Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Marc Rogalski

Que sont les facteurs directs des espaces de Banach classiques ?

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 17, n° 1 (1977-1978), exp. n° 13, p. 1-40
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_1_A6_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
17e année, 1977/78, n° 13, 40 p.

16 février 1978

QUE SONT LES FACTEURS DIRECTS DES ESPACES DE BANACH CLASSIQUES ?

par Marc ROGALSKI

PREMIÈRE PARTIE : LES ESPACES DE BANACH AUTRES QUE LES $L^p(\mu)$.

Un théorème de 1930 de BANACH et MAZUR [10] montrant que tout espace de Banach séparable se plonge isométriquement dans $C([0\ ,\ 1])$, on conçoit que l'étude des sous-espaces quelconques de certains espaces de Banach soit sans espoir. On se borne donc ici à l'étude des facteurs directs d'un Banach, c'est-à-dire des sous-espaces images d'une projection continue (par contre, l'étude des sous-espaces quelconques des L^p n'est pas, elle, sans intérêt ; voir par exemple, [28], [20], [74], [29]).

Dès 1960, dans son article "Projections in certain Banach spaces" [107], PELCZYNSKI inaugure les recherches dans cette direction avec l'étude des facteurs directs des espaces c_0 et ℓ^p , $1 \leqslant p \leqslant \infty$. La technique fondamentale, outre la "méthode de décomposition de Pelczynski" introduite à cette occasion, est une utilisation systématique d'un aspect de la théorie des bases, développé deux ans plus tôt dans un article de BESSAGA et PELCZYNSKI [14].

On peut dire que beaucoup des problèmes principaux concernant les facteurs directs des espaces de Banach classiques sont, en gros, résolus actuellement, malgré la présence de certaines questions encore ouvertes : l'étude est, en effet, très avancée pour les espaces c_0 , ℓ^p , $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $C(K)$, $L^p(\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Des efforts commencent à se porter sur des espaces de fonctions analytiques [67], [115], et sur des espaces d'opérateurs, ceux sur les espaces d'Orlicz sont plus anciens [94].

En se limitant aux facteurs directs de dimension infinie, le problème se pose sous trois aspects principaux, avec chaque fois une version isomorphique et une version isométrique, et parfois une version "ordonnée".

1° Etant donné un espace de Banach E , tout facteur direct de dimension infinie de E est-il isomorphe à E ? On dit alors que E est indécomposable ("prime" en anglais).

Version isométrique : Si F est 1-complémenté dans E (c'est-à-dire image d'une projection de norme 1 dans E), F est-il isométrique à E ?

Version "ordonnée" : Si E est ordonné, et si la projection de E sur F est positive, F est-il isomorphe, linéairement et pour l'ordre, à E ?

On peut évidemment combiner les aspects isométrique et ordonné, aussi. Nous ne parlerons pas ici de la version "ordonnée" des problèmes, sauf au II , § 3.

2° Une question plus faible : Si $E = F \oplus G$, l'un des deux espaces F ou G est-il nécessairement isomorphe à E ? On dit alors que E est primaire ("primary" en anglais), et on cherche à déterminer ses facteurs directs qui lui sont isomorphes.

3° Si un type de Banach E n'est pas indécomposable, peut-on du moins caractériser ses facteurs directs par des propriétés intrinsèques ? Ce sera surtout le cas des $L^p(\mu)$, et on s'intéressera en particulier, à la suite de Lindenstrauss et Pelczynski [86], aux caractérisations portant sur les sous-espaces de dimension finie (théorie "locale").

On s'intéresse aussi à savoir si les facteurs directs d'un type d'espace (par exemple les $C(K)$) sont encore du même type.

D'autres questions apparaissent, en liaison avec les précédentes.

4° Certains types d'espaces de Banach contiennent-ils des facteurs directs isomorphes à tel autre type ? Une réponse positive est alors un moyen d'investigation puissant dans la recherche des facteurs directs du premier type considéré.

5° Que dire des espaces de Banach qui sont facteurs directs dans tout espace de Banach qui les contient ? Un tel espace est dit $\mathcal{P}$-espace, ou espace injectif.

