Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Richard Becker

Sur les cônes inf-stables de fonctions continues sur un espace compact

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 17, n° 2 (1977-1978), exp. n° 25, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_2_A5_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
17e année, 1977/78, n° 25, 13 p.
15 juin 1978

SUR LES CÔNES INF-STABLES DE FONCTIONS CONTINUES SUR UN ESPACE COMPACT

par Richard BECKER

Préliminaires

1. Introduction.

La classe Λ des cônes convexes inf-stables de fonctions continues, définies sur un espace compact, a été étudiée pour la première fois par G. CHOQUET et J. DENY [6].

La question a été ensuite approfondie par N. BOBOC et A. CORNEA ([3], [4]) qui ont établi, pour la classe Λ, des résultats analogues à ceux connus pour le cône des fonctions concaves et continues, définies sur un convexe compact. Mais, d'une part, ces auteurs n'ont pas envisagé les résultats du genre "dilatation des mesures" (cf. § 2) et, d'autre part, ils supposaient, plus ou moins explicitement, que les cônes considérés contenaient un élément > 0 (dans [4], cf. le rôle de l'ensemble $\mathfrak{M}^\infty$). De même, MOKOBODZKI, dans sa théorie du balayage rappelée au § 2, dans le cadre des espaces compacts, considérait des cônes contenant un élément > 0 et, dans le cadre des espaces localement compacts, n'envisageait que la classe des "cônes adaptés" ([13], § 1).

Signalons, bien que nous ne nous en servirons pas, la stabilité des cônes de Λ, par composition avec des fonctions très régulières, voir H. BAUER [1], S. GUBER ([9], [10]) et G. MOKOBODZKI [12].

2. Rappels techniques concernant la théorie du balayage.

Soit X un espace compact, et $\Gamma \subset \mathcal{C}(X)$ un élément de Λ contenant un élément > 0. $\forall \lambda, \mu \in \mathfrak{M}^+(X)$, lorsque $\mu \leqslant \lambda$ sur Γ, on dit que μ est balayée de λ, et on note $\mu \prec \lambda$.

Les cas suivants sont bien connus.

1° Formule de balayage de Mokobodzki ([11], XI, T.53). - $\forall x \in X$, $\forall f \in \mathcal{C}(X)$, on a

$$\sup_{\epsilon_x \prec \nu}(\nu(f)) = \inf(g(x) \; ; \; g \in \Gamma \, , \; g \geqslant f) \, .$$

2° On déduit de 1°, par la méthode de PHELPS ([15], p. 109), que

$$\overline{\operatorname{conv}\{R^+(\epsilon_x \, , \, \nu) \; ; \; x \in X \, , \; \epsilon_x \prec \nu\}} = \{(\lambda \, , \, \mu) \; ; \; \mu \prec \lambda\} \, .$$

3° "Dilatation des mesures" se prouve à l'aide de 2° par la méthode de PHELPS ([15], p. 111). - $\forall \lambda, \mu \in \mathfrak{M}^+(X)$, avec $\mu \prec \lambda$, lorsque X est métrisable, on peut écrire $\mu = \int_X \mu_x \, d\lambda(x)$, où $x \longrightarrow \mu_x$ est une application borélienne de X dans $\mathcal{M}^+(X)$ telle que $\varepsilon_x < \mu_x$.

3. Sommaire.

Dans ce travail, nous cherchons à étendre les résultats rappelés au § 2 au cas d'un élément de Λ ne contenant pas nécessairement un élément > 0 .

Nous emploierons des techniques différentes de celles rappelées au § 2.

La partie I établit un résultat de dilatation des mesures (cf. § 10) qui est l'analogue du § 2, 3° ; l'analogue du § 2, 2° est prouvé au § 7.

La méthode utilisée permet aussi de retrouver au § 8 un résultat de G. CHOQUET et J. DENY ([5], théorème 1) caractérisant les éléments de la classe Λ .

La partie II établit une formule de balayage (théorème 12) qui est l'analogue du § 2, 1°, mais ne lui est pas identique ; pour cela, on utilise une extension du théorème de Hahn-Banach due à DINGES [7] et rappelée dans [16] (théorème 1) et [2] (§ 1).

On donne ensuite quelques conséquences de cette formule de balayage : Etant donné $\Gamma \in \Lambda$, on montre que la formule de balayage de Mokobodzki (§ 2, 1°) subsiste (théorème 14), pour toute fonction continue f telle que $f < \gamma$, où $\gamma \in \Gamma$. On étend ce résultat à certaines fonctions, dites K_Γ-analytiques (définition 18, théorème 25). On termine par un exemple de cône, pour lequel l'extension de la formule de balayage de G. Mokobodzki (§ 2, 1°) serait en défaut.

I. Dilatation des mesures par rapport à un cône de la classe Λ

Soit X un espace compact. $\mathcal{C}(X)$ (ou $\mathcal{C}$ en abrégé) désignera l'espace des fonctions réelles continues sur X , et $\mathcal{M}(X)$ (ou $\mathcal{M}$ en abrégé) l'espace des mesures de Radon sur X , ordonné par le cône $\mathcal{M}^+(X)$ des mesures ≥ 0 .

