Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Françoise Bertrandias

Transformation de Laplace-Borel. Fonctions entières et séries de puissances

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 2 (1960-1961), exp. n° 7, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1960-1961__2__A7_0>

TRANSFORMATION DE LAPLACE-BOREL
FONCTIONS ENTIÈRES ET SÉRIES DE PUISSANCES

par Mme Françoise BERTRANDIAS

1. Transformation de Laplace-Borel : Définition.

Soit $f(z)$ une fonction entière de type exponentiel, c'est-à-dire telle que $\limsup_{|z|\to\infty} \frac{\mathrm{Log}|f(z)|}{|z|}$ ait une valeur finie.

À cette fonction est attachée une indicatrice de croissance I, d'équation polaire $\rho = \alpha(\varphi) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{r}$. On considère l'intégrale

$$\ell_\varphi(s) = \int_{\Delta\varphi} e^{-sz} f(z)\, dz \tag{1}$$

prise le long de la demi-droite issue de l'origine, et d'angle polaire φ. Cette intégrale converge, si s appartient au demi-plan $\mathcal{R}\, se^{i\varphi} > \alpha(\varphi)$, et définit donc une fonction $\ell_\varphi(s)$ holomorphe dans ce demi-plan.

La réunion de ces demi-plans, lorsque φ varie, est le complémentaire d'un domaine borné connexe D, dont la frontière C est l'antipodaire, par rapport à l'origine, de la courbe $\rho = \alpha(-\varphi)$, symétrique de I par rapport à l'axe réel.

On démontre que les fonctions $\ell_\varphi(s)$ définissent une même fonction $\ell(s)$, holomorphe et uniforme à l'extérieur de C, nulle à l'infini : c'est la transformée de Laplace-Borel de la fonction $f(z)$.

2. Formule d'inversion.

Les dérivées successives $f^{(n)}(z)$ sont de type exponentiel. Soient $\ell_n(s)$ leurs transformées de Laplace. En intégrant par parties n fois la formule (1) on trouve :

$$s^n \ell(s) = s^{n-1} f(0) + s^{n-2} f'(0) + \ldots + f^{(n-1)}(0) - \ell n(s) .$$

On en déduit le développement de $\ell(s)$ au voisinage de $s = \infty$:

$$\ell(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{s^{n+1}}$$

et la formule d'inversion :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_L e^{sz} \ell(s)\, ds \tag{2}$$

L étant une courbe fermée quelconque entourant C .

3. Fonctions entières et séries de puissances.

A la fonction entière $f(z)$, on associe la série de puissances

$$g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, \zeta^n$$

dont le rayon de convergence $e^{-\beta}$ est non nul puisque $\beta = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log|f(n)| \leqslant \alpha(0)$. Il existe des relations intéressantes entre les fonctions $f(z)$ ou $\ell(s)$ et la fonction $G(x) = g(e^{-x})$ définie par la série $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, e^{-nx}$. En effet d'après (2) :

$$f(n) = \frac{1}{2i\pi} \int_L e^{ns} \ell(s)\, ds$$

d'où

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_L e^{ns} \ell(s)\, ds\right) \quad .$$

En se plaçant dans le demi-plan $\Re x > \alpha(0)$, on peut intervertir les deux sommations, et l'on trouve :

$$G(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\ell(s)\, ds}{1 - e^{s-x}} \quad . \tag{3}$$

Cette intégrale permet de prolonger $G(x)$ dans toute la partie du plan que l'on peut atteindre à partir du point $+\infty$ de l'axe réel sans traverser la courbe L et les courbes $L \pm 2ki\pi$ déduites de L par des translations parallèles à l'axe imaginaire et de grandeur $2k\pi$ $(k = 1 , 2 , \ldots)$.

Dans la même région, la fonction $G(x)$ est définie par la série :

$$G(x) = \frac{1}{2} f(0) + \ell(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\ell(x + 2ki\pi) + \ell(x - 2ki\pi)) \tag{4}$$

qui se déduit de l'intégrale (3) à l'aide du développement

$$\frac{1}{1-\ell^{t}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{t} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{t+2ki\pi} + \frac{1}{t-2ki\pi}\right) \quad .$$

Un cas remarquable est celui où la courbe $L + 2i\pi$ est tout entière à l'extérieur de la courbe L, ce qu'on exprimera par : "la courbe L vérifie l'hypothèse H ". (Exemple : $f(z)$ de type exponentiel $\alpha = \max \alpha(\varphi) < \pi$).

En effet dans ce cas $\sum_{k=1}^{\infty} (\ell(x+2ki\pi) + \ell(x-2ki\pi))$ est uniformément convergente à l'intérieur de la courbe L. D'après (4), la fonction $G(x) - \ell(x)$ est holomorphe dans le domaine D. $\ell(s)$ étant holomorphe et nulle pour $s = \infty$, on a :

$$\ell(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{G(x)}{s-x}\, dx \quad . \tag{5}$$

De plus, d'après (2) :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_L e^{xz}\, G(x)\, dx \quad . \tag{6}$$

Dans le cas où la courbe L vérifie l'hypothèse (H), la formule (6) montre que la fonction $f(z)$ est déterminée par la donnée de la fonction $G(x)$, c'est-à-dire de la suite $\{f(n)\}$, $(n = 0, 1, 2, \dots)$.

En particulier $f(n) = 0$, $(n = 0, 1, 2, \dots)$ entraîne $G(x) \equiv 0$, et donc d'après (6)

$$f(z) \equiv 0 \quad .$$

D'autre part, en supposant toujours l'hypothèse (H) vérifiée, l'intégrale (3) montre que la fonction $G(x)$ peut être prolongée jusqu'au point $-\infty$ de l'axe réel, c'est-à-dire que la série de puissances $g(\zeta)$ peut être prolongée à l'intérieur de son cercle de convergence jusqu'à l'infini.

On voit donc que les propriétés de croissance d'une fonction entière de type exponentiel se traduisent de façon remarquable sur la série de puissances associée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Prolongement analytique de la série de Taylor, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 68, 1951, p. 105-124.