6° Que dire d'un espace de Banach dont tout sous-espace (fermé) est facteur direct ? BANACH conjecturait [10] qu'il est alors hilbertisable. Cette conjecture n'a été démontrée qu'en 1971 !

Pour toutes ces questions, outre les articles originaux cités en bibliographie, on peut consulter les livres de DAY [32], de LACEY [78], de LINDENSTRAUSS et TZAFRIRI [94] et de DIESTEL [34], ainsi que les articles de ROSENTHAL [125] et de KADETS et MITYAGIN [67]. On y trouvera tous les aspects de la géométrie des espaces de Banach non cités ici, car sans rapports immédiats avec le problème des facteurs directs. Pour les espaces de fonctions analytiques, que nous ne traiterons pas ici, nous renvoyons à [67] et [115].

NOTA. - Dans la suite, "sous-espace" sous-entend toujours "fermé", et un espace de Banach est toujours supposé de dimension infinie, sauf mention explicite du contraire ; de plus, "opérateur" signifie "opérateur borné", et "boule" signifie "boule fermée".

Nous n'aborderons pas le cas des $L^p(\mu)$, renvoyant pour cela à l'exposé de Michèle CAPON [22].

Plan de la première partie

I. Les espaces de Hilbert. 13-03

II. Les espaces injectifs.

1. Les $\mathcal{P}$-espaces. 13-05
2. Le cas de c_0 : les espaces séparablement injectifs. 13-07
3. Les espaces de Banach réticulés injectifs. 13-08

III. Les espaces c_0 et ℓ^p , $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

1. Les facteurs directs de c_0 et des ℓ^p , $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ 13-09
2. D'autres espaces de suites primaires ; quelques mots sur la théorie des bases et la propriété d'approximation. 13-11
3. Espaces d'Orlicz de suites et espaces de Lorentz de suites. 13-16
4. Espaces de Banach contenant un facteur direct isomorphe à ℓ^1 13-17

IV. Les espaces $C(K)$.

1. La méthode de décomposation de Pelczynski. 13-18
2. Résultats préliminaires sur la structure des espaces $C(K)$ 13-19
3. $C(K)$ comme facteur direct de Banach séparables, et les espaces de Banach universels. 13-21
4. Les facteurs directs de $C([0 , 1])$ 13-23
5. Les facteurs directs 1-complémentés des $C(K)$ 13-24
6. Les espaces $C([1 , \alpha])$, α ordinal. 13-24
7. Autres propriétés des facteurs directs des $C(K)$ 13-25
8. Le problème des hyperplans et le cas des $C(K)$ 13-27

V. Mélanges.

1. Les Banach dont le dual contient un facteur direct isomorphe à $M([0 , 1])$ 13-28
2. Espaces de Banach complémentablement universels. 13-28
3. Facteurs directs et espaces totalement incomparables. 13-29
4. Facteurs directs dans les espaces W. C. G. 13-30
5. Primarité de certains espaces spéciaux. 13-30
6. Facteurs directs et ultraproduits, réflexivité locale. 13-30

VI. Facteurs directs dans les espaces d'opérateurs. 13-32

Bibliographie. 13-33

I. Les espaces de Hilbert.

Commençons par le résultat évoqué ci-dessus, le plus simple, énoncé dans le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - Un espace de Banach dont tout sous-espace est facteur direct est isomorphe à un espace de Hilbert.

Ce résultat de LINDENSTRAUSS et TZAFRIRI [89] s'appuie de façon essentielle sur le théorème de Dvoretzky concernant les sous-espaces de dimension finie presque hilbertiens d'un espace de Banach de dimension infinie (c'est-à-dire les sections presque ellipsoïdales de sa boule unité) [38]. Bien sûr, un Hilbert séparable est indécomposable, un Hilbert non séparable est primaire, mais non indécomposable.

En 1939, KAKUTANI [68] avait déjà démontré la version isométrique de ce théorème.

PROPOSITION 1. - Si tout sous-espace de E est 1-complémenté (c'est-à-dire image d'une projection de norme 1) et si $\dim(E) \geqslant 3$, alors E est isométrique à un Hilbert.