4. Notations.

Soit Γ un sous-cône convexe de $\mathcal{C}$. Pour tout $x \in X$, on notera M_x l'ensemble $\{\nu \; ; \; \nu \in \mathcal{M}^+ , \; \nu \leq \varepsilon_x \text{ sur } \Gamma\}$, et M_0 l'ensemble $\{\nu \; ; \; \nu \in \mathcal{M}^+ , \; \nu \leq 0 \text{ sur } \Gamma\}$.

5. Lemme.

Soit Γ un sous-cône convexe de $\mathcal{C}$ (non nécessairement inf-stable), et soit B_Γ le sous-cône de $\mathcal{M}^+ \times \mathcal{M}^+$ formé des couples (λ , μ) tels que $\mu \leq \lambda$ sur Γ .

Pour tout couple $f , g \in \mathcal{C}$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1° $(g , - f) \in (B_\Gamma)^\circ$ (pour la dualité canonique entre $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ et $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$).

2° Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\gamma_\epsilon \in \Gamma$ avec

$$f - \epsilon \leq \gamma_\epsilon \leq g + \epsilon .$$

Preuve. – C'est une conséquence du théorème de Hahn-Banach, et du fait que $\mathcal{C}' = \mathfrak{M}$.

En effet, on voit que B_Γ est le polaire de l'ensemble des couples $(\gamma + u , - \gamma + v)$, où γ décrit Γ et u, v décrivent $\mathcal{C}^+$. Donc, on a $(g , - f) \in (B_\Gamma)^\circ$ si, et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\|f - \gamma_\epsilon + v_\epsilon\| \leq \epsilon \quad \text{et} \quad \|g - \gamma_\epsilon - u_\epsilon\| \leq \epsilon ,$$

avec $\gamma_\epsilon \in \Gamma$ et u_ϵ, $v_\epsilon \in \mathcal{C}^+$.

6. Lemme.

Soit Γ un sous-cône convexe de $\mathcal{C}$ (non nécessairement inf-stable), et soit D_Γ le sous-cône convexe vaguement fermé de $\mathfrak{M}^+ \times \mathfrak{M}^+$ engendré par l'ensemble des couples (ϵ_x , ν), tels que $\nu \in M_x$, quand x décrit X.

Pour tout couple f, $g \in \mathcal{C}$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

1° $(g , - f) \in (D_\Gamma)^\circ$ (pour la dualité canonique entre $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ et $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$).

2° Pour tout $x \in X$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $\gamma_{x,\epsilon} \in \Gamma$ telle que

$$f - \epsilon \leq \gamma_{x,\epsilon} \quad \text{et} \quad \gamma_{x,\epsilon}(x) \leq g(x) + \epsilon .$$

Preuve. – Soit $x \in X$. L'ensemble des couples $(\gamma + u , - \gamma + v)$, où γ décrit Γ, $u \in \mathcal{C}$ avec $u(x) \geq 0$ et v décrit $\mathcal{C}^+$, admet pour polaire le cône

$$\overline{\{R^+(\epsilon_x , \nu) ; \nu \in M_x\}} .$$

Il en résulte que l'on a $(g , - f) \in (D_\Gamma)^\circ$ si, et seulement si, pour tout $x \in X$ et tout $\epsilon > 0$, on a

$$\|f - \gamma_\epsilon + v_\epsilon\| \leq \epsilon \quad \text{et} \quad \|g - \gamma_\epsilon - u_\epsilon\| \leq \epsilon ,$$

avec $\gamma_\epsilon \in \Gamma$, $u \in \mathcal{C}$ avec $u(x) \geq 0$ et $v \in \mathcal{C}^+$.

7. Théorème.

Soit Γ un élément de Λ. On a $B_\Gamma = D_\Gamma$.

Preuve. – Elle consiste à prouver que, si la condition 2° du § 5 est vérifiée, alors il en est de même de la condition 2° du § 6. C'est immédiat en utilisant le fait que Γ est inf-stable et le lemme de Borel-Lebesgue.

8. Remarque.

Le résultat suivant de G. CHOQUET et J. DENY ([6], théorème 1) est une conséquence du § 7. Soit $\Gamma \in \Lambda$, on a

$$\Gamma = \{f \; ; \; f \in \mathcal{C} \, , \; \forall \, x \in X \text{ et } \forall \, \nu \in M_x \, , \text{ on a } f(x) \geq \nu(f)\} \, .$$

9. Théorème.

Soit $\Gamma \in \Lambda$ et λ , $\mu \in \mathcal{M}^+$ avec $\lambda(1) + \mu(1) = 1$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1° $\mu \leq \lambda$ sur Γ .

2° Il existe une mesure de Radon ≥ 0 , de masse 1 , sur la fermeture de l'ensemble

$$\left\{\frac{\varepsilon_x}{1 + \nu(1)} \, , \, \frac{\nu}{1 + \nu(1)} \; ; \; x \in X \text{ et } \nu \in M_x\right\} ,$$

qui admet pour barycentre le couple $(\lambda \, , \, \mu)$.

Preuve. - Ce résultat est un cas particulier de [2] (§ 20).

10. Théorème.

On suppose de plus que X est métrisable. Lorsque $\mu \leq \lambda$ sur Γ , avec $\lambda \neq 0$, alors il existe une application borélienne $x \longmapsto \nu_x$, définie sur X , à valeurs dans $\mathcal{M}^+$, telle que $\mu = \int_X \nu_x \, d\lambda(x)$ et $\nu_x \in M_x$, pour tout $x \in X$.

