Jean-Paul Bertrandias

Distribution uniforme modulo 1

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 1 (1959-1960), exp. nº 3, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1959-1960__1__A2_0>

Séminaire DELANGE-PISOT
(Théorie des nombres)
1re année, 1959/60, n° 3

8 décembre 1959

DISTRIBUTION UNIFORME MODULO 1

par Jean-Paul BERTRANDIAS

1. Notations.

On étudie la répartition modulo 1 d'une suite de nombres réels u_n , c'est-à-dire la répartition sur le segment $(0 , 1)$ des parties fractionnaires $\underset{\vee}{u_n}$ des nombres u_n .

On notera $\hat{u}_n$ la partie entière de u_n (plus grand entier inférieur ou égal à u_n). On a donc :

$$u_n = \hat{u}_n + \underset{\vee}{u_n} \qquad \text{avec} \qquad 0 \leq \underset{\vee}{u_n} < 1$$

Il sera souvent commode de représenter la suite u_n sur la circonférence $\mathcal{C}\,|z| = 1$ du plan complexe par la suite des nombres complexes $e^{2i\pi u_n}$. Le nombre u_n sera représenté par le point d'angle polaire $2\pi u_n$ et deux nombres égaux modulo 1 seront représentés par le même point.

On appellera intervalle (α , β) $[0 \leq \alpha < \beta \leq 1]$ l'ensemble des points de l'arc orienté d'origine $2\pi\alpha$ et d'extrémité $2\pi\beta$ (l'extrémité $2\pi\beta$ n'appartenant pas à l'intervalle) et on dira donc que u_n appartient à l'intervalle (α , β) si

$$\alpha \leq \underset{\vee}{u_n} < \beta \quad .$$

2. Définition.

Étant donnés un intervalle (α , β) et un nombre entier $N > 0$, soit $N(\alpha , \beta)$ le nombre des termes de la suite u_n d'indices inférieurs ou égaux à N et appartenant à l'intervalle (α , β) .

Si quel que soit l'intervalle (α , β)

$$\lim_{N \to 0} \frac{N(\alpha , \beta)}{N} = \beta - \alpha$$

on dit que la suite u_n est uniformément répartie modulo 1 (u. r. mod 1).

Il est facile de voir que cette définition implique que $\underset{\vee}{u_n}$ est dense sur $(0 , 1)$.

3. Théorème fondamental (H. WEYL [8])

Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite u_n soit u. r. mod 1 est que pour toute fonction $f(x)$ intégrable au sens de Riemann sur $[0\,,\,1]$ on ait :

$$\lim_{N \to 0} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(u_n) = \int_0^1 f(x)\,dx \qquad (2)$$

a. La condition est suffisante. - (2) est vérifiée pour toute fonction $f(x)$ intégrable au sens de Riemann. Elle est donc vérifiée pour la fonction caractéristique de tout intervalle $(\alpha\,,\,\beta)$ [c'est-à-dire la fonction égale à 1 si $x \in (\alpha\,,\,\beta)$ et à 0 si $x \notin (\alpha\,,\,\beta)$]. Pour cette fonction :

$$\sum_{n=1}^{N} f(u_n) = N(\alpha\,,\,\beta) \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 f(x)\,dx = \beta - \alpha$$

(1) est vérifiée et u_n est donc bien u. r. mod 1 .

b. La condition est nécessaire. - La suite u_n est u. r. mod 1 . D'après la définition, (2) est vérifiée pour les fonctions caractéristiques d'intervalle. (2) est vérifiée aussi pour leurs combinaisons linéaires, c'est-à-dire pour les fonctions en escalier.

Comme $f(x)$ est intégrable au sens de Riemann, on peut trouver deux suites de fonctions en escalier $g_i(x)$ et $G_i(x)$ telles que :

$$g_i(x) \leq f(x) \leq G_i(x) \qquad \text{pour tout } x \quad ,$$

et

$$\lim_{i \to \infty} \int_0^1 g_i(x)\,dx = \lim_{i \to \infty} \int_0^1 G_i(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx \quad .$$

On peut écrire :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g_i(u_n) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(u_n) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} G_i(u_n)$$

donc

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g_i(u_n) = \int_0^1 g_i(x)\,dx \leq \underline{\lim}\, \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(u_n) \leq \overline{\lim}\, \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(u_n) \leq \int_0^1 G_i(x)\,dx$$
$$= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} G_i(u_n) \quad .$$

Puis en faisant tendre i vers l'infini :

$$\underline{\lim}\, \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\underset{\vee}{u_n}) = \overline{\lim}\, \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\underset{\vee}{u_n}) = \int_0^1 f(x)\, dx \quad .$$

(2) est donc bien vérifiée quelle que soit la fonction $f(x)$ intégrable au sens de Riemann.

