-1} < B_{k-1} \leq A_k < B_k \leq \ldots < 1$.

Soit H un entier ≥ 0 ; on a

$$\frac{1}{N} \sum_{-H}^{H} (N , A_k , B_k)_v \leq \frac{1}{N} \sum_{-\infty}^{+\infty} (N , A_k , B_k)_v$$

$$\leq \frac{1}{N} \sum_{-H}^{H} (N , A_k , B_k)_v + \frac{1}{N} (N , 0 , A_{-H})_v + \frac{1}{N} (N , B_H , 1)_v \quad .$$

Puisque ω est irrationnel, la suite v_n est équirépartie (mod 1) et

$$\frac{1}{N} \sum_{-H}^{H} (N , A_k , B_k)_v \to \sum_{-H}^{H} (B_k - A_k) , \quad \frac{1}{N} (N , 0 , A_{-H})_v \to A_{-H} ,$$

$$\frac{1}{N} (N , B_k , 1) \to 1 - B_H$$

quand $N \to \infty$; donc

$$\sum_{-H}^{H} (B_k - A_k) \leq \varliminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} (N , a , b)_u \leq \varlimsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} (N , a , b)_u \leq \sum_{-H}^{H} (B_k - A_k) + A_{-H} + 1 - B_H$$

La série $\sum_{-\infty}^{+\infty} (B_k - A_k)$ est convergente, de somme ≤ 1 , et $A_{-H} + 1 - B_H \to 0$ quand $H \to \infty$. Dès lors, soit $\varepsilon > 0$; pour H assez grand, le premier membre des inégalités précédentes est $> \sum_{-\infty}^{+\infty} (B_k - A_k) - \varepsilon$, et leur dernier membre est $< \sum_{-\infty}^{+\infty} (B_k - A_k) + \varepsilon$, ce qui exige, puisque $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} (N , a , b)_u = \sum_{-\infty}^{+\infty} (B_k - A_k) \quad .$$

3.2. - Supposons maintenant F <u>strictement décroissante sur</u> $\mathfrak{I}$, de sorte que Φ est continue et strictement décroissante sur R , avec $\lim_{x\to-\infty} \Phi(x) = x_2$ et $\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = x_1$. Nous obtenons de même

$$(N , a , b)_u = \sum_{-\infty}^{+\infty} (N , B_k , A_k)_v^*$$

où $0 < \dots \leq B_k < A_k \leq B_{k-1} < A_{k-1} \leq \dots < 1$. La suite v_n étant équirépartie, $(N , x , y)_v^*$ est équivalent à $(N , x , y)_v$ quand $N \to \infty$, et un calcul analogue au précédent nous donne

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} (N , a , b)_u = \sum_{-\infty}^{+\infty} (A_k - B_k) \quad .$$

3.3. - Ainsi $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} (N , a , b)_u = \sum_{-\infty}^{+\infty} |B_k - A_k| = \frac{1}{\omega} \sum_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(k + b) - \Phi(k + a)|$ et la suite u_n admet la fonction de répartition χ annoncée, telle que

$$\chi(a) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} (N , 0 , a)_u = \frac{1}{\omega} \sum_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(k + a) - \Phi(k)| \quad .$$

De plus, χ est continue sur $[0 , 1]$, car c'est la somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues sur $[0 , 1]$.

4. Deuxième étude.

On appelle conditions C' les suivantes :

C'1 : F est continuement dérivable et F' de signe constant sur $\mathfrak{I}$.

C'2 : C2.

Soit alors Φ la fonction inverse de F , qui est définie et dérivable sur R .

C'3 : La série $\sum_{-\infty}^{+\infty} \Phi'(k + x)$ est uniformément convergente sur $[0 , 1]$.

On va montrer que :

Si F remplit les conditions C', alors la suite u_n admet une fonction densité de répartition (mod 1) continue sur $[0 , 1]$ dont la valeur en tout point a de $[0 , 1]$ est

$$\rho(a) = \frac{1}{\omega} \sum_{-\infty}^{+\infty} |\Phi'(k + a)| \quad .$$

Les conditions C' entraînant les conditions C, la suite u_n admet la fonction de répartition χ précédemment obtenue. De plus, la fonction Φ' , de valeur $\Phi'(x) = \frac{1}{F'(\Phi(x))}$, est continue et de signe constant sur R , avec $\lim_{|x|\to\infty} \Phi'(x) = 0$.