Preuve. - Grâce à [2] (§ 21) et avec les notations de [2], on voit que

$$\mu - \mu_0 = \int_X \nu_x \, d\lambda(x) \; .$$

Il suffit alors de remplacer ν_x par $\nu_x + (\mu_0 / \lambda(1))$.

II. La formule de balayage pour un cône de la classe Λ

Notre premier objectif est de démontrer le théorème 12, qui est analogue à la formule de balayage de Mokobodzki, rappelée au § 2, 1°. Pour cela, nous aurons besoin du lemme suivant.

11. Lemme.

Soit p une application sous-linéaire définie sur $\mathcal{C}$, et à valeurs dans $R \cup (+\infty)$. On suppose que $p(f) \leq 0$, pour toute $f \leq 0$, et que :

(a) $\forall \, f \in \mathcal{C}$ avec $p(f) < \infty$, on a $\limsup_{\varepsilon \to 0} \, (p(f) - p(f + \varepsilon)) \leq 0$.

(b) $\forall \, f \in \mathcal{C}$ avec $p(f) = +\infty$, on a $p(f + \varepsilon) \longrightarrow \infty$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

(c) $\forall \, f \in \mathcal{C}$, les quantités $p(kf + 1)$ et $p(kf - 1)$ sont minorées quand k décrit $\left]0 \, , \, 1\right]$.

Dans ces conditions, pour toute $f \in \mathcal{C}$, alors :

(α) Si $p(f) = -p(-f)$, il existe $\mu_f \in \mathcal{M}^+$, avec $\mu_f(f) = p(f)$ et $\mu_f \leq p$ sur $\mathcal{C}$.

(β) Si $-p(-f) < p(f)$, pour tout $r \in]-p(-f), p(f)[$, il existe $\mu_r \in \mathfrak{M}^+$, avec $\mu_r(f) = r$ et $\mu_r \leq p$ sur $\mathcal{C}$.

Preuve. - D'après une version du théorème de Hahn-Banach, due à DINGES [7] et rappelée dans [16] (théorème 1) et [2] (§ 1), il suffit de prouver que l'on peut définir une forme linéaire φ sur le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ engendré par f et 1, avec $\varphi \leq p$ sur ce sous-espace et, dans le cas (α) $\varphi(f) = p(f)$, et, dans le cas (β) $\varphi(f) = r$.

La quantité $\varphi(f)$ étant choisie, alors $\varphi(1)$ devra vérifier la condition suivante qui est nécessaire et suffisante pour l'existence de φ :

$$\forall\, k \in R\,,\quad k\varphi(f) - p(kf - 1) \leq \varphi(1) \leq p(kf + 1) - k\varphi(f)\,.$$

Cette condition d'existence, pour $\varphi(1)$, est équivalente à l'ensemble des deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \text{(Condition I)} & \sup(k\varphi(f) - p(kf - 1)\ ;\ k \in R) < +\infty\,. \\ \text{(Condition II)} & \inf(p(kf + 1) - k\varphi(f)\ ;\ k \in R) > -\infty\,. \end{cases}$$

(α) Cas où $p(f) = -p(-f)$. - On va voir qu'on peut prendre $\varphi(f) = p(f)$.

(Condition I) $\forall\, k \in R$, on a

$$k\varphi(f) - p(kf - 1) = -p(-kf) - p(kf - 1) \leq -p(-1) < +\infty\,,$$

car $p(-1) \leq 0$ et $p(\mathcal{C}) \subset R \cup (+\infty)$.

(Condition II) $\forall\, k \in R$, on a

$$p(kf + 1) - k\varphi(f) = p(kf + 1) + p(-kf) \geq p(1) > -\infty\,,$$

car $p(\mathcal{C}) \subset R \cup (+\infty)$.

(β) Cas où $-p(-f) < p(f)$. - On va voir qu'on peut prendre, pour $\varphi(f)$, tout nombre r de l'intervalle $]-p(-f), p(f)[$.

(β.1) Cas où $p(f) < +\infty$.

(Condition I) avec $k > 0$. - On a

$$k\varphi(f) - p(kf - 1) = k[(r - p(f)) + (p(f) - p(f - \tfrac{1}{k}))]\,.$$

Alors (Condition I) sera vérifiée puisque $r - p(f) < 0$, et grâce aux hypothèses (e) et (c).

(Condition I) avec $k < 0$. - On a, si $k' = -k$,

$$k\varphi(f) - p(kf - 1) = k'(-r - p(-f - \tfrac{1}{k'}))\,.$$

On distingue deux cas :

(Condition I) avec $k < 0$, et $p(-f) = +\infty$. - On a

$$(-r - p(-f - \tfrac{1}{k'})) \longrightarrow -\infty \quad \text{quand} \quad k' \longrightarrow \infty\,,$$

d'après l'hypothèse (b). Alors (Condition I) sera vérifiée à cause de l'hypothèse (c).

(Condition I) avec $k < 0$, et $p(-f) < +\infty$. — On a

$$-r - p(-f - \frac{1}{k'}) = (-p(-f) - r) + (p(-f) - p(-f - \frac{1}{k'})) .$$

Comme $-p(-f) - r < 0$, d'après les hypothèses (a) et (c), alors (Condition I) est vérifiée.

