Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Gilles Godefroy

Épluchabilité et unicité du prédual

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 17, nº 2 (1977-1978), exp. nº C11, p. C1-C3
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_2_A16_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
17e année, 1977/78, Communication n° 11, 3 p.

ÉPLUCHABILITÉ ET UNICITÉ DU PRÉDUAL

par Gilles GODEFROY

J'expose, dans cet article, quelques remarques sur l'étude de l'unicité des préduaux développée dans [1]. Commençons par quelques rappels.

DÉFINITION 1. - *Soit* E *un espace de Banach. On dira que* E *est unique prédual normique de* E' *si, pour tout Banach* F *tel que* F' *soit isométrique à* E' , *et toute isométrie* I *de* E' *sur* F' , *on a*

$$^{t}I(i_F(F)) = i_E(E) ,$$

où i_E , *respectivement* i_F , *désigne l'injection canonique de* E , *respectivement* F , *dans son bidual.*

Rappelons le lemme essentiel suivant.

LEMME 2. - *Soit* E *un espace de Banach. Soit*

$$R_E = \{f \in E^{(3)} \ ; \ \operatorname{Ker} f \cap B_1(E'') \ \text{ est } \ \sigma(E'' , E')\text{-dense dans } \ B_1(E'')\} .$$

Si R_E *est un espace vectoriel,* E *est l'unique prédual normique de* E' .

Démonstration. - On a $i_E(E)^{\perp} \subseteq R_E$. De plus, on a $E^{(3)} = i_{E'}(E') \oplus i_E(E)^{\perp}$, et $i_{E'}(E') \cap R_E = \{0\}$. Si R_E est un espace vectoriel, ceci implique que $i_E(E)^{\perp} = R_E$, donc que $i_E(E) = (R_E)_{\perp}$ (orthogonal de R_E dans E''). Soit maintenant I une isométrie entre E' et un dual F' . On voit aisément que

$$(^{t}I(i_F(F)))^{\perp} \subseteq R_E ,$$

et que

$$E^{(3)} = i_{E'}(E') \oplus (^{t}I(i_F(F)))^{\perp} .$$

On a donc $(^{t}I(i_F(F)))^{\perp} = R_E$, d'où $^{t}I(i_F(F)) = (R_E)_{\perp} = i_E(E)$.

C. Q. F. D.

Introduisons à présent une notion naturelle qui nous sera utile.

DÉFINITION 3. - *Soit* C *un convexe fermé borné d'un espace de Banach* E . *Le convexe* C *sera dit* épluchable *si, pour tout ensemble* $\sigma(E , E')$*-ouvert non vide* ω *de* C , *et, pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe un* $\sigma(E , E')$*-ouvert non vide* ω_ϵ *de* C *inclus dans* ω *et de diamètre inférieur à* ϵ .

On a alors le résultat suivant.

THÉORÈME 4. - *Soit* E *un espace de Banach. Si* $B_1(E)$ *est épluchable, alors* E *est unique prédual normique de* E' .

Démonstration. - L'ensemble $i_E(B_1(E))$ est $\sigma(E'' , E')$-dense dans $B_1(E')$. Si $B_1(E)$ est épluchable, on en déduit que tout $\sigma(E'' , E')$-ouvert de $B_1(E'')$ contient pour tout ϵ , un $\sigma(E'' , E')$-ouvert non vide de diamètre inférieur à ϵ ; la réunion des $\sigma(E'' , E')$-ouverts de $B_1(E'')$ de diamètre inférieur à ϵ est donc dense dans $(B_1(E'') , \sigma(E'' , E'))$, ceci pour tout ϵ . On en déduit, en employant le théorème de Baire, que l'ensemble G des points de continuité de l'application $\mathrm{Id} : (B_1(E'') , \sigma(E'' , E')) \longrightarrow (B_1(E'') , \| \|)$ est dense dans $(B_1(E'') , \sigma(E'' , E'))$.

On voit alors immédiatement que l'on a

$$f \in R_E \Longleftrightarrow f \equiv 0 \quad \text{sur} \quad G ,$$

et donc que R_E est un espace vectoriel ; on applique alors le lemme 2.

C. Q. F. D.

Exemples. - La boule unité $B_1(E)$ est épluchable dans les cas suivants :

(a) E est localement uniformément convexe ;

(b) E a la propriété de Radon-Nikodym ou (plus généralement peut-être) :

(c) E a la propriété (*), i. e. tout convexe fermé borné contient un ouvert faible de diamètre inférieur à ϵ , et ceci pour tout ϵ . On ne sait pas si la propriété (*) est équivalente à la propriété de Radon-Nikodym ;

(d) La norme de E' est Fréchet-différentiable sur un ensemble dense.

Remarques.

1° Si $B_1(E)$ est épluchable, $B_1(E)$ est un résiduel de $(B_1(E'') , \sigma(E'' , E'))$. En particulier, $B_1(E)$ est faiblement de Baire ; la réciproque est vraie lorsque E est séparable.

2° La "traduction" du théorème 4 en termes de convexes compacts est la suivante : Soit K un convexe compact, et $\mathfrak{A}(K)$ l'espace des fonctions affines bornées sur K. Supposons que tout ouvert, pour la convergence simple, de $B_1(\mathfrak{A}(K))$ contienne un ouvert, pour la convergence simple, de diamètre inférieur à ϵ , ceci pour tout ϵ ; alors toute bijection affine entre K et un convexe compact K' sera continue, donc un homéomorphisme. Ce sera vrai, en particulier, des compacts convexes "assez ronds", cf. l'exemple (d) ci-dessus.

3° On peut démontrer très élémentairement que, si E' est un dual séparable, alors tout convexe fermé borné de E' est épluchable. Voilà le schéma de la preuve :

" C convexe fermé borné de E' " implique " C $\sigma(E' , E)$-$\mathcal{G}_\delta$ dans un $\sigma(E' , E)$-compact", qui implique " C $\sigma(E' , E)$ de Baire", qui implique " $\mathrm{Id} : (C , \sigma(E' , E)) \longrightarrow (C , \| \|)$ a un $\mathcal{G}_\delta$-dense de points de continuité", qui implique " $\mathrm{Id} : (C , \sigma(E' , E'')) \longrightarrow (C , \| \|)$ a des points de continuité", qui implique " C contient un $\sigma(E' , E'')$-ouvert de diamètre inférieur à ϵ , pour tout ϵ ", qui implique "tout ouvert de C en contient un par le raisonnement précédent", On en déduit alors, par exemple, le résultat suivant, qui est donc obtenu de façon "élémentaire" : Si E'' est séparable, toute bijection isométrique de E'' respecte l'espace $i_E(E)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GODEFROY (G.). - Espaces de Banach ; Existence et unicité de certains préduaux, thèse de 3e cycle, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 1978 (à paraître).

(Texte reçu le 19 septembre 1978)

Gilles GODEFROY
18 villa du Danube
75019 PARIS