Puisque la série $\frac{1}{\omega} \sum_{-\infty}^{+\infty} |\Phi'(k + a)|$, dérivée terme à terme de la série $\frac{1}{\omega} \sum_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(k + a) - \Phi(k)| = \chi(a)$, est une série uniformément convergente de fonctions continues sur $[0 , 1]$, χ est dérivable, et même continuement dérivable, sur $[0 , 1]$, avec

$$\chi'(a) = \frac{1}{\omega} \sum_{-\infty}^{+\infty} |\Phi'(k + a)|$$

autrement dit la suite u_n admet la fonction densité de répartition $\rho = \chi'$ annoncée, continue sur $[0 , 1]$; on note que $\rho(0) = \rho(1)$.

5. Classe $\mathcal{U}$ de suites à densité de répartition (mod 1) continue.

Soit φ une fonction réelle définie sur R possédant les propriétés P suivantes :

P1 : φ est continue et de signe constant sur R .

Soit ε le signe de $\varphi (\varepsilon = \pm 1)$.

P2 : L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt$ est convergente et irrationnelle.

Soit $\varepsilon\omega$ la valeur de cette intégrale $(\omega > 0)$.

P3 : La série $\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k + x)$ est uniformément convergente sur $[0 , 1]$.

Soit ξ un nombre réel et posons $\Phi_\xi(x) = \int_0^x \varphi(t)\, dt + \xi$. Φ_ξ est continue et strictement monotone sur R , avec $\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi_\xi(x) = -\int_{-\infty}^0 \varphi(t)\, dt + \xi = \xi_1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi_\xi(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\, dt + \xi = \xi_2$. Il en résulte que Φ_ξ admet une fonction inverse F_ξ continue et strictement monotone sur $\mathfrak{I} =]\xi_1 , \xi_2[$ si $\varepsilon = + 1$ [resp. : $\mathfrak{I} =]\xi_2 , \xi_1[$ si $\varepsilon = - 1$] , de longueur $|\xi_2 - \xi_1| = |\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt| = \omega$ irrationnel > 0 . Puisque $\Phi'_\xi = \varphi$ est continue et de signe constant sur R , F_ξ est continuement dérivable et F'_ξ de signe constant sur $\mathfrak{I}$. D'autre part, $|F_\xi(x)| \to \infty$ quand $x \to \xi_1$ et quand $x \to \xi_2$ (du côté convenable). Compte tenu de P3, on voit que F_ξ remplit les conditions C'. Dès lors, les suites $u_n = F^*_\xi(n)$ constituent une famille de suites qui admettent toutes une même fonction densité de répartition continue sur $[0 , 1]$, dont la valeur en tout point a de $[0 , 1]$ est

$$\rho(a) = \frac{\varepsilon}{\omega} \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k + a) \quad \text{avec} \quad \varepsilon \equiv \operatorname{sgn} \varphi , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt = \varepsilon\omega .$$

La classe $\mathcal{U}$ est la réunion de toutes les familles de suites $u_n(\varphi)$ associées de cette manière à toutes les fonctions φ possédant les propriétés P.

6. Exemple.

Soit $\varphi(x) = \lambda e^{-\alpha|x|}$ où α , λ réels, $\alpha > 0$, $\frac{\lambda}{\alpha}$ irrationnel. φ possède les propriétés P, avec ici $\varepsilon = \operatorname{sgn} \lambda$ et $\omega = 2\frac{|\lambda|}{\alpha}$. On a donc

$$\rho(a) = \frac{\alpha}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|k+a|} = \frac{\alpha}{2} \left(e^{-\alpha a} \sum_{0}^{\infty} e^{-\alpha k} + e^{\alpha a} \sum_{1}^{\infty} e^{-\alpha k}\right) .$$

Une sommation immédiate donne

$$\rho(a) = \frac{\alpha \operatorname{ch} \alpha(a - 1/2)}{2 \operatorname{sh} \alpha/2}$$

et l'on note que $\rho(a) = \rho(1 - a)$.

