Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Gilles Godefroy

Quelques remarques sur la propriété (C) des espaces de Banach

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 17, n° 2 (1977-1978), exp. n° C10, p. C1-C3

<http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_2_A15_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
17e année, 1977/78, Communication n° 10, 3 p.

QUELQUES REMARQUES SUR LA PROPRIÉTÉ (C) DES ESPACES DE BANACH

par Gilles GODEFROY

H. H. CORSON a défini dans [1] la propriété (C) des espaces de Banach de la façon suivante : Toute famille $(C_\alpha)_{\alpha\in A}$ des convexes fermés de E telle que, pour tout $I \subseteq A$ dénombrable, on ait $\bigcap_{\alpha\in I} C_\alpha \neq \emptyset$, vérifie $\bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha \neq \emptyset$.

Tout espace de Banach E , qui est Lindelöf pour sa topologie faible, a la propriété (C), la réciproque étant fausse, comme l'a montré R. POL [3].

R. POL a montré, en particulier dans [3], le résultat suivant.

PROPOSITION 1. - *Soit* E *un espace de Banach. On a l'équivalence* :

1° E *a la propriété* (C).

2° *La boule unité* $B_1(E')$ *de* E' , *munie de la topologie* $\sigma(E' , E)$, *a la propriété* (C') :

Si $x' \in \bar{A}'$ $(A' \subset B_1(E'))$, *alors il existe* $C' \subseteq A'$ *dénombrable, tel que* $x' \in \overline{\mathrm{conv}}(C')$.

On peut déduire de cette proposition un certain nombre de résultats. Rappelons tout d'abord qu'un compact K est dit un compact de Rosenthal si K est homéomorphe à un compact de fonctions de 1re classe sur un polonais, muni de la topologie de la convergence simple. On a alors la proposition suivante.

PROPOSITION 2. - *Soit* K *un compact de Rosenthal. Alors, l'espace* $\mathcal{C}(K)$ *a la propriété* (C).

Démonstration. - Soit $\mathfrak{M}^1(K)$ le compact des mesures de masse inférieure ou égale à 1 sur K . Il est démontré dans [2] que, si K est un compact de Rosenthal, alors $\mathfrak{M}^1(K)$ est un compact de Rosenthal. En particulier, $\mathfrak{M}^1(K)$ est angélique, donc a fortiori $\mathfrak{M}^1(K)$ vérifie la propriété (C') de la proposition 1. Donc $\mathcal{C}(K)$ a la propriété (C).

C. Q. F. D.

En particulier, soit H l'espace de Helly, i. e. l'espace des fonctions croissantes de $[0 , 1]$ dans lui-même, muni de la topologie de la convergence simple. Le compact H est évidemment un compact de Rosenthal, donc $\mathcal{C}(H)$ a la propriété (C); ce qui répond à une question de R. POL ([3], 3.3, exemple 4).

On peut encore énoncer le curieux résultat suivant. On notera $\mathrm{Bor}(E , E')$ la tribu "cylindrique" d'un Banach E , c'est-à-dire la tribu engendrée par les formes linéaires continues. Un espace mesurable (X , Σ) est dit souslinien s'il est borel-isomorphe à un analytique de $\underline{\mathbb{R}}$.

PROPOSITION 3. - Soit E un sous-espace fermé de $\ell^{\infty}(\mathbb{N})$. Si l'espace $(E , \mathrm{Bor}(E , E'))$ est souslinien, alors E a la propriété (C).

Démonstration. - Il est démontré dans [2] que $(E , \mathrm{Bor}(E , E'))$ est souslinien si, et seulement si, $B_1(E')$ est un compact de Rosenthal. Les compacts de Rosenthal étant angéliques, $B_1(E')$ vérifie alors a fortiori la propriété (C') ; et E vérifie donc la propriété (C).

C. Q. F. D.

Terminons par une caractérisation des duaux d'espaces de Banach séparables qui ne contiennent pas $\ell^1(\mathbb{N})$.

PROPOSITION 4. - Soit E un Banach séparable. On a l'équivalence

1° E ne contient pas de sous-espace isomorphe à $\ell^1(\mathbb{N})$.

2° E' a la propriété (C).

Démonstration.

1° $\Longrightarrow$ 2° : Si $E \not\supset \ell^1(\mathbb{N})$, alors $(B_1(E'') , \sigma(E'' , E'))$ est un compact de Rosenthal, et est donc angélique, et, par conséquent, E' a la propriété (C).

2° $\Longrightarrow$ 1° : Si $E \supset \ell^1(\mathbb{N})$, alors $\ell^{\infty}(\mathbb{N})$ est quotient de E' . Or la propriété (C) est stable par quotient, et on vérifie facilement que $\ell^{\infty}(\mathbb{N})$ n'a pas la propriété (C).

C. Q. F. D.

Remarques. - Le résultat ci-dessus met bien en évidence le fait que la classe des duaux d'espaces séparables, ne contenant pas $\ell^1(\mathbb{N})$, étend de façon naturelle la classe des duaux séparables.

On a montré en fait qu'un dual E' d'un espace séparable avait la propriété (C) si, et seulement si, il avait une propriété a priori plus forte, à savoir l'angélicité de la boule unité préfaible de son dual.

On déduit du résultat ci-dessus le résultat suivant : Si E' est dual d'un espace séparable E , on a " E' faiblement-asplund" implique " $B_1(E'')$ est $\sigma(E'' , E')$-séquentiellement compact" qui implique " $E \not\supset \ell^1(\mathbb{N})$ " qui implique " E' a la propriété (C)". Donc en résumé, " E' faiblement-asplund" implique " E' a la propriété (C)". Cette implication restera vraie pour un espace F tel qu'il existe une partie D dénombrable de $B_1(F')$, dense dans $(B_1(F') , \sigma(F' , F))$, et telle que la tribu engendrée par D sur F soit souslinienne. C'est là, je crois, un phénomène général : Les résultats démontrés, pour les espaces duaux, doivent s'étendre, dans un certain nombre de cas, aux espaces F tels qu'il existe une partie P de F' telle que la topologie de la convergence simple sur P ait de "bonnes" propriétés topologiques ou boréliennes. Dans le cas des espaces duaux, il s'agit de la compacité de $B_1(F)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CORSON (H. H.). - The weak topology of a Banach space, Trans. Amer. math. Soc., t. 101, 1961, p. 1-15.

[2] GODEFROY (G.). - Compacts de Rosenthal, Thèse 3e cycle, Université Pierre et Marie Curie, 1977 (à paraître).

[3] POL (R.). - On a question of H. H. CORSON and some related problems, 1978 (Preprint).

(Texte reçu le 29 juin 1978)

Gilles GODEFROY
Equipe d'Analyse, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05