Gérard Rauzy

Les séries l et le théorème de Dirichlet

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 2 (1960-1961), exp. nº 4, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1960-1961__2__A4_0>

Séminaire DELANGE-PISOT
(Théorie des nombres)
2e année, 1960/61, n° 4

12 décembre 1960

LES SÉRIES L ET LE THÉORÈME DE DIRICHLET

par Gérard RAUZY

I. Définitions.

1. Soit m un nombre entier positif et χ un caractère mod m, de conducteur $f(\chi)$. En prenant le caractère χ lui-même ou en prenant le caractère propre prolongement de ce caractère (égal à 0 pour tout entier non premier avec $f(\chi)$) on peut définir deux séries de Dirichlet dites séries L :

$$\begin{cases} L_m(s|\chi) = \sum\limits_{(n,m)=1} \dfrac{\chi(n)}{n^s} \\ L(s|\chi) = \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\chi(n)}{n^s} \end{cases} .$$

Comme $|\chi(n)| \leqslant 1$ quel que soit n entier, on voit, par comparaison avec la série de Riemann $\zeta(s) = \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^s}$, que les séries L sont absolument convergentes pour $\Re s > 1$ ($\Re s$ désignant la partie réelle de s).

Il en résulte, la fonction $\chi(n)$ étant multiplicative, que l'on a l'identité d'Euler (1)

$$\begin{cases} L_m(s|\chi) = \prod\limits_{p\nmid m} \left(1 - \dfrac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{les produits étant pris pour les nombres } p \text{ premiers} \\ L(s|\chi) = \prod\limits_{p} \left(1 - \dfrac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \end{cases} .$$

On en déduit alors que :

$$L(s|\chi) = \left\{\prod_{p|m} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}\right\} L_m(s|\chi) .$$

2. Si $\chi \neq \varepsilon$, $\sum\limits_{1}^{\varphi(f)} \chi(a) = 0$ donc $\sum\limits_{1}^{n} \chi(a)$ est bornée quel que soit n entier positif ; il en résulte que l'abscisse de convergence simple α de $L(s|\chi)$ est

---

(1) La condition $a|b$ signifie : a divise b. La condition $a\nmid b$ signifie : a ne divise pas b.

inférieure ou égale à 0 quand $\chi \neq \varepsilon$.

Comme la série $\sum_{1}^{\infty} \chi(a)$ ne converge pas, $\alpha \geq 0$. Donc $\alpha = 0$.

Donc pour $\Re s > 0$, les fonctions $L(s|\chi)$ avec $\chi \neq \varepsilon$ sont des fonctions analytiques de s (limites uniformes, sur tout compact, de fonctions analytiques).

3. Définition de $\operatorname{Log} L_m(s|\chi)$ et de $\operatorname{Log} L(s|\chi)$.

Supposons s réel supérieur à 1 strictement. Le produit $\prod_p (1 - \frac{\chi(p)}{p^s})^{-1}$ étant absolument convergent, $L_m(s|\chi)$ fonction continue de s ne s'annule jamais pour $s > 1$, et quand $s \to \infty$, la convergence de $L_m(s|\chi)$ étant uniforme pour $s \geq s_0 > 0$, $L_m(s|\chi)$ a pour limite 1.

Il est donc possible pour $s > 1$ de définir la fonction $\operatorname{Log} L_m(s|\chi)$ par continuité, en prenant $\lim_{s \to \infty} \operatorname{Log} L_m(s|\chi) = 0$.

En prenant de même la détermination de $\operatorname{Log}(1 + z)$ qui s'annule pour $z = 0$, on peut définir $\operatorname{Log}(1 - \frac{\chi(p)}{p^s})^{-1}$ pour tout $s > 0$. (Car $|\chi(p)| \leq 1$ et $p \geq 2$). On a alors évidemment pour $s > 1$: $\operatorname{Log} L_m(s|\chi) = \sum_{p \nmid m} \operatorname{Log}(1 - \frac{\chi(p)}{p^s})^{-1}$.

On montrerait de la même manière que : $\operatorname{Log} L(s|\chi) = \sum_p \operatorname{Log}(1 - \frac{\chi(p)}{p^s})^{-1}$.

Mais en développant en série entière le $\operatorname{Log}(1 + z)$ pour $|z| < 1$ on obtient :

$$\operatorname{Log}(1 - \frac{\chi(p)}{p^s})^{-1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \frac{(\chi(p))^{\nu}}{p^{\nu s}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \frac{\chi(p^{\nu})}{p^{\nu s}}$$

et, en définitive, pour $s > 1$

$$\operatorname{Log} L_m(s|\chi) = \sum_{p \nmid m} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \frac{\chi(p^{\nu})}{p^{\nu s}}$$

la série double du deuxième membre étant absolument convergente pour $s > 1$.