(Condition II) avec $k > 0$. — On a

$$p(kf + 1) - k\varphi(f) = k[(p(f + \frac{1}{k}) - p(f)) + (p(f) - r)] .$$

Comme $p(f) - r > 0$, d'après les hypothèses (a) et (c), alors (Condition II) est vérifiée.

(Condition II) avec $k < 0$. — On a, si $k' = -k$,

$$p(kf + 1) - k\varphi(f) = k'(p(-f + \frac{1}{k'}) + r) .$$

On distingue deux cas :

(Condition II) avec $k < 0$, et $p(-f) = +\infty$. — On a

$$p(-f + \frac{1}{k'}) + r \longrightarrow \infty \quad \text{quand} \quad k' \longrightarrow \infty ,$$

d'après l'hypothèse (b). Donc (Condition II) est vérifiée, à cause de l'hypothèse (c).

(Condition II) avec $k < 0$, et $p(-f) < +\infty$. — On a

$$p(-f + \frac{1}{k'}) + r = (p(-f + \frac{1}{k'}) - p(-f)) + (p(-f) + r) ,$$

comme $r + p(-f) > 0$, d'après les hypothèses (a) et (c), alors (Condition II) est vérifiée.

(β.2) <u>Cas où</u> $p(f) = +\infty$ <u>et</u> $p(-f) = +\infty$.

(Condition I) avec $k > 0$. — On a

$$k\varphi(f) - p(kf - 1) = k(r - p(f - \frac{1}{k})) \longrightarrow -\infty \quad \text{quand} \quad k \longrightarrow \infty ,$$

à cause de l'hypothèse (b). Donc (Condition I) est vérifiée, grâce à l'hypothèse (c).

(Condition I) avec $k < 0$. — On a, si $k' = -k$,

$$k\varphi(f) - p(kf - 1) = k'(-r - p(-f - \frac{1}{k'})) \longrightarrow -\infty \quad \text{quand} \quad k' \longrightarrow \infty ,$$

d'après l'hypothèse (b). Donc (Condition I) est vérifiée, grâce à l'hypothèse (c).

(Condition II) avec $k > 0$. — On a

$$p(kf + 1) - k\varphi(f) = k(p(f + \frac{1}{k}) - r) \longrightarrow \infty \quad \text{quand} \quad k \longrightarrow \infty ,$$

à cause de l'hypothèse (b). Donc (Condition II) est vérifiée, grâce à l'hypothèse ((c).

(Condition II) avec $k < 0$. — On a, si $k' = -k$,

$$p(kf + 1) - k\varphi(f) = k'(p(-f + \frac{1}{k'}) + r) \longrightarrow \infty \quad \text{quand} \quad k' \longrightarrow \infty ,$$

à cause de l'hypothèse (b). Donc (Condition II) est vérifiée, grâce à l'hypothèse(c).

12. Théorème.

Soit Γ un élément de Λ. Pour toute $f \in \mathcal{C}$ et tout $x \in X$, on a

1° Si $f \notin \overline{(\Gamma - \mathcal{C}^+)}$, $\sup_{\nu \in M_x} (\nu(f)) = +\infty$.

2° Si $f \in \overline{(\Gamma - \mathcal{C}^+)}$,

$$\sup_{\nu \in M_x} (\nu(f)) = \lim_{\varepsilon > 0, \varepsilon \to 0} \{\inf(\gamma(x) \; ; \; \gamma \in \Gamma \text{ et } \gamma \geqslant f - \varepsilon\}$$

(Notons que, dans le 2e cas, les deux membres peuvent valoir $+\infty$).

Preuve. – Notons déjà que le 1er membre est inférieur au second dans l'égalité à établir. Soit $f \in \overline{(\Gamma - \mathcal{C}^+)}$. Alors, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \nu \in M_x$ et $\forall \gamma \in \Gamma$, avec $\gamma \geqslant f - \varepsilon$, on a

$$\nu(f) \leqslant \nu(\gamma) + \varepsilon\nu(1) \leqslant \gamma(x) + \varepsilon\nu(1) .$$

D'où

$$\nu(f) \leqslant \inf\{\gamma(x) \; ; \; \gamma \in \Gamma , \; \gamma + \varepsilon \geqslant f\} + \varepsilon\nu(1) .$$

D'où on obtient l'inégalité visée en faisant $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Il reste à montrer l'inégalité inverse. Désignons par $p(f)$ le second membre de l'égalité à établir. On voit qu'il suffit d'appliquer à p le lemme 11. Pour cela, il faut vérifier que p satisfait aux hypothèses (a), (b) et (c) de ce lemme. C'est évident, sauf pour (a) et (b), qui résultent immédiatement du lemme suivant, et du fait que p est croissante pour l'ordre naturel sur $\mathcal{C}$.

13. Lemme.

On a $p(f) = \lim_{\alpha > 0, \alpha \to 0} p(f - \alpha)$.

Preuve. – On suppose d'abord $p(f) < +\infty$. $\forall \varepsilon$, il existe $\varepsilon' > 0$, avec $\inf(\gamma(x) \; ; \; \gamma \in \Gamma \text{ et } \gamma \geqslant f - \varepsilon') + \varepsilon \geqslant p(f)$. $\forall \alpha > 0$, avec $\alpha < \varepsilon'/2$, on a

$$\{\gamma \; ; \; \gamma \in \Gamma , \; \gamma + (\varepsilon'/2) \geqslant f - \alpha\} \subset \{\gamma \; ; \; \gamma \in \Gamma , \; \gamma + \varepsilon' \geqslant f\} .$$

D'où $p(f - \alpha) \geqslant p(f) - \varepsilon$.