4. Critère de Weyl.

Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite u_n soit u. r. mod 1 est que :

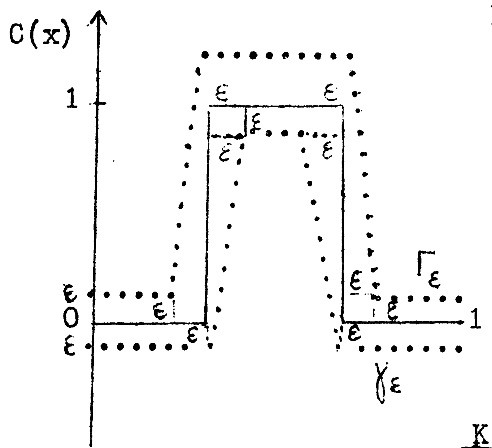
$$(3) \qquad \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi k u_n} = 0$$

pour tous les entiers k différents de 0 .

a. La condition est nécessaire. - Si u_n est u. r. mod 1 , l'application du théorème fondamental aux fonctions $f(x) = e^{2i\pi kx}$ montre que (3) est bien vérifiée.

b. La condition est suffisante. - (3) est vérifiée pour tout entier $k \neq 0$. Pour un polynôme trigonométrique sans terme constant, on a donc :

$$(4) \qquad \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{\substack{k=-K \\ k \neq 0}}^{K} a_k\, e^{2i\pi k u_n} = 0 \quad .$$



Considérons alors la fonction caractéristique $C(x)$ d'un intervalle (α , β) et approchons-la par les deux fonctions continues γ_ε et Γ_ε (voir la figure). Ces deux fonctions étant continues et à variation bornée, elles ont des développements en séries de Fourier uniformément convergents et il existe un entier K tel que :

$$\left| \sum_{k=-K}^{K} c_k\, e^{2i\pi kx} - \gamma_\varepsilon(x) \right| < \varepsilon$$

pour tout x .

$$\left| \sum_{k=-K}^{K} C_k\, e^{2i\pi kx} - \Gamma_\varepsilon(x) \right| < \varepsilon$$

On a donc :

On a donc :

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=-K}^{K} c_k\, e^{2i\pi k u_n} < C(u_n) < \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=-K}^{K} C_k\, e^{2i\pi k u_n} .$$

Lorsque $N \longrightarrow \infty$, d'après (4)

$$c_0 \leq \underline{\lim}\, \frac{N(\alpha\,,\beta)}{N} \leq \overline{\lim}\, \frac{N(\alpha\,,\beta)}{N} \leq C_0$$

Or c_0 et C_0 sont les moyennes de χ_ε et Γ_ε sur $(0\,,1)$

$$\beta - \alpha - 2\varepsilon \leq \underline{\lim}\, \frac{N(\alpha\,,\beta)}{N} \leq \overline{\lim}\, \frac{N(\alpha\,,\beta)}{N} \leq \beta - \alpha + 2\varepsilon .$$

Comme on peut choisir ε arbitrairement petit,

$$\underline{\lim}\, \frac{N(\alpha\,,\beta)}{N} = \overline{\lim}\, \frac{N(\alpha\,,\beta)}{N} = \beta - \alpha ,$$

et d'après (1) la suite u_n est bien u.r. mod 1 .

5. Suite des multiples $n\xi$ d'un nombre ξ .

a. ξ rationnel. - La suite $n\xi$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs qui sont les sommets d'un polygône régulier sur $\mathcal{C}$. La suite n'est pas dense sur $(0\,,1)$; elle est régulièrement répartie mais on ne peut pas dire que la répartition soit uniforme.

b. ξ irrationnel. - La suite est alors uniformément répartie. Appliquons le critère de Weyl :

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi k n\xi} = \frac{1}{N}\, e^{2i\pi k\xi}\, \frac{e^{2i\pi k N\xi}-1}{e^{2i\pi k\xi}-1} = \frac{1}{N}\, e^{i\pi k(N+1)\xi}\, \frac{\sin \pi N k\xi}{\sin \pi\, k\xi} .$$

Comme ξ est irrationnel, $\sin \pi k\xi$ n'est jamais nul pour k entier non nul, et le numérateur a un module inférieur à 1 . Donc :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{\infty} e^{2i\pi k u\xi} = 0 .$$

Le critère de Weyl indique donc que la suite $n\xi$ est u. r. mod 1 lorsque ξ est irrationnel.

