Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

GILLES GODEFROY

Sur les cônes réticules analytiques

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 17, nº 2 (1977-1978), exp. nº C9, p. C1-C4
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_2_A14_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
17e année, 1977/78, Communication n° 9, 4 p.

SUR LES CÔNES RÉTICULES ANALYTIQUES

par Gilles GODEFROY

Soit E un Banach séparable. Un cône convexe C de E sera dit réticulé si E, muni de l'ordre défini par C, est un espace vectoriel réticulé, ce qui implique, en particulier, que C est saillant et engendre E. Un sous-ensemble de E sera dit <u>analytique</u> s'il est image continue d'un espace polonais. On ne fait aucune hypothèse sur la croissance de la norme de E, ou d'une norme équivalente, relativement à l'ordre défini par C.

Les résultats qui suivent sont énoncés dans le cadre des Banach séparables ; ils peuvent aisément, modulo une formulation appropriée, être étendus à la situation plus générale des espaces de Fréchet.

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> E <u>un Banach séparable, et soit</u> C <u>un cône réticulé analytique tel que</u> $(-C) \cap \overline{C} = \{0\}$. <u>Alors</u>, C <u>est fermé</u>.

<u>Démonstration</u>. - Soit X_1 l'intersection de la boule unité de E avec C, et soit $X = \Gamma(X_1 \cup (-X_1))$. L'ensemble X est convexe, équilibré, absorbant et analytique, c'est donc un voisinage de 0 dans E. Il existe donc ε tel que $B_\varepsilon(E) \subseteq X$. Soit $x \in B_\varepsilon(E)$.

$$\exists\, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \text{ tel que } x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \text{ , où } x_1 \in X_1 \text{ , } x_2 \in -X_1$$
$$\Longrightarrow |x| \leqslant x_1 - x_2 \text{ .}$$

Donc, $\forall\, x$, $\|x\| \leqslant \varepsilon$, $\exists\, x'$ tel que $|x| \leqslant x'$, $\|x'\| \leqslant 2$. Considérons alors l'ensemble

$$T = \{y \in E \text{ ; } \exists\, x \in E \text{ ; } \|x\| \leqslant 1 \text{ , } |y| \leqslant |x|\} \text{ .}$$

T est convexe équilibré absorbant. De plus T ne contient aucune droite. En effet, soit $D = \{\lambda y \text{ ; } \lambda \in \mathbb{R}\}$ une droite contenue dans T. On a

$$D \subseteq T \Longrightarrow \exists\, x_n \text{ ; } \|x_n\| \longrightarrow 0 \text{ , } |y| \leqslant |x_n| \text{ , } \forall\, n \text{ .}$$

Donc d'après ce qui précède,

$$\exists\, x'_n \text{ ; } \|x'_n\| \longrightarrow 0 \text{ tel que } |y| \leqslant x'_n \text{ , } \forall\, n \text{ .}$$

Or, on a

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, n \text{ , } x'_n - |y| \in C \\ x'_n - |y| \xrightarrow[n\infty]{} -|y| \end{array}\right\} \Longrightarrow -|y| \in \overline{C} \text{ .}$$

Donc, $(-|y|) \in (-C) \cap \overline{C}$.

D'après l'hypothèse, ceci implique $y = 0$, donc $D = \{0\}$.

La jauge j_T associée à T est donc une norme sur E. Cette norme est moins fixe que la norme initiale, car, d'après ce qui précède, $T \supseteq B_{\varepsilon/2}(E)$. De plus, cette norme j_T est croissante sur C , ce qui montre (voir [1], p. 83) que C est fermé pour j_T , donc pour la norme initiale sur E .

C. Q. F. D.

On déduit immédiatement de ce théorème le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2. - Soit E un Banach séparable, C un cône réticulé analytique. On suppose vérifiée l'une des hypothèses suivantes :

(a) $\bar{C}$ est saillant.

(b) Il existe $f \in E'$ telle que $\operatorname{Ker} f \cap C = \{0\}$.

Alors, C est fermé.

Démonstration. - On a $(-C) \cap \bar{C} \subseteq (-\bar{C}) \cap \bar{C}$, d'où le résultat si (a) est vérifiée. Si (b) est vérifiée, la forme linéaire f est strictement positive, ou strictement négative, sur $C \setminus \{0\}$, car C est un cône convexe saillant. Supposons, par exemple, que $f(x) > 0$, pour tout $x \in C \setminus \{0\}$. On a alors $f(x) \geqslant 0$, pour tout $x \in \bar{C}$, et $f(x) < 0$, pour tout $x \in (-C) \setminus \{0\}$. On a donc

$$((-C) \setminus \{0\}) \cap \bar{C} = \emptyset ,$$

d'où $(-C) \cap \bar{C} = \{0\}$.

C. Q. F. D.

Remarques. - On ne peut se passer de l'hypothèse $(-C) \cap \bar{C} = \{0\}$ comme le montre l'exemple de l'ordre lexicographique sur $\underset{\sim}{R}^2$.