On suppose maintenant $p(f) = +\infty$. Supposons qu'il existe A avec $p(f - \alpha) \leqslant A$, pour tout $\alpha > 0$. On a alors

$$A \geqslant p(f - \alpha) \geqslant \inf(\gamma(x) \; ; \; \gamma \in \Gamma , \; \gamma \geqslant f - 2\alpha) \longrightarrow p(f) \quad \text{quand } \alpha \longrightarrow 0 ,$$

d'où $p(f) \leqslant A < \infty$. Contradiction.

14. Définition.

Soit $\Gamma \in \Lambda$. Pour toute fonction f, définie sur X, qui est s. c. s., on pose

$$f_\Gamma = \inf(\gamma \; ; \; \gamma \in \Gamma , \; \gamma \geqslant f) ,$$

quand cette formule à un sens, et $+\infty$ sinon.

$\forall\ x \in X$, on pose également $\hat{f}(x) = \sup_{\nu \in M_x} (\nu(f))$.

15. Théorème.

Soit Γ un élément de Λ . Pour toute f , qui est s. c. s. sur X et telle qu'il existe $\gamma \in \Gamma$ avec $f < \gamma$, on a

$$\forall\ x \in X\ ,\quad \exists\ \nu_x \in M_x \ \text{avec}\ \nu_x(f) = \hat{f}(x) = f_\Gamma(x)\ .$$

Preuve.

(a) On suppose d'abord $f \in \mathcal{C}$.

On suppose $f \lesssim \gamma - 1$. Soit $\nu \in M_x$. Puisque $1 \lesssim \gamma - f$, on a

$$\nu(1) \lesssim \gamma(x) - \nu(f)\ .$$

Or, pour calculer $\hat{f}(x)$, il suffit de prendre des $\nu \in M_x$ telles que $\nu(f) \geqslant f(x)$. Pour de telles ν , on aura donc $\nu(1) \lesssim \gamma(x) - f(x)$; d'où l'existence de ν_x , par compacité, en utilisant 12. Il reste à prouver que $\hat{f}(x) = f_\Gamma(x)$. Pour cela, notons que, grâce à 12, on a déjà

$$\hat{f}(x) = (\text{limite à gauche en } 0 \text{ de l'application } U(t) = (f+t)_\Gamma(x)\ )\ .$$

Or, par le même raisonnement que plus haut, on voit qu'il existe $\epsilon > 0$ et un compact $K \subset M_x$ tels que

$$(|t| < \epsilon) \Longrightarrow ((\widehat{f+t})(x) = \sup_{\nu \in K} (\nu(f+t)))\ .$$

Donc, $t \longmapsto (\widehat{f+t})(x)$ est continue pour $|t| < \epsilon$, ainsi que $t \longmapsto$ (limite à gauche de $U(t)$). Il en résulte que $U(t)$ est continue, pour $|t| < \epsilon$, donc en $t = 0$, ce qui est le résultat cherché.

(b) On ne suppose plus $f \in \mathcal{C}$.

On procède alors comme dans [8] (5. 6), en notant, comme en (a), qu'on peut se borner à raisonner sur une partie compacte de M_x .

16. Remarque.

Soit $f \in \mathcal{C}$. Lorsque Γ ne contient pas d'élément > 0 , alors il existe $t_f \in R$ tel que

1° $\forall\ t < t_f$, on a $(f+t) < \gamma_t$, avec $\gamma_t \in \Gamma$.

2° $\forall\ t > t_f$, on a $(f+t) \notin \overline{(\Gamma - \mathcal{C}^+)}$.

On voit que t_f est caractérisée par le fait que

$$(f + t_f) \in (\text{frontière topologique de } \overline{(\Gamma - \mathcal{C}^+)}\ )\ .$$

La preuve de 15 montre alors que l'application $t \longmapsto (f+t)_\Gamma$ est continue, pour $t < t_f$.

Nous allons maintenant chercher à étendre le théorème 15 à certaines fonctions plus générales que la classe des fonctions s. c. s. Pour cela, nous aurons besoin du lemme suivant.

17. Lemme.

Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille filtrante décroissante de fonctions s. c. s. sur X, majorées strictement par un élément (non fixé) de Γ, et admettant une limite f. On a alors $f_\Gamma = \lim((f_i)_\Gamma)$.

Preuve. - On procède comme dans le (b) de la preuve du § 15.

18. Notations et définition.

Soit S_Γ la classe des fonctions s. c. s. sur X, strictement inférieures à un élément (non fixé) de Γ.

Soit $\tilde{S}$ l'ensemble des suites finies d'entiers. Lorsque $s \in \tilde{S}$, on note $|s|$ le nombre d'éléments de s, distincts ou non. De plus, lorsque $n \leq |s|$, on note $s(n)$ le n-ième terme de s.