Nous n'étudierons maintenant que des suites $u_n = \varphi(x)$ définies par les valeurs aux points d'abscisses entières d'une fonction $\varphi(x)$ à croissance régulière.

6. Fonctions à croissance plus lente que ξn .

(Exemples : $u_n = \sqrt{n}$, $u_n = \log n$). Dans chaque intervalle $(\alpha\,,\beta)$, il y aura de plus en plus de points de la suite d'indices consécutifs. On pourra souvent avoir facilement un ordre de grandeur du nombre de ces points, c'est-à-dire sa partie principale en fonction de n, et on pourra savoir alors assez facilement si w_n est u. r. mod 1 ou non en utilisant uniquement la définition.

a. EXEMPLE 1. - $u_n = \sqrt{n}$.

Les indices des points de la suite situés dans l'intervalle $(0\ ,\ \beta)$ sont donnés par les inégalités :

$$k \leqslant \sqrt{n} < k + \beta \qquad (k \text{ entier} = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots)$$

ou

$$k^2 \leqslant n \quad (k + \beta)^2$$

Dans chaque segment $(k\ ,\ k + \beta)$ il y a donc

$$\widehat{(k + \beta)^2 - k^2} + 1 = (k + \beta)^2 + 0(1) = 2\beta k + 0(1)$$

points de la suite. On a donc :

$$N(0\ ,\ \beta) = \sum_{k=1}^{K} 2\beta k + 0(1) + \begin{cases} N - K^2 & \text{si} \quad K^2 \leqslant N < (K + \beta)^2 \\ (K + \beta)^2 - K^2 & \text{si} \quad (K + \beta) \leqslant N \leqslant (K + 1)^2 . \end{cases}$$

$$N(0\ ,\ \beta) = 2\beta \frac{K(K + 1)}{2} + 0(K) \quad .$$

Or $K^2 \leqslant N < (K + 1)^2 = K^2 + 2K + 1$ donc $N = K^2 + 0(K)$. D'où :

$$\frac{N(0\ ,\ \beta)}{N} = \frac{\beta K(K + 1) + 0(K)}{K^2 + 0(K)} \xrightarrow[K \to \infty]{} \beta \quad .$$

Il est facile de voir que cela entraîne bien :

$$\frac{N(\alpha\ ,\ \beta)}{N} \xrightarrow[N \to \infty]{} \beta - \alpha$$

quel que soit l'intervalle $(\alpha\ ,\ \beta)$. La suite $\sqrt{n}$ est donc u. r. mod 1 .

Cette démonstration peut se généraliser facilement au cas $u_n = n^{\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$.

b. EXEMPLE 2. - $u_n = \log n$.

On utilise la même méthode :

$$k \leqslant \log n < k + \beta$$

$$\widehat{e^k} \leqslant n < \widehat{e^k\, e^{\beta}}$$

$$N(0\ ,\ \beta) = \sum_{k=1}^{K} [e^k(e^{\beta} - 1) + 0(1)] + \begin{cases} N - e^K \\ e^K(e^{\beta} - 1) \end{cases} \quad .$$

Choisissons alors deux suites de nombres N :

$$N_1 = \widehat{e^K} \qquad \text{et} \qquad N_2 = \widehat{e^K e^\beta} \qquad (K = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ \ldots)$$

$$\frac{N_1(0\ ,\ \beta)}{N_1} = \left[(e^\beta - 1)\ \frac{e^{K+1} - e}{e - 1} + O(K)\right] \frac{1}{e^K + O(1)} \xrightarrow[K \to \infty]{} (e^\beta - 1)\ \frac{e}{e - 1} = \ell$$

$$\frac{N_2(0\ ,\ \beta)}{N_2} = \left[(e^\beta - 1)\ \frac{e^{K+2} - e}{e - 1} + O(K)\right] \frac{1}{e^K e^\beta + O(1)} \xrightarrow[K \to \infty]{} (e^\beta - 1)\ \frac{e^2}{(e - 1)e^\beta}$$

$$= \ell\, e^{1-\beta} \quad .$$

Si β est différent de 1 , ces deux limites sont différentes et :

$$\underline{\lim}\ \frac{N(0\ ,\ \beta)}{N} \leq \ell < \ell\, e^{1-\beta} \leq \overline{\lim}\ \frac{N(0\ ,\ \beta)}{N} \quad .$$

La suite $u_n = \log n$ n'est donc certainement pas u. r. mod 1 .

