Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Michel Talagrand

Une remarque sur les espaces de Banach mesure-compacts

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 17, nº 2 (1977-1978), exp. nº C7, p. C1-C2

<http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_2_A12_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
17e année, 1977/78, Communication n° 7, 2 p.

UNE REMARQUE SUR LES ESPACES DE BANACH MESURE-COMPACTS

par Michel TALAGRAND

On dit qu'un espace de Banach E est mesure-compact (m. c.) si, pour tout espace probabilisé (Ω , Σ , μ) et toute application $f : \Omega \longrightarrow E$ scalairement mesurable bornée, il existe une application g de Ω dans E, Bochner-mesurable et scalairement équivalente à f (c'est-à-dire, pour $x' \in E'$, on a $x' \circ f = x' \circ g$, μ-presque-partout).

On dit qu'un cardinal $\aleph$ n'est pas réel-mesurable si toute mesure σ-additive, définie sur la tribu des sous-ensembles d'un ensemble de cardinal $\aleph$, est atomique. Le but de cette remarque est de prouver le résultat suivant, qui est établi dans [1] par G. A. EDGAR, avec l'hypothèse supplémentaire inutile que F' contient une suite normante (c'est-à-dire une suite (y_n) telle que, pour $x \in F$, $\|x\| = \sup_n |y_n'(x)|$).

THÉORÈME. - <u>Soit</u> Γ <u>un ensemble dont le cardinal n'est pas réel-mesurable. Soit</u> $(E_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ <u>des espaces de Banach</u> m. c. <u>Alors, la</u> ℓ_1<u>-somme</u> $F = (\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma)_1$ <u>est m. c.</u>

<u>Preuve</u>. - Soit (Ω , Σ , μ) un espace probabilisé, et $\omega \longrightarrow h(\omega) = (h_\gamma(\omega))_{\gamma\in\Gamma}$ une application bornée scalairement mesurable de Ω dans F.

Montrons que l'ensemble D des γ tels que h_γ ne soit pas scalairement équivalente à 0 est dénombrable. Pour $\gamma \in D$, il existe $y_\gamma \in E_\gamma'$, avec $\|y_\gamma\| < 1$, de sorte que $\omega \longrightarrow y_\gamma(h_\gamma(\omega))$ ne soit pas égal à 0 presque-partout. Si D n'est pas dénombrable, alors il exsite $a > 0$ et un sous-ensemble D' de D tels que, pour $\gamma \in D'$, on ait $\mu(T_\gamma) \geqslant a$, où l'on a posé

$$T_\gamma = \{\omega ;\ |y_\gamma(h_\gamma(\omega))| \geqslant a\} .$$

Il existe alors $\omega \in \Omega$ tel que l'ensemble H des γ avec $\omega \in T_\gamma$, soit infini. Pour $\gamma \in H$, on a donc $|y_\gamma(h_\gamma(\omega))| \geqslant a$. Puisque $\|y_\gamma\| \leqslant 1$, ceci montre que $\|h_\gamma(\omega)\| \geqslant a$, ce qui est absurde puisque

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \|h_\gamma(\omega)\| = \|h(\omega)\| < + \infty .$$

Désignons par g la fonction $\omega \longrightarrow g(\omega) = (h_\gamma'(\omega))_{\gamma\in\Gamma}$, où $h_\gamma' = h_\gamma$ pour $\gamma \in D$, et $h_\gamma' = 0$ sinon. Prouvons que g est scalairement équivalente à h. Il suffit de prouver que, pour toute famille $(y_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, où $y_\gamma \in E_\gamma'$ et $\|y_\gamma\| \leqslant 1$, on a

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} y_\gamma(h_\gamma(\omega)) = \sum_{\gamma\in D} y_\gamma(h_\gamma(\omega)) \quad \text{presque-partout,}$$

c'est-à-dire que

$$\sum_{\gamma\in\Gamma\setminus D} y_\gamma(h_\gamma(\omega)) = 0 \quad \text{presque-partout.}$$

Il suffit de prouver pour cela que, pour tout $X \in \Sigma$, on a

$$\int_X \sum_{\gamma\in\Gamma\setminus D} y_\gamma(h_\gamma(\omega))\ d\mu(\omega) = 0 .$$

Pour toute partie A de $\Gamma' = \Gamma \setminus D$, posons

$$\lambda(A) = \int_X \sum_{\gamma\in A} y_\gamma(h_\gamma(\omega))\ d\mu(\omega) .$$

On définit ainsi une mesure σ-additive sur l'ensemble Γ' des parties de Γ' . Puisque, pour $\gamma \in \Gamma'$, la fonction h_γ est scalairement équivalente à 0 , on a $\lambda(\{\gamma\}) = 0$. Puisque le cardinal de Γ' n'est pas réel-mesurable, λ est identiquement nulle. Ainsi $\lambda(\Gamma') = 0$.

Puisque chaque E_γ est m. c., pour $\gamma \in D$, soit h''_γ une fonction Bochner-mesurable scalairement équivalente à h'_γ et $h''_\gamma = 0$, pour $\gamma \in D$. La fonction $f = (h''_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est alors Bochner-mesurable et scalairement équivalente à h .

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] EDGAR (G. A.). - Mesurability in a Banach space, II, Indiana J. of Math. (à paraître).

(Texte reçu le 19 juin 1978)

Michel TALAGRAND
Equipe d'Analyse, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05