

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

MICHEL TALAGRAND

Une remarque sur les espaces de Banach réticulés

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 17, n° 2 (1977-1978), exp. n° C14,
p. C1-C2

http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_2_A19_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE REMARQUE SUR LES ESPACES DE BANACH RÉTICULÉS

par Michel TALAGRAND

Le but de cette communication est de donner une preuve directe et élémentaire d'un résultat de N. GHOUSSOUB [1] (et même d'un résultat plus général) concernant les espaces de Banach réticulés (e. B. r.), et établi par celui-ci à l'aide de la théorie des martingales. On renvoie à [2] pour toutes les définitions et résultats élémentaires concernant les e. B. r.

THEOREME [1]. - Soit E un e. B. r. possédant la propriété de Schur et tel que E' possède un système orthogonal topologique. Alors, il existe un ensemble Γ tel que E soit isomorphe (en tant que e. B. r.) à $\ell^1(\Gamma)$.

Preuve. - La première étape consiste à montrer qu'en fait E' possède un point quasi-intérieur. Pour cela, si $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ désigne un système orthogonal topologique de E' , on va montrer que A est fini. Pour tout α , désignons par F_α la bande de E' engendrée par x_α , et par G_α celle engendrée par les x_β , pour $\beta \neq \alpha$. Puisque $E \neq c_0$, G_α est $\sigma(E', E)$ -fermée. En particulier, son polaire H_α n'est pas réduit à zéro. Soit donc $y_\alpha \in H_\alpha$, avec $\|y_\alpha\| = 1$. Pour $\beta \neq \alpha$, et $x \in F_\alpha$, on a $x(y_\beta) = 0$. Puisque la somme algébrique des F_α est dense en norme dans E' , on en déduit que la famille des y_α tend faiblement vers 0 suivant le filtre des parties cofinies de A . Puisque E possède la propriété de Schur, ceci montre que A est fini.

On peut donc maintenant supposer que E' contient un point quasi-intérieur, $u \in E'_+$. Désignons par C le polaire de l'intervalle d'ordre $(-u, u)$ et prouvons que C est borné. Sinon, pour tout n , il existe $x_n \in C$, avec $\|x_n\| \geq n$. Posons $y_n = x_n / \|x_n\|$, et prouvons que la suite y_n converge faiblement vers 0. Du fait que $ny_n \in C$, il résulte que, pour $t \in (-u, u)$, on a $|t(y_n)| \leq 1/n$. Ainsi, si z est une valeur d'adhérence de la suite y_n dans la boule unité de E'' (pour la topologie $\sigma(E'', E')$), alors $z = 0$ sur $(-u, u)$. Mais, par hypothèse $\bigcup_n n(-u, u)$ est dense en norme dans E' , et ainsi $z = 0$, ce qui prouve que y_n converge faiblement vers 0. Puisque E possède la propriété de Schur, cette contradiction montre que C est borné. Puisque $(-u, u)$ étant préfaiblement compact est préfaiblement fermé, il est égal au polaire de C , donc contient une boule.

Il existe donc une norme équivalente sur E telle que la boule unité de E' soit l'intervalle $(-u, u)$. Ainsi E' est un M -espace, et donc E'' , et ainsi E est un L -espace. Pour cette nouvelle norme, E est donc isométrique à un $L^1(\mu)$. Pour conclure il reste à montrer que μ est atomique. Mais, si A est un ensemble mesu-

nable de mesure finie ne contenant aucun atome, l'ensemble des fonctions mesurables, nulles en dehors de A , bornées par 1 sur A , est faiblement compact non compact, ce qui termine tout, puisque E possède la propriété de Schur.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GHOUSSEUB (N.). - Orderamarts : A class of asymptotics martingales, J. of multiv. Analysis, 1978 (à paraître).
- [2] SCHAEFER (H. H.). - Banach lattices and positive operators. - Berlin, Springer-Verlag, 1974 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 215).

(Texte reçu le 23 octobre 1978)

Michel TALAGRAND
Equipe d'Analyse, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05