Nous verrons plus loin que les espaces de Hilbert apparaissent d'une certaine façon comme parasites dans l'étude des facteurs directs de certains Banach, par leur trop grande facilité à en être facteur direct , justement. On a, en effet, la proposition suivante.

PROPOSITION 2. – Pour tout espace de Hilbert H , et $\forall\, p$, $1 < p < \infty$, il existe une mesure $\mu \geqslant 0$ et un facteur direct X de $L^p(\mu)$ isomorphe à H .

Dans le cas séparable, on sait que ℓ^2 est facteur direct de $L^p([0\,,\,1])$, $1 < p < \infty$, grâce aux fonctions de Radewacher et aux inégalités de Khintchine [71]. Si on pose $r_n(t) = \operatorname{sgn}[\sin(2^n \pi t)]$, il existe deux constantes A_p et B_p $(1 \leqslant p < \infty)$ telles que , $\forall\, \lambda_1 , \ldots , \lambda_n$, on ait

$$A_p\Big(\sum_1^n |\lambda_i|^2\Big)^{1/2} \leqslant \Big(\int_0^1 \Big|\sum_1^n \lambda_i\, r_i(t)\Big|^p\, dt\Big)^{1/p} \leqslant B_p\Big(\sum_1^n |\lambda_i|^2\Big)^{1/2} .$$

Le sous-espace engendré dans $L^p([0\,,\,1])$ par les r_n est donc isomorphe à ℓ^2 , et si $1 < p < \infty$, on voit aisément qu'il y est facteur direct. Pour le cas général, la méthode la plus simple est d'utiliser les ultraproduits [28] (cf. § V). Compte tenu qu'un espace $L^p(\mu)$, pour $p \neq 2$, n'est pas hilbertisable, on en déduit qu'en général un espace $L^p(\mu)$, $p \neq 1 , 2 , \infty$, n'est pas indécomposable. On voit ainsi que c'est le cas en particulier pour $L^p([0\,,\,1])$.

Plus généralement, depuis les travaux de D. MAHARAM en 1941 [98], on sait que $L^p(\mu)$ est isométrique à $\ell^p(\Delta) \oplus \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} L^p([0\,,\,1]^{m_\gamma})$ (les $\oplus$ sont prises au sens ℓ^p). Si $L^p(\mu)$ n'est pas du type $\ell^p(\Delta)$, $\Gamma \neq \emptyset$, et $L^p([0\,,\,1]^m)$ contient un facteur direct isométrique à $L^p([0\,,\,1])$, qui lui-même contient un facteur direct isomorphe à ℓ^2 $(1 < p < \infty)$. On a donc la proposition suivante.

PROPOSITION 3. – Si μ n'est pas purement discrète, $L^p(\mu)$, pour $p \neq 1 , 2 , \infty$, contient un facteur direct isomorphe à ℓ^2 , et n'est donc pas indécomposable.

Nous préciserons plus loin la situation pour L^1 et L^∞ , et nous verrons que, par contre, les ℓ^p , $1 \leqslant p \leqslant \infty$, sont indécomposables. Le cas de L^2 est trivial.

En contraste avec les propositions précédentes, notons qu'un espace de Hilbert ne peut être facteur direct d'un espace $C(K)$.

PROPOSITION 4. – Tout facteur direct de c_0 ou d'un $C(K)$ (donc de $L^\infty(\mu)$ et de ℓ^∞) isomorphe à un espace de Hilbert est de dimension finie.

Ce résultat, qui a plusieurs démonstrations, dues à GROTHENDIECK [49], PELCZYNSKI [107], ..., sera amélioré plus loin (cf. proposition 27).

II. Les espaces injectifs.

1. Les $\mathcal{P}$-espaces.

Un espace E est dit injectif, ou $\mathcal{P}$-espace, si, pour tout espace de Banach F contenant E (isométriquement), E est image d'une projection continue dans F. On montre alors aisément qu'il existe $\lambda \geqslant 1$ tel que, si $F \supset E$, E est image d'une projection de norme au plus λ. On dit que E est un $\mathcal{P}_\lambda$-espace.

