SÉMINAIRE CHOQUET.
INITIATION À L'ANALYSE

MICHEL TALAGRAND

Ensembles K-analytiques et fonctions croissantes de compacts

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 17, nº 2 (1977-1978), exp. nº C1, p. C1-C2
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_2_A6_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
17e année, 1977/78, Communication n° 1, 2 p.

Octobre 1977

ENSEMBLES $\mathcal{K}$-ANALYTIQUES ET FONCTIONS CROISSANTES DE COMPACTS

par Michel TALAGRAND

Désignons par $\mathcal{K}(X)$ l'ensemble des compacts d'un espace topologique X. Le théorème suivant est dû à G. CHOQUET.

THÉORÈME 1. - Soient X un espace polonais, et Y un espace compact dans lequel tout point admet une base dénombrable de voisinages. Soit f une application croissante de $\mathcal{K}(X)$ dans $\mathcal{K}(Y)$. Alors, $f(X) = \bigcup\{f(K) \; ; \; K \in \mathcal{K}(X)\}$ est $\mathcal{K}$-analytique.

Démonstration. - Soit d une distance sur X qui en fait, est un espace métrique complet. Pour $K \in \mathcal{K}(X)$, posons

$$B(K , n^{-1}) = \{x \in X \; ; \; d(x , K) \leqslant n^{-1}\} ,$$

puis

$$h(K) = \bigcap_n \overline{\bigcup\{f(L) \; ; \; L \in \mathcal{K}(X) , \; L \subset B(K , n^{-1})\}} .$$

C'est un ensemble compact. Pour tout voisinage V de $h(K)$, il existe un n tel que, si $L \in B(K , n^{-1})$, on ait $h(L) \subset V$. Ceci montre que, si l'on munit $\mathcal{K}(X)$ de la topologie donnée par la distance de Haussdorff, l'application $L \longrightarrow h(L)$ est semi-continue supérieurement. Puisque $\mathcal{K}(X)$ est polonais, il en résulte [1] que $h(X) = \bigcup\{h(K) \; ; \; K \in \mathcal{K}(X)\}$ est $\mathcal{K}$-analytique. Il reste à montrer que $h(X) = f(X)$. Il est clair que $f(X) \subset h(X)$. Soient $y \in h(X)$, et $K \in \mathcal{K}(X)$, tels que $y \in h(K)$. Soit (V_n) une suite de voisinages de y. Pour tout n, il existe $L_n \subset B(K , n^{-1})$, tel que $V_n \cap f(L_n) \neq \emptyset$. Mais $L = K \cup \bigcup_n L_n$ est compact, et puisque f est croissante, on a $V_n \cap f(L) \neq \emptyset$, pour tout n, donc $y \in f(L)$.

C. Q. F. D.

Le but de cette communication est de montrer que, si le compact Y ne vérifie pas la condition du théorème 1, alors $f(X)$ n'est pas nécessairement $\mathcal{K}$-analytique, et même peut ne pas être de Lindelöf, ni universellement mesurable.

Soit $\Sigma = \underset{\sim}{N}^{\underset{\sim}{N}}$, munie de l'ordre produit et de la topologie usuelle (pour laquelle il est polonais). Pour $\sigma \in \Sigma$, posons

$$E_\sigma = \{(a_\rho) \in [0 , 1]^\Sigma \; ; \; (\rho \geqslant \sigma) \Longrightarrow (a_\rho = 0)\} .$$

C'est un ensemble compact. Pour $\sigma \leqslant \sigma'$, on a $E_\sigma \subset E_{\sigma'}$. Posons $E = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} E_\sigma$. Tout compact de Σ est majoré pour l'ordre. Il en résulte que E est image de $\mathcal{K}(\Sigma)$ par l'application croissante donnée par $f(K) = \bigcap_{K\leqslant\sigma} E_\sigma$.

Prouvons que E n'est pas de Lindelöf. Pour $\sigma \in \Sigma$, posons

$$V_\sigma = \{(a_\rho) \in [0\ ,\ 1]^\Sigma\ ;\ \ a_\sigma = 0\}\ .$$

C'est un ouvert de $[0\ ,\ 1]^\Sigma$. Puisque $E_\sigma \subset V_\sigma$, on a $E \subset \bigcup_\sigma V_\sigma$. Montrons que si D est une partie dénombrable de Σ , on n'a pas $E \subset \bigcup_{\sigma\in D} V_\sigma$, ce qui établira que E n'est pas de Lindelöf. Il existe, en effet, $\tau \in \Sigma$ tel que $\tau \nleq \sigma$, pour $\sigma \in D$ (par exemple, si τ croit plus vite que tout élément de D). L'élément $(a_\rho) \in [0\ ,\ 1]^\Sigma$, défini par

$$a_\rho = 1 \Longleftrightarrow \rho \in D\ ,$$

n'appartient à aucun V_σ , pour $\sigma \in D$. Mais il appartient à E puisqu'il appartient à E_τ .

Prouvons que E n'est pas mesurable pour la mesure canonique m de $[0\ ,\ 1]^\Sigma$. Nous allons utiliser le fait classique suivant. Si K est un compact de $[0\ ,\ 1]^\Sigma$ de mesure > 0 , il existe une partie dénombrable D de Σ , et un compact L de $[0\ ,\ 1]^D$ tels que, si on désigne par π_D la projection canonique de $[0\ ,\ 1]^\Sigma$ sur $[0\ ,\ 1]^D$, on ait

$$\pi_D^{-1}(L) \subset K\ ,\ \text{et}\ \ m(\pi_D^{-1}(L)) = m(K)\ .$$

Ceci montre déjà que tout compact K de $[0\ ,\ 1]^\Sigma$, qui est de mesure > 0 , contient un élément qui n'a qu'un nombre au plus dénombrable de composantes non nulles. Puisque tout élément de E a un nombre non dénombrable de composantes nulles, on a $K \not\subset E$, donc $m_*(E) = 0$. D'autre part, pour toute partie dénombrable D de K , il existe $\tau \in \Sigma$, tel que, pour $\sigma \in D$, on ait $\tau \nleq \sigma$. Il en résulte que $\pi_D(E_\sigma) = [0\ ,\ 1]^D$, et donc que E rencontre tout compact K de mesure > 0 , c'est-à-dire que $m^*(E) = 1$, ce qui prouve que E n'est pas mesurable pour m .

Signalons pour terminer le résultat suivant, qui est une reformulation de la proposition 6.13 de [2]. On désigne par p la topologie de la convergence ponctuelle.

THÉORÈME 2. - Soit Z un espace compact. S'il existe un espace polonais X , et une application à valeurs compactes croissante de $\mathcal{K}(X)$ sur $\mathcal{C}_p(Z\ ,\ [0\ ,\ 1])$, alors $\mathcal{C}_p(Z)$ est $\mathcal{K}$-analytique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FROLIK (Z.). - A survey of separable descriptive theory of sets and spaces, Czechoslovak math. J., t. 20 (95), 1970, p. 406-467.

[2] TALAGRAND (M.). - Espaces de Banach faiblement $\mathcal{K}$-analytiques (à paraitre).

(Texte reçu le 2 novembre 1977)

Michel TALAGRAND
Equipe d'Analyse, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05