7. Calcul de la densité de répartition (mod 1) des suites de la classe $\mathcal{U}$.

Nous allons voir comment, pour certaines suites de la classe $\mathcal{U}$, la densité de répartition $\rho(a)$ s'exprime au moyen d'une intégrale définie prise le long d'un contour multiple dans le plan complexe, ce qui nous permettra ensuite d'obtenir, en nous plaçant dans des conditions plus particulière, l'expression de $\rho(a)$ en termes finis.

7.1. - Soit φ une fonction d'une variable complexe possédant les propriétés Q suivantes, qui sont compatibles :

Q1 : φ applique la droite réelle dans la droite réelle et la restriction de φ à la droite réelle possède les propriétés P.

Q2 : φ est une fonction analytique et uniforme dont le domaine d'existence contient le voisinage du point à l'infini et le voisinage de la droite réelle.

Q3 : $\varphi(z) \to 0$ quand $|z| \to \infty$.

φ a au moins un point singulier, sinon, étant holomorphe sur le plan et à l'infini cette fonction serait constante, et cette constante serait nulle d'après Q3, ce qui, d'après P1, est impossible. Puisque φ est analytique, ses points singuliers sont deux à deux imaginaires conjugués. On peut trouver un système fini de $2K$ courbes fermées simples rectifiables Γ_k , où $1 \leq |k| \leq K$, extérieures les unes aux autres, ne rencontrant pas la droite réelle, deux à deux symétriques par rapport à celle-ci, et entourant tous les points singuliers de φ ; on convient que Γ_k et Γ_{-k} se correspondent dans la symétrie indiquée, et on désigne par L la réunion des $2K$ courbes précédentes.

Soit a un point du segment $[0 , 1]$ et soit N un entier ≥ 0 ; posant $t = x + iy$, on désigne par C le contour rectangulaire :

$$x = a \pm (N + \tfrac{1}{2}) , \quad |y| \leq N + \tfrac{1}{2}$$

$$|x - a| \leq N + \tfrac{1}{2} , \quad y = \pm (N + \tfrac{1}{2})$$

où N est choisi assez grand pour que L soit à l'intérieur de C .

La fonction G définie par

$$G(z) = \pi\varphi(z) \operatorname{cotg} \pi(z - a)$$

est méromorphe sur le domaine à connexion multiple de frontière $L + C$, avec les seuls pôles simples $z_k = a + k$ où $-N \leq k \leq N$ (qui sont bien des pôles, puisque φ ne s'annule pas sur la droite réelle). Le résidu de G au pôle z_k est, en posant $u = \pi(z - a - k)$:

$$\varphi(a + k) \cos \pi k \lim_{u \to 0} \frac{u}{(-1)^k \sin u} = \varphi(a + k) \quad .$$

Intégrons G le long de $L + C$ et appliquons le théorème des résidus ; il vient

$$\int_{C^+} G(z)\, dz - \int_{L^+} G(z)\, dz = 2i\pi \sum_{-N}^{N} \varphi(a + k) \quad .$$

On voit aisément que, étant donné $A > 1$, on a, pour N assez grand, $|\cot g\, \pi(z - a)| < A$ sur C. D'autre part, puisque φ est holomorphe au voisinage du point à l'infini, et s'annule en ce point, on a, pour $|z|$ assez grand, $\varphi(z) = \sum_1^\infty \frac{\alpha_k}{z^k}$; mais, sur la droite réelle, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx$ est convergente, ce qui exige $\alpha_1 = 0$; il en résulte que le point à l'infini est un zéro au moins double de φ, et il existe A' tel que, pour N assez grand, on ait $|\varphi(z)| < \frac{A'}{|z|^2} \leq \frac{A'}{(N - 1/2)^2}$ sur C. Ainsi donc, pour N assez grand,

$$\left|\int_{C^+} G(z)\, dz\right| \leq \frac{\pi A A'}{(N - 1/2)^2}\, 8(N + 1/2) \to 0 \quad \text{quand} \quad N \to \infty$$

et la formule des résidus donne, quand $N \to \infty$, après division par $2\varepsilon i\pi\omega$,

$$\rho(a) = \frac{i\varepsilon}{2\omega} \int_{L^+} \varphi(z) \cot g\, \pi(z - a)\, dz \quad .$$

7.2. - Soit φ une fonction d'une variable complexe possédant les <u>propriétés Q'</u> suivantes, qui sont compatibles :

Q'1 : <u>Q1</u>.