On ne peut se passer de l'hypothèse d'analyticité, comme le montre l'exemple du cône associé à une base algébrique du Banach E (choisie de telle façon que $\bar{C}$ soit saillant).

Soit E un espace de Banach séparable, et C un cône réticulé fermé et saillant. Il n'existe pas toujours sur E de norme équivalente croissante. Un exemple est donné par l'espace $CVB([0 , 1])$ des fonctions continues à variation bornée sur $[0 , 1]$, muni de la norme $\|f\| = |f(0)| + V_0^1 f$, et du cône

$$C = \{f \in CVB([0 , 1]) \ ; \ f \geqslant 0 \text{ sur } [0 , 1]\} .$$

La démonstration du théorème 1 montre, par contre, l'existence d'une telle norme, à savoir j_T , si $\dim E < +\infty$.

Enonçons à présent quelques conséquences du théorème 1. Rappelons qu'un convexe S d'un e. l. c. F est dit "simplexe" si le cône engendré par $S \times \{1\}$ dans $F \times \underset{\sim}{R}$ est réticulé.

PROPOSITION 3. - Soit E un Banach séparable, S un simplexe analytique tel que l'espace vectoriel engendré par S soit E tout entier. Alors, S est fermé.

Démonstration. - On réalise E comme l'hyperplan affine $E \times \{1\}$ de l'espace

$E \times \underset{\sim}{R}$. Le cône C_S engendré par S est alors un cône analytique réticulé. L'application π_2 de projection sur $\underset{\sim}{R}$ vérifie $\operatorname{Ker} \pi_2 \cap C_S = \{0\}$. Le corollaire 2 termine la démonstration.

C. Q. F. D.

On peut obtenir de plus quelques renseignements sur l'aspect des simplexes générateurs.

PROPOSITION 4. - Soit E un espace de Banach séparable.

1° Il existe un simplexe analytique borné qui engendre E si, et seulement si, E est un espace isomorphe à $L^1(\mu)$.

2° Il existe un simplexe analytique borné d'intérieur non vide qui engendre E si, et seulement si, $\dim E < +\infty$.

3° Soit S un simplexe analytique qui engendre E . Alors, $\operatorname{Card}(\mathcal{E}(S)) \leq \aleph_0$.

Démonstration.

1° En considérant, comme précédemment, l'espace E comme un hyperplan affine de $E \times \underset{\sim}{R}$, on fait apparaître $E \times \underset{\sim}{R}$ comme un espace réticulé dont le cône positif a une base bornée, donc comme un espace $L^1(\mu)$.

2° Si de plus $\operatorname{int}(S) \neq \emptyset$, alors E apparaît comme un espace de type M . Et un espace, qui est à la fois de type M et de type L , est de dimension finie.

3° On munit $E \times \underset{\sim}{R}$ de la norme j_T , définie dans la démonstration du théorème 1. L'espace $(E \times \underset{\sim}{R}\ ,\ j_T)$ est alors un espace normé réticulé séparable. Tout point extrémal x de S définit une génératrice extrémale G_x de C_S . Soient $x\ ,\ x' \in \mathcal{E}(S)$, et $x_0 \in G_x$, $x'_0 \in G_{x'}$ tels que $j_T(x_0) = j_T(x'_0) = 1$. Les éléments x_0 et x'_0 sont étrangers. Soit $f \in (E \times \underset{\sim}{R})'^{+}$ tel que

$$\|f\| \leq 1\ ,\quad f(x_0) \geq 1 - \varepsilon\ .$$

Il existe f_1 et f_2 positives telles que $f_1 + f_2 = f$, et telles que $0 \leq f_1(x_0) \leq \varepsilon$, $0 \leq f_2(x'_0) \leq \varepsilon$.

On a $f_1 + f_2(x_0) \geq 1 - \varepsilon$, donc $f_2(x_0) \geq 1 - 2\varepsilon$.

Par conséquent, $f_2(x_0 - x'_0) \geq 1 - 3\varepsilon$.

Puisque $\|f_2\| \leq \|f\| \leq 1$, ceci montre que $j_T(x_0 - x'_0) \geq 1 - 3\varepsilon$, ceci, pour tout ε , donc $j_T(x_0 - x'_0) \geq 1$. L'espace $(E \times \underset{\sim}{R}\ ,\ j_T)$ étant séparable, l'ensemble $\mathcal{E}(S)$ est au plus dénombrable.

C. Q. F. D.

Remarque. - L'ensemble $\mathcal{E}(S)$ peut, bien sûr, être vide, comme le montre l'exemple suivant

$$E = L^2([0\ ,\ 1]\ ;\ dx)\ ,\quad S = \{f \in E\ ;\ f \geq 0\ ,\ \int_0^1 f(t)\,dt = 1\}\ .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] SCHAEFER (H. H.). - Banach lattices and positive operators. - Berlin, Springer-Verlag, 1974 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 215).

(texte reçu le 29 juin 1978)

Gilles GODEFROY
Equipe d'Analyse, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05