Ces démonstrations n'utilisent pas le théorème ou le critère de Weyl. D'ailleurs avant H. WEYL, FEJER ([5], p. 237) avait démontré le théorème général suivant, un des premiers connus sur la répartition uniforme modulo 1 :

THÉORÈME. - Si $\varphi(x)$ est une fonction continue, monotone, dérivable sur $(1\ ,\ \infty)$ si $\varphi'(x)$ est monotone et tend vers zéro, et si $x\,\varphi'(x)$ tend vers l'infini lorsque x augmente, alors $\varphi(x)$ est u. r. mod 1 .

7. Fonctions à croissance polynômiale.

La répartition mod 1 des fonctions à croissance polynômiale est encore assez bien connue. Pour l'étudier on peut utiliser la méthode suivante (J. BASS [1]) :

La formule (3) peut être considérée comme exprimant que les moyennes $\mathfrak{M}F^k(t)$ des puissances entières de la fonction :

$$F(t) = e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}$$

sont nulles. Cette fonction est définie pour tout $t \geq 1$ et est constante dans chaque intervalle $[\hat{t}\ ,\ \hat{t} + 1[$.

Le critère de Weyl s'exprime alors de la façon suivante : pour que $\varphi(x)$ soit u. r. mod 1 , il faut et il suffit que les fonctions $F^k(t)$ aient une moyenne nulle quel que soit k entier non nul.

Pour étudier les fonctions $F^k(t)$, on peut introduire leurs "fonctions de corrélation" :

$$\Gamma_k(h) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F^k(t+h)\, \overline{F^k(t)}\, dt \quad .$$

a. Allure de $\Gamma_k(h)$.

$$\Gamma_k(h) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_n^{n+1} e^{2i\pi k[\varphi(\widehat{t+h}) - \varphi(\hat{t})]}\, dt \quad .$$

Si on pose $t = n + \zeta$, $\widehat{t+h} = \begin{cases} n + \hat{h} & \text{si} \quad \zeta < 1 - \check{h} \\ n + \hat{h} + 1 & \text{si} \quad \zeta \geq 1 - \check{h} \end{cases}$

$$\Gamma_k(h) = \lim_{N \to \infty} \begin{cases} \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \int_0^{1-\check{h}} e^{2i\pi k[\varphi(n+\hat{h}) - \varphi(n)]}\, d\zeta \\ + \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \int_{1-\check{h}}^{1} e^{2i\pi k[\varphi(n+\hat{h}+1) - \varphi(n)]}\, d\zeta \end{cases}$$

$$= (1 - \check{h}) \lim \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} e^{2i\pi k[\varphi(n+\hat{h}) - \varphi(n)]}$$

$$+ \check{h} \lim \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} e^{2i\pi k[\varphi(n+\hat{h}+1) - \varphi(n)]} \quad .$$

Si les deux limites de cette égalité existent, on obtient :

$$\Gamma_k(h) = (1 - \check{h})\, \Gamma_k(\hat{h}) + \check{h}\, \Gamma_k(\hat{h} + 1) \quad .$$

Donc <u>si</u> $\Gamma_k(h)$ <u>existe pour les valeurs de</u> h <u>entières, elle est une fonction continue de</u> h , <u>et elle est linéaire entre les points d'abscisse entière</u>.

b. <u>Relation entre les moyennes de</u> $F^k(t)$ <u>et</u> $\Gamma_k(h)$

En appliquant l'inégalité de Schwartz

$$\left| \int_0^T h(t)\, g(t)\, dt \right|^2 \leq \int_0^T |h(t)|^2\, dt \int_0^T |g(t)|^2\, dt$$

aux fonctions

$$h(t) = 1 \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{1}{A} \int_0^A F^k(t+h)\, dh \quad ,$$

on obtient :