Q'2 : φ <u>est une fonction méromorphe sur le plan où elle admet un nombre fini de pôles tous simples</u>.

Q'3 : <u>Q3</u>.

Les propriétés Q' entraînant les propriétés Q, la densité de répartition des suites de la famille $u_n(\varphi)$ s'exprime au moyen de l'intégrale précédente. Les pôles simples de φ sont imaginaires, puisque φ est définie sur la droite réelle, et deux à deux imaginaires conjugués ; on les désigne par b_k, où $1 \leqslant |k| \leqslant K$, en convenant que b_k et b_{-k} sont imaginaires conjugués. On choisit les $2K$ courbes fermées Γ_k extérieures les unes aux autres, ne rencontrant pas la droite réelle et entourant respectivement les $2K$ pôles b_k. Soit r_k le résidu de φ au pôle simple b_k ; on a $r_{-k} = -\bar{r}_k$. Les zéros de $\operatorname{cotg} \pi(z - a)$ étant tous réels, G est méromorphe à l'intérieur de Γ_k avec le seul pôle simple b_k, et le résidu de $\frac{G}{\pi}$ relatif à ce pôle simple est $r_k \operatorname{cotg} \pi(b_k - a)$. On a donc

$$\int_{\Gamma_k^+} \varphi(z) \operatorname{cotg} \pi(z - a)\, dz = 2\, i\pi r_k \operatorname{cotg} \pi(b_k - a)$$

d'où

$$\rho(a) = -\frac{\varepsilon\pi}{\omega} \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant K} r_k \operatorname{cotg} \pi(b_k - a) = -\frac{\varepsilon\pi}{\omega} \sum_{1}^{K} r_k[\operatorname{cotg} \pi(b_k - a) - \operatorname{cotg} \pi(\bar{b}_{-k} - a)]$$

et un calcul simple donne finalement

$$\rho(a) = \frac{2\varepsilon\pi i}{\omega} \sum_{1}^{K} \frac{r_k \operatorname{sh} 2\pi \Im b_k}{\operatorname{ch} 2\pi \Im b_k - \cos 2\pi(a - \Re b_k)} .$$

On remarque que si, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant K$, $2\, \Re b_k$ est entier, on a $\rho(a) = \rho(1 - a)$.

8. Exemple.

Soit $\varphi(z) = \dfrac{\alpha}{\lambda(\alpha^2 + z^2)}$ où α, λ réels, $\alpha \neq 0$, $\dfrac{\lambda}{\pi}$ irrationnel. φ possède les propriétés Q', avec ici $\varepsilon = \operatorname{sgn} \alpha\lambda$, $\omega = \dfrac{\pi}{|\lambda|}$, $K = 1$; ses deux pôles simples sont $b_1 = i\alpha$, $b_{-1} = -i\alpha$ avec les résidus $r_1 = -\dfrac{i}{2\lambda}$, $r_{-1} = \dfrac{i}{2\lambda}$. On obtient

$$\rho(a) = \frac{|\operatorname{sh} 2\pi\alpha|}{\operatorname{ch} 2\pi\alpha - \cos 2\pi a}$$

et l'on note que $\rho(a) = \rho(1 - a)$, ce que $\Re b_1 = 0$ permettait de prévoir.

Les primitives de φ étant

Les primitives de φ étant

$$\Phi_\xi(x) = \frac{\alpha}{\lambda} \int_0^x \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} = \frac{1}{\lambda} \operatorname{Arctg} \frac{x}{\alpha} + \xi$$

on a

$$F_\xi^*(x) = \alpha \operatorname{tg} \lambda(x - \xi)$$

de sorte que, posant $\mu = -\lambda\xi$, c'est la suite $u_n = \alpha \operatorname{tg}(\lambda n + \mu)$ où α , λ , μ réels, $\alpha \neq 0$, $\frac{\lambda}{\pi}$ irrationnel, qui se trouve ainsi étudiée.