Par exemple, $\ell^\infty(I)$ est un $\mathcal{P}_1$-espace (prolonger les formes coordonnées). Il est facile de voir que E est un $\mathcal{P}_\lambda$-espace si, et seulement si, il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes ("Hahn-Banach pour opérateurs") :

(i) Tout opérateur T défini sur E a une extension $\tilde{T}$ vérifiant $\|\tilde{T}\| \leqslant \lambda \|T\|$;

(ii) Tout opérateur T à valeurs dans E a une extension $\tilde{T}$ vérifiant $\|\tilde{T}\| \leqslant \lambda \|T\|$; (pour (ii), le montrer d'abord pour $\ell^\infty(I)$, puis plonger E dans un tel $\ell^\infty(I)$).

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, "\tilde{T}"] & \\ \cup & \\ E \arrow[r, "T"'] & Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[dr, "\tilde{T}"] & \\ \cup & \\ Z \arrow[r, "T"'] & E \end{tikzcd}$$

On voit aisément, par ailleurs, que tout sous-espace E μ-complémenté (c'est-à-dire image d'une projection de norme μ) dans un $\mathcal{P}_\lambda$-espace F est un $\mathcal{P}_{\lambda\mu}$-espace.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\widetilde{T\circ i}"] & F \arrow[d, shift left, "p"] \\ \cup & \\ Y \arrow[uur, "T\circ i"] \arrow[r, "T"'] & E \arrow[u, shift left, "i"] \end{tikzcd}$$

NACHBIN [103], GOODNER [48] et KELLEY [70] ont montré, en 1951, le théorème suivant.

THÉORÈME 2. - Un espace de Banach est un $\mathcal{P}_1$-espace si, et seulement si, il est isométrique à un espace $C(K)$, où K est un compact stonien.

Ainsi, $L^\infty(\mu)$ est un $\mathcal{P}_1$-espace. LINDENSTRAUSS a montré [81] qu'un $\mathcal{P}_{1+\varepsilon}$-espace, $\forall\ \varepsilon > 0$, est un $\mathcal{P}_1$-espace. Dans [107], PELCZYNSKI montre qu'un $\mathcal{P}$-espace de dimension infinie n'est jamais séparable, car il contient nécessairement un sous-espace isomorphe à c_0 (qui y serait facteur direct d'après le théorème 5 ci-dessous, et c_0 n'est pas un $\mathcal{P}$-espace).

Un $\mathcal{P}_1$-espace possède des propriétés géométriques portant sur les intersections de boules. Une étude systématique de ces propriétés a été faite en 1962 par LINDENSTRAUSS dans [8]. Citons un résultat de NACHBIN [103].

PROPOSITION 5. - E est un $\mathcal{P}_1$-espace si, et seulement si, toute famille de boules de E qui se coupent 2 à 2 a une intersection non vide.

Si E est un $\mathcal{P}_\lambda$-espace, E'' est aussi un $\mathcal{P}_\lambda$-espace, la réciproque étant fausse $(E = c_0)$. Les espaces, dont le bidual est un $\mathcal{P}_\lambda$-espace, ont aussi des propriétés d'extension, mais pour les opérateurs compacts. Quand $\lambda = 1$, ils ont des propriétés d'intersection de boules. On a, par exemple, le résultat suivant, dû à GROTHENDIECK pour la première partie [49] [50] (1955), et à LINDENSTRAUSS [81] (1962) pour la seconde.

THÉORÈME 3. - E'' _est un_ $\mathcal{P}_1$_-espace si, et seulement si,_ E' _est isométrique à un espace_ $L^1(\mu)$, _et aussi si, et seulement si, toute famille de_ 4 _boules de_ E _se coupant 2 à 2 a une intersection non vide_.

PROBLÈME 1. - _Caractériser les_ $\mathcal{P}_\lambda$_-espaces, pour_ $\lambda > 1$. _En particulier, un espace_ $\mathcal{P}_\lambda$ _est-il toujours isomorphe à un_ $\mathcal{P}_1$_-espace, donc à un_ $C(K)$, K _compact stonien_ ?