Nous dirons qu'une fonction f sur X, à valeurs dans $R \cup (+\infty)$, est K_Γ-analytique lorqu'il existe une application $s \longmapsto \Delta(s)$, où $s \in \tilde{S}$ et $\Delta(s) \in S_\Gamma$, vérifiant

(Δ.1) Les $\Delta(s)$ sont uniformément minorées dans leur ensemble,

(Δ.2) (s est une section commençante de s') $\Longrightarrow (\Delta(s) \geq \Delta(s'))$,

(Δ.3) $\forall\, n \in N$, alors $\sup(\Delta(s)\ ;\ |s| = 1$ et $s(1) \leq n) \in S_\Gamma$,

telle que, si l'on pose, pour toute $\sigma \in \Sigma$ (ensemble des suites infinies d'entiers), $\Delta(\sigma) = \inf(\Delta(s)\ ;\ s \in \tilde{S}$, s section commençante de σ), on ait $f = \sup(\Delta(\sigma)\ ;\ \sigma \in \Sigma)$. On pose alors $\Delta(\Sigma) = f$. On dit que Δ est priviligiée, lorsque la condition suivante est vérifiée :

$$(s\ ,\ s' \in \tilde{S}\ ;\ |s| = |s'|\ ;\ s(n) \leq s'(n)\ ,\ \forall\, n \leq |s|) \Longrightarrow (\Delta(s) \leq \Delta(s')) .$$

Etant donnée une fonction f, minorée sur X, à valeurs dans $R \cup (+\infty)$, on pose

$$R^*(f) = \inf(g\,;\, g : X \longmapsto R \cup (+\infty),\ g \geq f \text{ et } \forall\, x \in X,\ \forall\, \nu \in M_x : \nu^*(g) \leq g(x)) .$$

Il est clair que, $\forall\, x \in X$, $\forall\, \nu \in M_x$, on a $\nu^*(R^*(f)) \leq R^*(f)(x)$.

L'application $f \longmapsto R^*(f)$ est telle que

(R.1) $\qquad (f \leq g) \Longrightarrow (R^*(f) \leq R^*(g))$.

(R.2) $\qquad (f \in S_\Gamma) \Longrightarrow (R^*(f) = \hat{f} = f_\Gamma$, qui est s. c. s. (cf. § 15)).

(R.3) Pour toute suite suite croissante (f_n) de fonctions sur X, à valeurs dans $R \cup (+\infty)$, telle que f_1 soit minorée, on a $R^*(f_n) \longrightarrow R^*(f)$ quand $n \Longrightarrow \infty$ (cf. [5], p. 113).

(R.4) Pour toute suite décroissante (f_n) de fonctions de S_Γ, ayant une limite f, on a (cf. § 17) $R^*(f_n) \longrightarrow R^*(f)$, quand $n \longrightarrow \infty$.

19. Remarque.

Le cadre tracé au § 18 est proche de celui envisagé par MOKOBODZKI [14] dans sa théorie des capacités fonctionnelles. Signalons les différences suivantes :

(a) D'abord, nous permettons aux fonctions $\Delta(s)$ de prendre des valeurs négatives. Ceci est indispensable, dès lors que Γ ne contient pas les constantes.

(b) Le lemme 17 n'étant énoncé que sous certaines hypothèses, nous devons imposer certaines restrictions aux fonctions $\Delta(s)$ (cf. (Δ.3)).

(c) Les propriétés de l'intégrale supérieure imposant, pour que (R.3) soit valable, une condition de minoration, celle-ci se retrouve en (Δ.1).

20. Lemme.

Soit Δ une application de $\tilde{S}$ dans S_Γ, vérifiant les conditions (Δ.1), (Δ.2), (Δ.3) du § 18. Soit Δ' l'application de $\tilde{S}$ dans S_Γ ainsi définie :

$$\Delta'(s) = \sup(\Delta(s') \ ; \ s' \in \tilde{S} \ , \ |s'| = |s| \ , \ s'(n) \leq s(n) \ , \ \forall\, n \leq |s|) \ .$$

Alors Δ' vérifie les conditions (Δ.1), (Δ.2), (Δ.3) du § 18. Δ' est privilégiée, et on a

$$\Delta'(\Sigma) = \Delta(\Sigma) \ .$$

Preuve. - Ce résultat de la théorie des capacités fonctionnelles se démontre comme dans [14].

21. Théorème (de capacitabilité).

Soit f une fonction K_Γ-analytique. Pour toute application Δ privilégiée (au sens du § 18) telle que $\Delta(\Sigma) = f$, soit Δ_Γ l'application ainsi définie :

$$\forall\, s \in \tilde{S} \ , \text{ on pose } \ \Delta_\Gamma(s) = R^*(\Delta(s)) = (\Delta(s))_\Gamma \ ,$$

on a alors

$$R^*(f) = \Delta_\Gamma(\Sigma) \ .$$

(Notons qu'il y a abus de langage puisque, en général, $\Delta_\Gamma(s) \notin S_\Gamma$.)

Preuve. - Ce résultat de capacitabilité se démontre comme dans [14].