9. Série de Fourier de la densité $\rho(a)$ des suites de la classe $\mathcal{U}$.

Puisque ρ est continue sur $[0 , 1]$, la série de Fourier de $\rho(a)$ existe, soit $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{-2i\pi ak}$, où l'on a $c_k = \int_0^1 \rho(x) e^{2i\pi kx} dx$.

Soit ψ la transformée de Fourier de φ , définie par

$$\psi(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi xs} \varphi(x) dx$$

de sorte que $\psi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt$.

Puisque $\rho(x) = \frac{1}{\psi(0)} \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(h + x)$, on a

$$c_k = \frac{1}{\psi(0)} \int_0^1 \Big(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \varphi(h + x)\Big) e^{2i\pi kx} dx$$

d'où, la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(h + x)$ étant uniformément convergente sur $[0 , 1]$,

$$c_k = \frac{1}{\psi(0)} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \varphi(h + x) e^{2i\pi kx} dx \quad .$$

Posant $h + x = X$, on obtient

$$c_k = \frac{1}{\psi(0)} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \int_h^{h+1} \varphi(X) e^{2i\pi k(X-h)} dX = \frac{1}{\psi(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(X) e^{2i\pi kX} dX = \frac{\psi(k)}{\psi(0)} \quad .$$

Donc

$$\rho(a) \sim \frac{1}{\psi(0)} \sum_{-\infty}^{+\infty} \psi(k)\, e^{-2i\pi ak} \quad .$$

EXEMPLE. - Dans l'exemple 8 précédent, la transformée de Fourier de φ est

$$\psi(s) = \frac{\pi \operatorname{sgn} \alpha}{\lambda}\, e^{-2\pi|\alpha s|}$$

d'où $\psi(k) = \psi(0)\, e^{-2\pi|\alpha k|}$; compte tenu de la parité de ψ et de ce que la série de Fourier ici obtenue est uniformément convergente sur $[0\ ,\ 1]$, on a

$$\rho(a) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi|\alpha k|} \cos 2\pi ak = 1 + 2 \sum_{1}^{\infty} e^{-2\pi k|\alpha|} \cos 2\pi ak$$

10. Suites équiréparties (mod 1) de la classe $\mathcal{U}$.

10.1. - Les résultats qui précèdent, concernant la série de Fourier de $\rho(a)$ fournissent des conditions nécessaires et suffisantes d'équirépartition dans la classe $\mathcal{U}$.

Si les suites de la famille $u_n(\varphi)$ sont équiréparties, on a $\rho(a) = 1$ sur $[0\ ,\ 1]$, de sorte que, pour tout entier $k \neq 0$

$$\psi(k) = \psi(0)\, c_k = \psi(0) \int_0^1 e^{2i\pi kx}\, dx = \frac{\psi(0)}{2i\pi k} \left[e^{2i\pi kx}\right]_0^1 = 0 \quad .$$

Réciproquement, si $\psi(k) = 0$ pour tout entier $k \neq 0$, la série de Fourier de $\rho(a)$ se réduit à son terme constant, qui est 1 ; on a donc $\rho(a) = 1$ sur $[0\ ,\ 1]$ et les suites de la famille $u_n(\varphi)$ sont équiréparties.

Ainsi, pour que les suites de la famille $u_n(\varphi)$ soient équiréparties (mod 1) , il faut et il suffit que $\psi(k) = 0$ pour tout entier $k \neq 0$.

Mais nous allons indiquer une méthode élémentaire qui permet de déterminer directement les suites équiréparties de la classe $\mathcal{U}$.

10.2. - Conditions nécessaires d'équirépartition. - Soit $u_n(\varphi)$ une famille de suites équiréparties de la classe $\mathcal{U}$. Puisque $\rho(a) = 1$ sur $[0\ ,\ 1]$, on a

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k + a) = \varpi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt \quad \text{sur} \quad [0\ ,\ 1] \quad .$$

Posons

$$g(x) = \sum_{-\infty}^{\hat{x}-1} \varphi(k + \check{x}) \quad .$$

La fonction g est définie sur R et l'on a

$$\Delta g(x) = g(x + 1) - g(x) = \varphi(\hat{x} + \check{x}) = \varphi(x)$$

où Δg désigne la première différence finie de g.