PROBLÈME 2. - _Caractériser les_ $C(K)$ _injectifs_ (cf. à ce propos [144] et [5]). _En particulier_, K _est-il nécessairement totalement discontinu_ ? [_Si_ $C(K)$ _est un_ $\mathcal{P}_\lambda$ _pour_ $\lambda < 2$, _il est en fait_ $\mathcal{P}_1$ (cf. [58]) ; _il existe des_ $C(K)$ _qui sont_ $\mathcal{P}_\lambda$ _pour_ $\lambda = 1 + 2\rho$, _où_ $\rho \in \{K - \sum_1^K 1/n_i \ ; \ K, n_i \in \mathbb{N}^*\}$, AMIR [5]].

Un résultat remarquable de HAYDON, en 1977 [56], résoud le problème 1, lorsque E est un bidual, positivement (c'était une conjecture de Rosenthal).

THÉORÈME 4. - _Un bidual injectif est isomorphe à un espace_ $\ell^\infty(\Gamma)$.

La démonstration repose sur une technique fine d'ordinaux.

PROBLÈME 3. - _Si_ E'' _est un_ $\mathcal{P}$_-espace de dimension infinie_, E _contient-il un sous-espace isomorphe à_ c_0 ?

Une réponse partielle, et isométrique, est due à ZIPPIN [145].

PROPOSITION 6. - _Si_ E'' _est un_ $\mathcal{P}_1$_-espace_, E _contient un sous-espace isométrique à_ c_0 . _Si, de plus_, E _est séparable, on peut choisir ce sous-espace_ 1-_complémenté_.

Une manière d'aborder le problème 3 pourrait consister à utiliser le théorème de Haydon. On savait déjà (cf. ROSENTHAL [121], [122]) qu'un espace injectif contient un sous-espace isomorphe à ℓ^∞ . C'est donc le cas pour E'' . Donc, comme on le verra plus loin, E' contient un facteur direct isomorphe à ℓ^1 . Malheureusement, plusieurs contre-exemples montrent que ceci n'entraine pas nécessairement que E contienne un sous-espace isomorphe à c_0 (cf. HAGLER [53] ou FAKHOURY [44])... Mais en utilisant le fait que $E'' \sim \ell^\infty(\Gamma)$, et non seulement $E'' \supseteq \ell^\infty$ ...

L'origine du problème 3 est la suivante. LINDENSTRAUSS montre dans [81] que, si un espace E a la propriété d'extension des opérateurs faiblement compacts à valeurs dans E , alors E'' est un $\mathcal{P}$-espace, et E ne peut contenir un sous-espace isomorphe à c_0 . Il se pose alors le problème suivant.

PROBLÈME 4. - Un tel espace E est-il nécessairement de dimension finie ?

Il est clair qu'une réponse positive au problème 3 entraine une réponse positive au problème 4.

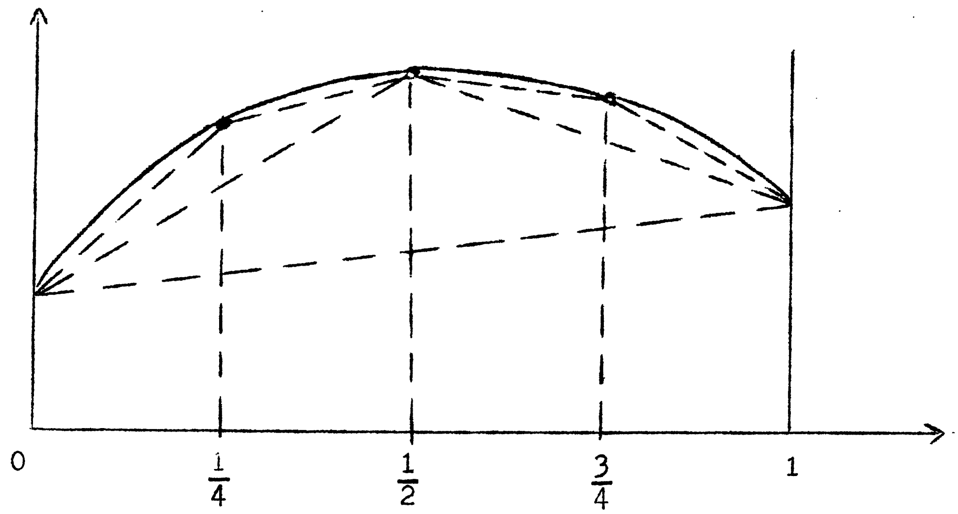
LINDENSTRAUSS a introduit dans [81] une classe d'espaces plus large que les $\mathcal{P}_\lambda$. Un espace E est un $\mathcal{N}_\lambda$-espace s'il contient une famille filtrante croissante de sous-espaces de dimensions finies $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$, chacun d'eux étant un $\mathcal{P}_\lambda$-espace, et E vérifiant l'égalité $E = \overline{\bigcup_{\alpha\in A} F_\alpha}$. Citons, comme exemple de $\mathcal{N}_\lambda$-espaces, ceux de la proposition suivante.