22. Corollaire (généralisant le théorème 15).

Sous les hypothèses du théorème 21, on a

$$\forall\, x \in X \ , \ R^*(f)(x) = \Delta_\Gamma(\Sigma)(x) = \sup(\nu(f) \ ; \ \nu \in M_x) \ .$$

Preuve. - D'après le § 21, on a

$$R^*(f)(x) = \Delta_\Gamma(\Sigma)(x) = \sup_{\sigma\in\Sigma} (\Delta_\Gamma(\sigma)(x)) .$$

Or, $\forall\ \sigma \in \Sigma$, d'après le § 15, on a

$$\Delta_\Gamma(\sigma)(x) = \sup_{\nu\in M_x} (\nu(\Delta(\sigma))) .$$

D'où

$$R^*(f)(x) = \sup(\nu(\Delta(\sigma)) ; \ \sigma \in \Sigma , \ \nu \in M_x)$$
$$= \sup_{\nu\in M_x} (\sup(\nu(\Delta(\sigma)) ; \ \sigma \in \Sigma)) = \sup_{\nu\in M_x} (\nu(f)) .$$

L'égalité $\sup_{\sigma\in\Sigma} (\nu(\Delta(\sigma))) = \nu(f)$ provient du théorème de capacitabilité classique [14] pour ν^* .

Comme le théorème 15 qu'il généralise, le théorème 22 est un résultat de balayage (cf. § 2). Mais nous n'avons considéré, dans les § 15 et 22, que des résultats portant sur les couples (ϵ_x , μ_x) . Maintenant, nous allons partir d'une mesure $\lambda \geq 0$ quelconque, au lieu de ϵ_x . Nous poserons

$$M_\lambda = (\nu ; \ \nu \in \mathfrak{M}^+ , \ \nu \leq \lambda \ \text{ sur } \ \Gamma) .$$

Nous allons donner des résultats faisant intervenir les couples (λ , M_λ) .

23. Théorème (généralisant le théorème 12).

Soit $\lambda \in \mathfrak{M}^+$, avec $\lambda \neq 0$. Pour toute $f \in \mathcal{C}$, on a

$$\sup_{\nu\in M_\lambda} (\nu(f)) = \lambda(\hat{f}) .$$

(si $\lambda = 0$, pour que cette formule subsiste, il faut poser $\lambda(+\infty) = +\infty$)

Preuve. - Soit $\hat{\lambda}$ l'application définie sur $\mathcal{C}$ par $f \longmapsto \lambda(\hat{f})$. Alors $\hat{\lambda}$ vérifie la conclusion du lemme 13, i. e.

$$\hat{\lambda}(f) = \lim_{\alpha>0,\alpha\to 0} (\hat{\lambda}(f - \alpha)) ,$$

pour toute $f \in \mathcal{C}$. Il suffit alors d'appliquer le lemme 11.

24. Théorème (généralisant le théorème 15).

Pour toute $f \in S_\Gamma$, on a, $\forall\ \lambda \in \mathfrak{M}^+$, avec $\lambda \neq 0$, $\exists\ \nu_\lambda \in M_\lambda$, avec

$$\nu_\lambda(f) = \sup_{\nu\in M_x} (\nu(f)) = \lambda(\hat{f}) .$$

Preuve. - Elle est analogue à celle du § 15.

25. Théorème (généralisant le § 22).

Soit f une fonction K_Γ-analytique. Pour toute application Δ privilégiée (au sens du § 18) telle que $\Delta(\Sigma) = f$, et pour toute $\lambda \in \mathfrak{M}^+$, avec $\lambda \neq 0$, on a

$$\int R^*(f)\, d\lambda = \sup_{\sigma\in\Sigma} (\lambda((\Delta(\sigma))_\Gamma)) = \sup_{\nu\in M_\lambda} (\nu(f)) .$$

Preuve.

1° Soit $\mathcal{C}$ l'application définie (cf. § 18) sur l'ensemble des fonctions sur X, qui sont minorées et à valeurs dans $R \cup (+\infty)$, par la formule

$$\mathcal{C}(f) = \int^* R^*(f)\, d\lambda .$$

(cf. [5], p. 106 pour la définition de $\int^*$). L'application $\mathcal{C}$ jouit des propriétés (R.1),(R.3),(R.4) énoncées pour R^* au § 18 ((R.2) est sans objet pour $\mathcal{C}$), qui sont très proches des propriétés des capacités fonctionnelles de MOKOBODZKI [14]. On voit alors que l'égalité des deux premiers membres dans le théorème 25 n'est autre que l'énoncé du théorème de capacitabilité [14].

2° Pour démontrer l'égalité des deux derniers membres dans le théorème 25, on remarque que, grâce au théorème 24, on a

$$\sup_{\sigma\in\Sigma} (\lambda((\Delta(\sigma))_\Gamma)) = \sup_{\sigma\in\Sigma,\, \nu\in M_\lambda} (\nu(\Delta(\sigma))) .$$

Il reste donc à prouver que $\sup_{\sigma\in\Sigma} (\nu(\Delta(\sigma))) = \nu(f)$. Ce résultat provient du théorème de capacitabilité classique, appliqué à ν^* [14].

26. Remarque.

Dans le cadre d'un espace localement compact Ω, les résultats précédents admettent l'interprétation suivante : Soit Γ un sous-cône convexe inf-stable de $\mathcal{C}_0(\Omega)$ (fonctions réelles continues sur Ω, tendant vers 0 à l'infini). Alors, d'après le théorème 12, on a

$$\forall\, x\in\Omega ,\quad \forall\, f\in \mathcal{C}_0(\Omega) ,\quad \sup(\nu(f)\ ;\ \nu\in \mathcal{M}^+ ,\ \nu(1)<\infty ,\ \nu\leq \epsilon_x \text{ sur } \Gamma)$$
$$= \lim_{\epsilon>0,\,\epsilon\to 0} (\inf(\gamma(x)\ ;\ \gamma\in\Gamma ,\ \gamma\geq f-\epsilon)) .$$

Naturellement, on ne peut espérer interpréter, dans ce cadre, le théorème 15 et les résultats suivants, puisque, entre deux éléments f, $g\in \mathcal{C}_0(\Omega)$, la relation $(f\leq g-1)$ ne peut avoir lieu.