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T dt\, \frac{1}{A}\int_0^A F^k(t+h)\, dh\right|^2 \leq \frac{1}{T}\int_0^T dt\, \frac{1}{A}\int_0^A F^k(t+h_1)\, dh_1 \frac{1}{A}\int_0^A \overline{F^k(t+h_2)}\, dh_2$$

et en prenant les limites lorsque T augmente indéfiniment :

$$(5) \qquad |\mathcal{M} F^k(t)|^2 \leq \frac{1}{A^2}\int_0^A \int_0^A \Gamma_k(h_2 - h_1)\, dh_2\, dh_1 \quad .$$

En faisant le changement de variable $h_2 - h_1 = \lambda$, $h_2 + h_1 = \mu$, le second membre de (5) s'écrit :

$$I_A = \frac{1}{A^2}\int_0^A d\mu \int_{-\mu}^{+\mu} \Gamma_k(\lambda)\, d\lambda \quad .$$

Si $\Gamma_k(h)$ a une moyenne $\mathcal{M}_k(h)$, on a :

$$|I_A - \mathcal{M}\Gamma_k(h)| \leq \frac{1}{A^2}\int_0^A 2\mu\, d\mu \left|\frac{1}{2\mu}\int_{-\mu}^{+\mu}\Gamma_k(\lambda)\, d\lambda - \mathcal{M}\Gamma_k(h)\right| \quad .$$

Étant donné $\varepsilon > 0$ on peut alors choisir H tel que

$$\left|\frac{1}{2\mu}\int_{-\mu}^{+\mu}\Gamma_k(\lambda)\, d\lambda - \mathcal{M}\Gamma_k(h)\right| < \varepsilon \qquad \text{pour} \quad \mu > H$$

et alors pour $A^2 > \varepsilon H^2$ on a :

$$|I - \mathcal{M}\Gamma_k(h)| < 2\,\varepsilon \quad .$$

Donc $\lim\limits_{A \to \infty} I_A = \mathcal{M}\Gamma_k$ et l'inégalité (5) devient

$$(6) \qquad \boxed{|\mathcal{M} F^k(t)|^2 \leq \mathcal{M}\Gamma_k(h)}$$

c. Application : conditions suffisantes pour que $\varphi(x)$ soit u. r. mod 1 . Si toutes les moyennes $\mathcal{M}\Gamma_k(h)$ sont nulles, les moyennes $\mathcal{M}F^k(t)$ sont toutes nulles et $\varphi(x)$ est u. r. mod 1 .

En particulier : si $\Gamma_k(h) \longrightarrow 0$ lorsque $h \longrightarrow \infty$ (ou bien est nulle si $h \geqslant H$) quel que soit k entier $\neq 0$, $\varphi(x)$ est u. r. mod 1 .

Si on remarque que $\Gamma_k(\hat{h})$ est la moyenne de $e^{2i\pi k[\varphi(\hat{t}+\hat{h})-\varphi(\hat{t})]}$ et si on suppose que $\Gamma_k(\hat{h}) = 0$ pour tous les entiers k et $\hat{h} \neq 0$, on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME de VAN DEN CORPUT [7]. – <u>Une condition suffisante pour que</u> $\varphi(x)$ <u>soit</u> u. r. mod 1 <u>est que toutes les suites</u> $\varphi(x+p) - \varphi(x)$ (p entier > *) <u>soient</u> u. r. mod 1 .

Ces conditions ne peuvent être que suffisantes. Un contre-exemple évident est la suite des multiples d'un nombre irrationnel.

d. <u>Répartition</u> modulo 1 <u>des polynômes</u>.

On appellera polynôme de Weyl un polynôme de la forme :

$$\varphi(x) = An^{\nu} + A_1 n^{\nu - 1} + \dots + A_{\nu}$$

où A est irrationnel et $\nu \geq 1$.

Pour montrer que la suite $P(x)$ est un u. r. mod 1 , raisonnons par récurrence sur ν : si $\nu \geq 2$, $P(x+p) - P(x)$ est un polynôme de degré $\nu - 1$ dont le terme de plus haut degré est $p \nu A n^{\nu - 1}$ qui a lui aussi un coefficient irrationnel quel que soit p entier > 0 . Si donc on suppose qu'un polynôme de Weyl de degré $\nu - 1$ est u. r. mod 1 , le théorème de Van den Corput montre que tout polynôme de Weyl de degré ν est u. r. mod 1 . Comme pour $\nu = 1$ la propriété est vraie, elle est vraie quel que soit ν .