II. Le théorème de Dirichlet.

1. Posons $g(p) = \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{\nu} \frac{\alpha(p^{\nu})}{p^{\nu s}}$.

On a alors, si $s \geq 1$

$$|g(p)| < \frac{1}{p^2} \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{\nu} \frac{1}{p^{\nu-2}} \leq \frac{1}{p^2}.$$

Et par conséquent

$$\sum_{p \not| m} \frac{\chi(p)}{p^s} = \text{Log } L_m(s|\chi) + g_m(s|\chi)$$

où $g_m(s|\chi)$ reste bornée quand $s \geqslant 1$.

De même, $g(s|\chi)$ restant bornée quand $s \geqslant 1$, on peut écrire pour $s > 1$

$$\sum_{p \not| m} \frac{\chi(p)}{p^s} = \text{Log}(s|\chi) + g(s|\chi) \quad .$$

2. $\chi(p)$ est évidemment constant et égal à $\chi(A)$ pour tout $p \in A$, où A est une classe de restes premiers avec m .

On a donc, pour $s > 1$

$$\sum_{p \not| m} \frac{\chi(p)}{p^s} = \sum_{A \in \mathcal{G}_m} \chi(A) \sum_{p \in A} \frac{1}{p^s} \quad .$$

Posant $y_\chi = \sum_{p \not| m} \frac{\chi(p)}{p^s}$ et $x_A = \sum_{p \in A} \frac{1}{p^s}$ nous avons donc

$$y_\chi = \sum_A \chi(A) \; x_A \quad .$$

Soit, en vertu du principe de dualité :

$$\sum_{p \in A} \frac{1}{p^s} = x_A = \frac{1}{\varphi(m)} \sum_\chi \bar{\chi}(A) \; y_\chi \quad .$$

Soit finalement

$$\sum_{p \in A} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{\varphi(m)} \sum_\chi \bar{\chi}(A) \text{ Log } L(s|\chi) + G(s|\chi) \quad .$$

3. Supposons que pour tout caractère χ distinct du caractère principal ε , $L(1|\chi)$ soit différent de 0 . Alors, si $\chi \neq \varepsilon$ en vertu de l'analyticité pour $\Re s > 0$, $L(s|\chi) \to L(1|\chi) \neq 0$. Donc, quand $s > 1$ tend vers 1 , $\text{Log } L(s|\chi)$ précédemment défini reste borné.

D'autre part, $\text{Log } L(s|\varepsilon) = \text{Log } \zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$ quand $s \to 1$.

Enfin $G(s|\chi)$ reste bornée.

Il en résulte alors que

$$\sum_{p\in A} \frac{1}{p^s} \sim \frac{1}{\varphi(m)} \operatorname{Log} \frac{1}{s-1} \quad \text{quand} \quad s \to 1 \quad (s > 1) \quad .$$

On peut montrer aisément que ce résultat reste valable si $s \to 1$ de manière quelconque ; on en déduit alors, par des procédés analytiques, que si $\pi(x , A)$ désigne le nombre de p dans la classe A inférieurs à x , et si $\pi(x)$ désigne le nombre de nombres premiers inférieurs à x on a :

$$\pi(x , A) \sim \frac{1}{\varphi(m)} \pi(x) \sim \frac{1}{\varphi(m)} \frac{x}{\operatorname{Log} x} \quad \underline{\text{quand}} \quad x \to \infty \quad .$$

Le résultat que nous avons obtenu montre immédiatement qu'il ne peut pas y avoir un nombre fini de nombres premiers dans la classe A (car alors $\sum_{p\in A} \frac{1}{p^s}$ serait borné quand $s \to 1$, donc aussi $\operatorname{Log} \frac{1}{s-1}$) ; c'est là le théorème de Dirichlet.

<u>Si</u> m <u>et</u> n <u>sont premiers entre eux, il y a une infinité de nombres premiers de la forme</u> $ma + n$ <u>où</u> a <u>est entier positif</u>.