D'après P1, Δg est continue et de signe constant sur R. D'autre part g est bornée sur R, car

$$|g(x)| = \sum_{-\infty}^{\hat{x}-1} |\varphi(k + \check{x})| < \sum_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(k + \check{x})| = \omega \quad .$$

Dès lors la suite $g(x + k)$, qui est strictement monotone et bornée, est convergente quand $k \to +\infty$ et quand $k \to -\infty$; d'après P3, elle est même uniformément convergente sur $[0 , 1]$ quand $k \to +\infty$ et quand $k \to -\infty$.

Soit N un entier $\geqslant 0$; on a

$$\sum_{-N}^{N} \varphi(x + k) = g(x + N + 1) - g(x - N) \quad .$$

Quand $N \to \infty$, le premier membre tend vers $\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt$, intégrale convergente et irrationnelle d'après P2, et le deuxième membre tend vers $\lim_{k\to+\infty} g(x + k) - \lim_{k\to-\infty} g(x + k)$, de sorte que cette différence est constante sur $[0 , 1]$, finie et irrationnelle.

En résumé, si les suites de la famille $u_n(\varphi)$ sont équiréparties, il existe une fonction g définie sur R telle que $\varphi = \Delta g$ et qui possède les <u>propriétés E</u> suivantes :

E1 : Δg <u>est continue et de signe constant sur</u> R.

E2 : <u>La différence</u> $\lim_{k\to+\infty} g(x + k) - \lim_{k\to-\infty} g(x + k)$ <u>est constante sur</u> $[0 , 1]$, <u>finie et irrationnelle</u>.

E3 : <u>La suite</u> $g(x + k)$ <u>est uniformément convergente sur</u> $[0 , 1]$ <u>quand</u> $k \to +\infty$ <u>et quand</u> $k \to -\infty$.

10.3. - Conditions suffisantes d'équirépartition. - Soit g une fonction définie sur R, et possédant les propriétés E, et posons $\varphi = \Delta g$.

D'après E1, φ est continue et de signe constant sur R, et, d'après E3, la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k + x)$ est uniformément convergente sur $[0, 1]$. Compte tenu de E2, la relation déjà utilisée

$$\sum_{-N}^{N} \varphi(x + k) = g(x + N + 1) - g(x - N)$$

montre, quand $N \to \infty$, que

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + k) = \lim_{k\to+\infty} g(x + k) - \lim_{k\to-\infty} g(x + k)$$

est constante sur $[0, 1]$, ce qui permet d'écrire

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + k) = \int_0^1 \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y + k)\, dy \quad .$$

Puisque φ, étant continue, est localement intégrable sur R, et que la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y + k)$ est uniformément convergente sur $[0, 1]$, on obtient, en posant $y + k = t$,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + k) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \varphi(y + k)\, dy = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} \varphi(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt \quad .$$

Cette intégrale, finalement égale à $\lim_{k\to+\infty} g(x + k) - \lim_{k\to-\infty} g(x + k)$, est convergente et, d'après E2, irrationnelle.

Ainsi la fonction φ possède les propriétés P, et les suites de la famille $u_n(\varphi)$ qui lui sont associées dans la classe $\mathfrak{U}$ sont équiréparties, car leur densité de répartition en tout point a de $[0, 1]$ est

$$\rho(a) = \frac{\varepsilon}{\omega} \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k + a) = \frac{\varepsilon}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt = 1 \quad .$$

On voit que les conditions nécessaires d'équirépartition obtenues dans 10.2 sont aussi suffisantes.

10,4.- Il en résulte que les suites équiréparties de la classe $\mathcal{U}$ sont les suites des familles $u_n(\Delta g)$, où g est une fonction définie sur R et possédant les propriétés E.

On obtiendra, par exemple, une famille de suites équiréparties en prenant $g(x) = \lambda \operatorname{th}(\alpha x + \beta)$ où α, β, λ réels, $\alpha \neq 0$, λ irrationnel ; ici Δg a le signe de $\alpha\lambda$ et la différence des limites qui figure dans E2 est égale à $2 \lambda \operatorname{sgn} \alpha$.