On peut étendre facilement ce résultat au cas où c'est un coefficient autre que celui du terme du plus haut degré qui est irrationnel. On pose :

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x)$$

$$P_1(x) = An^{\nu} + \dots + A_{\nu-k-1} n^{k+1}$$

$A, A_1, \dots, A_{\nu-k-1}$ étant des nombres rationnels de dénominateur commun q .

$$P_2(x) = A_{\nu-k} n^k + \dots + A_{\nu}$$

étant un polynôme de Weyl. On a :

$$F^k(t) = e^{2i\pi k P_1(\hat{t})} e^{2i\pi k P_2(\hat{t})}$$

Si on pose $n = rq + s$ et $N = Rq + S$ $(0 \leq {s \atop S} < q)$

$$\mathfrak{M} F^k(t) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \left[\sum_{s=0}^{q-1} e^{2i\pi k P_1\left(\frac{s}{q}\right)} \sum_{r=0}^{R-1} e^{2i\pi k P_2(rq+s)} + O(S) \right] .$$

Comme S est borné par q , on a :

$$\mathfrak{M}F^k(t) = \frac{1}{q} \sum_{s=0}^{q-1} e^{2i\pi k P_1(\frac{s}{q})} \left[\lim_{R \to \infty} \frac{1}{R} \sum_{r=0}^{R-1} e^{2i\pi k P(rq+s)} \right] .$$

$P_2(rq + s)$ étant un polynôme de Weyl en r, la limite intervenant est nulle quels que soient s et k. Donc $\mathfrak{M}F^k(t) = 0$ et par suite d'après le critère de Weyl :

Si un polynôme $P(x)$ a au moins un coefficient (autre que le terme constant) irrationnel, la suite $P(x)$ est u. r. mod 1 .

Si $P(x)$ n'a pas de coefficient irrationnel, la suite $P(x)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs et ne peut évidemment pas être u. r. mod 1 .

8. Fonctions à croissance rapide.

On n'a plus beaucoup de résultats sur les fonctions qui croissent plus vite que les polynômes : les résultats connus se présentent sous forme de théorèmes "vrais presque partout" mais on ne connaît pas explicitement de suites $\varphi(x)$ à croissance rapide qui soient u. r. mod 1 . Nous démontrerons ici à titre d'exemple un théorème sur les fonctions à croissance exponentielle dû à KOKSMA [3].

THÉORÈME de KOKSMA. - La suite $\varphi(x) = \theta^n$ est uniformément répartie modulo 1 pour presque tout $\theta > 1$.

C'est-à-dire que si on considère les nombres θ appartenant à l'intervalle $[(\lambda , \mu)]$ $(\mu > \lambda > 1)$, l'ensemble des nombres θ tels que θ^n ne soit pas u. r. mod 1 est de mesure nulle. Considérons l'intégrale :

$$I_N = \int_\lambda^\mu |\sigma_N(\theta)|^2 \, d\theta$$

où

$$\sigma_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi k\theta^n}$$

et montrons que $|\sigma_N|^2 \longrightarrow 0$ pour presque tous les $\theta \in [(\lambda , \mu)]$.

Pour cela nous nous servirons d'unthéorème de la théorie de la mesure déduit du lemme de FATOU [2].

THÉORÈME de FATOU. - Étant donnée une suite de fonctions $U_i(x)$ positives mesurables, si la série de terme général

$$I_i = \int_\lambda^\mu U_i(t) \, dt$$

est convergente, la série de terme général $U_i(x)$ converge presque partout sur (λ , μ) et par suite $U_i(x)$ tend vers 0 presque partout.

$$I_N = \int_\lambda^\mu \frac{1}{N^2} \left(\sum_{p=1}^{N} e^{2i\pi k \theta^p}\right) . \left(\sum_{q=1}^{N} e^{-2i\pi k \theta^q}\right) d\theta \quad .$$

Les termes $p = q$ donnent une participation $\frac{\mu - \lambda}{N}$ et les termes $p \neq q$ se groupent :

$$I_N = \frac{\mu - \lambda}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{q=1}^{N} \quad \sum_{p>q} \int_\lambda^\mu \cos 2\pi k(\theta^p - \theta^q)\, d\theta \quad .$$