III. <u>Démonstration du fait que</u> $L(1 | \chi) \neq 0$ <u>si</u> χ <u>n'est pas principal</u>.

Si l'on considère le caractère χ de conducteur 4 tel que

$$\begin{cases} \chi(a) = 1 & \text{si} \quad a \equiv 1 \quad (4) \\ \chi(a) = -1 & \text{si} \quad a \equiv 3 \quad (4) \end{cases}$$

on peut calculer

$$L(1 | \chi) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \dots = \frac{\pi}{4} \quad .$$

On conçoit que, en utilisant les propriétés des racines de l'unité, on puisse ainsi calculer explicitement les valeurs de $L(1 | \chi)$ pour un caractère χ quelconque (en utilisant la périodicité de $\chi(a)$ en a) et que l'on puisse ainsi montrer de manière purement algébrique la propriété fondamentale des séries-L du point de vue théorème de Dirichlet (2).

Le procédé étant long à exposer, nous utiliserons une méthode ayant recours à l'analyse. Plus précisément, posant

$$\zeta_m(s) = \prod_{\chi\in\mathcal{R}} L(s | \chi) = \zeta(s) \prod_{\chi\neq\varepsilon} L(s | \chi)$$

$\mathcal{R}$ étant le groupe des caractères modulo m , nous écrirons pour $s > 1$

---

(2) Voir : HASSE (Helmut). - Vorlesungen über Zablentheorie. - Berlin, Springer-Verlag, 1950 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 59).

$$\begin{cases} \zeta_m(s) = \sum_1^\infty \dfrac{\sigma_m(n)}{n^s} \\ \text{avec} \quad \sigma_m(n) = \sum_{n_1 \cdots n_{\varphi(m)} = n} \chi(n_1) \cdots \chi_{\varphi(m)}(n_{\varphi(m)}) \\ \text{(la somme étant étendue à toutes les décompositions de } n \text{ en} \\ \varphi(m) \text{ facteurs supérieurs ou égaux à } 1 \text{).} \end{cases}$$

Nous montrerons alors :

1° que l'abscisse α de convergence de la série $\sum_1^\infty \frac{\sigma_m(n)}{n^s}$ est telle que $\frac{1}{\varphi(m)} \leq \alpha \leq 1$ en calculant algébriquement les coefficients $\sigma_m(n)$.

2° qu'il en résulte que $\zeta_m(s)$ a un pôle pour $s = 1$, donc que $L(1|\chi) \neq 0$ pour tout $\chi \neq \varepsilon$.

1. <u>Calcul de</u> $\sigma_m(n)$.

a. Remarquons tout d'abord que $\sigma_m(n)$ <u>est une fonction multiplicative</u> : si $(n , n') = 1$, à toute décomposition $nn' = N_1 \cdots N_\varphi$, on peut associer, de manière biunivoque, une décomposition de

$$n = n_1 \cdots n_\varphi \quad \text{et de} \quad n' = n'_1 \cdots n'_\varphi$$

avec $n_j n'_j = N_j$ pour tout $j = 1 , \ldots , \varphi = \varphi(m)$. On a bien alors :

$$\sigma_m(nn') = \sum_{N_1 \cdots N_\varphi = nn'} \chi_1(N_1) \cdots \chi_\varphi(N_\varphi)$$

$$= \sum_{n_1 \cdots n_\varphi = n} \Big(\sum_{n'_1 \cdots n'_\varphi = n'} \chi_1(n_1)\, \chi_1(n'_1) \cdots \chi_\varphi(n_\varphi)\, \chi_\varphi(n'_\varphi) \Big)$$

soit $\sigma_m(nn') = \sigma_m(n)\, \sigma_m(n')$.

b. Il suffit donc de <u>calculer</u> $\sigma_m(p^\nu)$ <u>pour tout</u> p-<u>premier et tout</u> ν <u>entier</u>. Considérons alors la série formelle $S(x) = \prod_{\chi \in \mathcal{R}} \big(\sum_{\nu=0}^\infty \chi(p^\nu)\, x^\nu \big)$; on a

$$S(x) = \sum_{\nu=0}^\infty x^\nu \sum_{\nu_1 + \cdots + \nu_\varphi = \nu} \chi(p)^{\nu_1} \cdots \chi(p)^{\nu_\varphi} = \sum_{\nu=0}^\infty \sigma_m(p^\nu)\, x^\nu$$

on en déduit :

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma_m(p^\nu)\ x^\nu\right) \prod_{\chi\in\mathcal{R}} (1 - x\chi(p)) = \prod_{\chi\in\mathcal{R}} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \chi(p^\nu)\ x^\nu\right)(1 - x\chi(p)) = 1 .$$

c. Nous allons maintenant transformer le produit $T(x) = \prod_{\chi\in\mathcal{R}} (1 - x\chi(p))$.