27. Exemple.

Nous allons donner en (b) un exemple de cône de Λ pour lequel l'extension de la formule de balayage de G. Mokobodzki (cf. § 2, 1°) ne serait pas valable.

(a) Soit X un espace compact, et $\Gamma\subset \mathcal{C}(X)$ un élément de Λ. On suppose qu'il existe $f\in\mathcal{C}(X)$, avec $f\in \overline{(\Gamma-\mathcal{C}^+)}$, et $\sup_{x\in X}(\hat{f}(x)) = +\infty$. Rajoutons à X un élément ω, et posons $X_\omega = X\cup\omega$. Soit $\Gamma_\omega\subset\mathcal{C}(X_\omega)$ le cône formé des $g\in\mathcal{C}(X_\omega)$ telles que $g|_X\in\Gamma$ et $g(\omega)=0$. On voit que l'on a

$$\widehat{(f_\omega)}(\omega) = 0 \quad\text{et}\quad \sup_{x\in X_\omega}(\widehat{(f_\omega)}(x)) = +\infty .$$

On ne peut donc pas avoir

$$\widehat{(f_\omega)}(\omega) = \inf(g(\omega)\ ;\ g\in\Gamma_\omega ,\ g\geq f_\omega) .$$

(b) Soit Γ le sous-cône de $\ell^\infty(N)$ formé des suites $(f(n))$ telles que $f(n)\geq 0$

et $f(2n) \geqslant nf(2n+1)$, pour tout $n \geqslant 1$. Un élément $g \in \ell^\infty_+(N)$ est dans $\overline{(\Gamma - \ell^\infty_+(N))}$ si, et seulement si, on a $g(2n+1) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$. La suite $s = (1/\sqrt{n})$ est donc dans $\overline{(\Gamma - \ell^\infty_+(N))}$. Or, on a $\hat{s}(2n) \geqslant (n/\sqrt{2n+1}) \longrightarrow \infty$ quand $n \longrightarrow \infty$. On peut donc utiliser (a), en notant que $g = 0$ sur $\beta(N) \setminus N$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUER (H.). - Cônes convexes semi-réticulés de fonctions continues. Théorèmes de représentations et de stabilité, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 8e année, 1963/64, n° 5, 2 p.

[2] BECKER (R.). - Some consequences of a kind of Hahn-Banach's theorem, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 17e année, 1977/78, n° 2, 13 p.

[3] BOBOC (N.) et CORNEA (A.). - Cônes des fonctions continues sur un espace compact, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 261, 1965, p. 2564-2567.

[4] BOBOC (N.) and CORNEA (A.). - Convex cones of lower semicontinuous functions on compact spaces, Rev. roum. Math. pures et appl., t. 12, 1967, p. 471-526.

[5] BOURBAKI (N.). - Intégration, Chap. 1, 2, 3 et 4, 2e édition. - Paris, Hermann, 1965 (Act. scient. et ind., 1175 ; Bourbaki, 13).

[6] CHOQUET (G.) et DENY (J.). - Ensembles semi-réticulés et ensembles réticulés de fonctions continues, J. Math. pures et appl., 2e série, t. 36, 1957, p. 179-189.

[7] DINGES (H.). - Decomposition in ordered semigroups, J. functional Analysis, t. 5, 1970, p. 436-483.

[8] GOULLET de RUGY (A.). - Géométrie des simplexes. - Paris, C. D. U. et S. E. D. E. S., 1968.

[9] GUBER (S.). - Masstheoretische Kennzeichnung gewisser Funktionenkegel, Archiv der Math., Basel und Stuttgart, t. 15, 1964, p. 58-70.

[10] GUBER (S.). - Darstellungs- und Stabilitätssätze für Funktionenkegel, Math. Z., t. 86, 1964, p. 63-74.

[11] MEYER (P. A.). - Probabilités et potentiel. - Paris, Hermann, 1966 (Act. scient. et ind., 1318 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 14).

[12] MOKOBODZKI (G.). - Espaces réticulés et algèbres de fonctions stables par composition avec les fonctions [illegible], Séminaire de théorie du potentiel, 1977/78.

[13] MOKOBODZKI (G.) et SIBONY (D.). - Cônes adaptés de fonctions continues et théorie du potentiel, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 6e année, 1966/67, n° 5, 35 p.

[14] MOKOBODZKI (G.). - Capacités fonctionnelles, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 6e année, 1966/67, n° 1, 6 p.

[15] PHELPS (R. R.). - Lectures on Choquet's theorem. - Princeton, Van Nostrand Company, 1966 (Van Nostrand mathematical Studies, 7).

[16] SAINTE-BEUVE (M. F.). - Sur une relation d'ordre entre mesures positives sur S^n, Séminaire d'analyse convexe, Univ. Montpellier, 1976, n° 4.

(Texte reçu le 28 juin 1978)

Richard BECKER
Equipe d'analyse, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05