L'intégrale s'écrit :

$$J = \int_\lambda^\mu \frac{d[\sin 2\pi k(\theta^p - \theta^q)]}{2\pi k(p\theta^{p-1} - q\theta^{q-1})} d\theta$$

et on peut lui appliquer le second théorème de la moyenne car la fonction

$$\psi(\theta) = \frac{1}{2\pi k(p\theta^{p-1} - q\theta^{q-1})}$$

est une fonction de θ positive et décroissante.

$$J = \psi(\lambda) \int_\lambda^\eta d(\sin 2\pi k(\theta^t - \theta^q)$$

Comme $\psi(\lambda) < \psi(0) = \frac{1}{2\pi (k)(p - q)}$ et comme l'intégrale a une valeur absolue certainement inférieure ou égale à 2 ,

$$|J| < \frac{1}{\pi |k| (p - q)} < \frac{1}{p - q} \quad .$$

On a :

$$\left|\sum_{p>q}^{N}\right| \leq \sum_{p>q}^{N} \frac{1}{p - q} = 1 + \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{N - q} < \log N$$

et

$$\frac{1}{N^2} \sum_{q=1}^{N} \log N < \frac{N \log N}{N^2} = \frac{\log N}{N} \quad .$$

Donc :

$$I_N = \frac{\mu - \lambda}{N} + 0\left(\frac{\log N}{N}\right) \quad .$$

Si on prend alors $N = m^2$, la série $\sum_{m=1}^{\infty} I_{m^2}$ est convergente et d'après le théorème de Fatou $\sigma_{m^2}(\theta)$ tend vers 0 presque partout. Il me reste plus alors qu'à montrer que pour une valeur de θ telle que $\sigma_{m^2}(\theta)$ tende vers 0 , $\sigma_N(\theta)$ tend aussi vers 0 .

On peut toujours trouver m tel que $m^2 \leqslant N < (m+1)^2$:

$$\left|\frac{N}{m^2}\sigma_N - \sigma_{m^2}\right| = \frac{1}{m^2}\left|\sum_{n=m^2}^{N} e^{2i\pi k\theta^n}\right| \leqslant \frac{N-m^2}{m^2} < \frac{(m+1)^2-m^2}{m^2} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \quad .$$

Comme d'autre part $\frac{N}{m^2} \geqslant 1$, $\sigma_{m^2} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ entraîne bien $\sigma_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$. Donc $\sigma_N(\theta) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ quel que soit $k \neq 0$ pour presque tous les θ de l'intervalle $[(\lambda , \mu)]$ ce qui d'après le critère de Weyl démontre bien le théorème de Koksma.

On ne connaît rien sur les nombres θ tels que θ^n soit u. r. mod 1 . Par contre l'ensemble de mesure nulle a pu être étudié de façon assez approfondie et on a trouvé des familles très intéressantes de nombres θ lui appartenant. A part les entiers qui appartiennent évidemment à cet ensemble, ce sont les nombres de C. PISOT [4] (nombres algébriques > 1 dont tous les conjugués sont dans le cercle unité) et les hombres de R. SALEM [6] (nombres algébriques > 1 dont tous les conjugués sont sur ou dans le cercle unité).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BASS (Jean). - Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques et fonctions pseudo-aléatoires, Bull. Soc. math. France, t. 87, 1959, p. 1-64.

[2] FATOU (P.). - Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Math., t. 30, 1906, p. 335-400.

[3] KOKSMA (J. F.). - Diophantische Approximationen. - Berlin, Springer, 1936 (Ergebnisse der Mathematik..., Band 4, 4).

[4] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. reale Scuola norm. sup., Pisa, Série 2, t. 7, 1938, p. 205-248.

[5] POLYA (G.) und SZEGO (G.). - Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Tome 1. - Berlin, Springer, 1925.

[6] SALEM (R.). - Power series with integral coefficients, Duke math. J., t. 12, 1945, p. 153-172.

[7] VAN DEN CORPUT (J. G.). - Diophantische Vergleichungen, I : Zur Gleichverteilung modulo Eins, Acta Math., t. 51, 1931, p. 373-456.

[8] WEYL (Hermann). - Über die Gleichverteilung von Zahlen modulo Eins, Math. Annalen, t. 77, 1916, p. 313-352.