Soit $\mathcal{R}_p$ l'ensemble des $\chi \in \mathcal{R}$ tels que $\chi(p) \neq 0$ (c'est-à-dire tels que p soit premier avec leur conducteur). $\mathcal{R}_p$ est évidemment un sous-groupe de $\mathcal{R}$ et l'on a :

$$T(x) = \prod_{\chi\in\mathcal{R}_p} (1 - x\chi(p)) \quad .$$

Soit alors $\mathcal{U}_p$ l'ensemble des $\chi \in \mathcal{R}$ tels que $\chi(p) = 1$. $\mathcal{U}_p$ est un sous-groupe de $\mathcal{R}_p$, soit g_p son ordre, f_p son index.

Si a est une classe de $\mathcal{R}_p/\mathcal{U}_p$, la fonction $\chi(p)$ a une valeur constante ζ_α quand p parcourt a . La correspondance $a \to \zeta_\alpha$ est évidemment un isomorphisme entre le groupe $\mathcal{R}_p/\mathcal{U}_p$ et le groupe multiplicatif des valeurs prises par $\chi(p)$ quand p parcourt $\mathcal{R}_p$.

En particulier, comme $(a)^{f_p} = e$, élément unité de $\mathcal{R}_p/\mathcal{U}_p$ d'ordre f_p , il en résulte que lorsque a parcourt $\mathcal{R}_p/\mathcal{U}_p$, ζ_α parcourt les f_p-racines f_p-ièmes de l'unité. On a donc :

$$T(x) = \prod_{\chi\in\mathcal{R}_p} (1 - x\chi(p)) = \prod_{\alpha\in\mathcal{R}_p/\mathcal{U}_p} \left(\prod_{\chi\in\alpha} (1 - x\chi(p)) \right)$$

$$= \prod_{\alpha} (1 - x\zeta_\alpha)^{g_p} = \left(\prod_{\alpha} (1 - x\zeta_\alpha)\right)^{g_p} \quad .$$

Mais $\prod_{\alpha} (1 - x\zeta_\alpha) = 1 - x^{f_p}$ puisque les ζ_α sont les racines f_p-ièmes de l'unité. On a donc $T(x) = (1 - x^{f_p})^{g_p}$, soit encore :

$$T(x) \times \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu + g_p - 1}{\nu} x^{\nu f_p} = 1 \quad .$$

En comparant avec : $T(x) \times S(x) = 1$, il vient l'anneau des séries formelles étant d'intégrité :

$$S(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma_m(p^\nu)\ x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu + g_p - 1}{\nu} x^{\nu f_p} \quad ,$$

Il en résulte alors par identification que les coefficients $\sigma_m(p^\nu)$ sont des entiers et que l'on a :

$$\begin{cases} \sigma_m(p^\nu) \geqslant 0 & \text{pour tout } \nu \geqslant 0 \\ \sigma_m(p^\nu) \geqslant 1 & \text{si } f_p \text{ divise } \nu \end{cases} .$$

d. f_p index de $\mathcal{R}_p/\mathcal{U}_p$ divise l'ordre de $\mathcal{R}_p$ qui divise l'ordre de $\mathcal{R}$ c'est-à-dire $\varphi(m)$. A fortiori, si ν est multiple de $\varphi(m)$, on a donc $\sigma_m(p^\nu) \geqslant 1$.

$\sigma_m(n)$ étant multiplicative, il en résulte que pour tout $n \geqslant 1$ on a : $\sigma_m(n) \geqslant 0$, et que $\sigma_m(n^{\varphi(m)}) \geqslant 1$.

La série $\sum_n \frac{\sigma_m(n)}{n^{1/\varphi(m)}}$ ne peut pas être convergente.

D'autre part, pour tout $s > 1$, $\sum \frac{\sigma_m(n)}{n^s}$ produit d'un nombre fini de séries absolument convergentes, est absolument convergente.

L'absoisse α de convergence simple de la série $\sum \frac{\sigma_m(n)}{n^s}$ est donc telle que $\frac{1}{\varphi(m)} \leqslant \alpha \leqslant 1$.

2. $\zeta_m(s)$ a un pôle pour $s = 1$.

a. Si $\chi \neq \varepsilon$, nous avons déjà vu que $L(s|\chi)$ étaient des fonctions holomorphes de s pour $s > 0$.

b. Si $\chi = \varepsilon$, $L(s|\varepsilon) = \zeta(s)$.

La fonction $(1 - \frac{2}{2^s})\,\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$ pour $s > 1$, se prolonge pour $s > 0$ au moyen de la série de Dirichlet du deuxième membre, dont la somme est analytique pour $s > 0$.

La fonction $\zeta(s)$ est donc prolongeable pour $s > 0$ par une fonction méromorphe ne pouvant avoir comme seuls pôles que les zéros de $1 - \frac{2}{2^s}$.

Quand $s \to 1$, $1 - \frac{2}{2^s} \sim (s-1)\,\mathrm{Log}\,2$, et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{s \to 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s} = \mathrm{Log}\,2$.

En considérant la fonction

$$\left(1-\frac{3}{3^s}\right)\zeta(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(3n+1)^s}+\frac{1}{(3n+2)^s}-\frac{2}{(3n+3)^s}\right\}$$

fonction qui est également prolongeable pour $s>0$ par une fonction analytique, on voit facilement que le seul zéro de $1-\frac{2}{2^s}$, pôle de $\zeta(s)$, est $s=1$.

Pour $s>0$ la fonction $\zeta(s)$ n'a qu'une seule singularité : le point $s=1$ qui est un pôle de résidu 1.

c. La fonction $\zeta_m(s)$ ne peut donc avoir pour $s>0$ que le point $s=1$ comme singularité, cette singularité étant alors un pôle.

d. Si une fonction analytique $f(s)$ se développe en série de Dirichlet $\Sigma\frac{a_n}{n^s}$ d'abscisse de convergence simple α, les coefficients a_n étant positifs ou nuls, alors $f(s)$ a une singularité pour $s=\alpha$ (on suppose évidemment $f(s)$ prolongeable pour $\Re s<\alpha$).

Supposons le contraire : les singularités étant isolées, il existe $D>0$ tel que $f(s)$ n'a pas de singularité pour $|s-\alpha|\leqslant D$.

Soit $\beta=\alpha+\frac{D}{3}$; $f(s)$ est développable en série de Taylor au point β, série de rayon de convergence supérieur ou égal à $\frac{2D}{3}$.

Soit

$$f(s)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(\beta)\,(s-\beta)^{\nu}\quad.$$

Comme $\beta>\alpha$, on peut dériver $\Sigma\frac{a_n}{n^s}$ (qui représente $f(s)$ pour $s>\beta$) termes à termes. On a donc

$$\frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(\beta)=(-1)^{\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\beta}}\,\frac{(\mathrm{Log}\,n)^{\nu}}{\nu!}\quad.$$

Soit alors : $\gamma=\alpha-\frac{D}{4}$, $|\gamma-\beta|<\frac{2D}{3}$ donc $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}f^{\nu}(\beta)\,(\gamma-\beta)^{\nu}$ est convergente. Si $B_{\nu,n}=\frac{a_n}{n^{\beta}}\frac{(\{\beta-\gamma\}\,\mathrm{Log}\,n)^{\nu}}{\nu!}$, $B_{\nu,n}$ est positif et $\sum_{\nu}(\sum_{n}B_{\nu,n})$ est convergente. La famille $B_{\nu,n}$ est sommable, et par conséquent $\sum_{n}(\sum_{\nu}B_{\nu,n})$ est une série convergente. Or, cette série est $\sum_{n}\frac{a_n}{n^{\gamma}}$, ce qui est impossible puisque $\gamma<\alpha$ et que α est l'abscisse de convergence simple.

3. $L(1|\chi) \neq 0$ si $\chi \neq \varepsilon$.

En effet, d'après le lemme précédent $\zeta_m(s)$ représentable pour $s > \alpha$ par une série de Dirichlet à coefficients positifs a certainement une singularité pour $s = \alpha$, c'est-à-dire pour un point du segment $[\frac{1}{\varphi(m)}, 1]$.

D'après le lemme (c) cette singularité ne peut être qu'un pôle pour $s = 1$.

Si l'une au moins des séries $L(1|\chi)$ avait un zéro pour $s = 1$, le produit $\prod_{\chi\neq\varepsilon} L(s|\chi)$ aurait un zéro pour $s = 1$, et en vertu de l'analyticité $\frac{1}{s-1}\prod_{\chi\neq\varepsilon} L(s|\chi)$ resterait holomorphe pour $s = 1$. Comme $\zeta(s)$ a un pôle simple pour $s = 1$, $\zeta_m(s) = \zeta(s) \prod_{\chi\neq\varepsilon} L(s|\chi)$ resterait donc holomorphe, ce qui aboutit à une contradiction.