PROPOSITION 7.

1° Tout $C(K)$ est un $\mathcal{N}_\lambda$-espace, $\forall \lambda > 1$;

2° $C([0\ ,\ 1])$ est un $\mathcal{N}_1$-espace.

Pour montrer le point 2°, on utilise la base de Schauder usuelle de $C([0\ ,\ 1])$, formée de fonctions triangles (pour les bases, voir plus loin § III, 2).



LINDENSTRAUSS demandait, en 1962, si un $\mathcal{N}_\lambda$-espace n'est pas toujours isomorphe à un $C(K)$. Il n'en est rien. Un exemple construit en 1971 par BENYAMINI et LINDENSTRAUSS [12] consiste en un espace E de dual isométrique à ℓ^1, et qui n'est pas isomorphe à un facteur direct d'un $C(K)$. Un tel espace est un espace $\mathcal{L}^\infty$, dont nous verrons plus loin que ce sont des $\mathcal{N}_\lambda$-espaces.

2. Le cas de c_0 : les espaces séparablement injectifs.

L'espace c_0 jouit d'une propriété analogue à celle des espaces injectifs, mais pour les espaces séparables. SOBCZYK a en effet montré en 1941 [130] le théorème suivant.

THÉORÈME 5. - Tout sous-espace isométrique à c_0 d'un Banach séparable E est image d'une projection de norme 2 dans E.

On ne peut d'ailleurs améliorer le nombre 2 (considérer c_0 dans $C(\underset{\sim}{N}_\infty)$). On trouve des démonstrations très simples de ce résultat dans [107] ou dans [141]. Montrons, par exemple, comment on peut en déduire un résultat d'extension.

COROLLAIRE 1. - *Soient* $E \subset F$, F *étant un Banach séparable,* et $T : E \longrightarrow c_0$. *Alors, il existe un prolongement* $\tilde{T}$ *de* T *à* F , *qui vérifie* $\|\tilde{T}\| \leqslant 2\,\|T\|$.

T se prolonge en S de même norme de F dans $\ell^\infty \supset c_0$, et d'image $S(F)$ séparable. Il existe un projecteur P de norme 2 de $V = \overline{S(F)}$ sur c_0 , et $\tilde{T} = P \circ S$ convient.

$$\begin{tikzcd}
 & \ell^\infty \\
F \arrow[r, "S"] \arrow[dr, "\tilde{T}"'] & V = \overline{S(F)} \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[d, bend left, "p"] \\
E \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "T"'] & c_0 \arrow[u, phantom, "\cup"]
\end{tikzcd}$$

Plus généralement, on dira qu'un espace séparable E est *un* $\mathcal{P}'_\lambda$*-espace* si, pour tout Banach *séparable* F contenant E , il existe une projection P de norme au plus λ de F sur E . Les deux propriétés d'extension correspondantes, pour opérateurs entre espaces séparables, sont équivalentes à cette définition. On définit un $\mathcal{P}'$-espace en ne spécifiant pas de borne pour la norme du projecteur, et on voit aisément qu'un $\mathcal{P}'$-espace est un $\mathcal{P}'_\lambda$-espace pour un certain $\lambda \geqslant 1$.

On s'est longtemps demandé si tout $\mathcal{P}'$-espace était isomorphe à c_0 . AMIR dans [5] le montre en 1964 pour les $\mathcal{P}'$-espaces qui sont des $C(K)$. De plus, on sait depuis les travaux de LEWIS et STEGALL [80] en 1972 que le dual d'un $\mathcal{P}'$-espace E est isomorphe à ℓ^1 , car son dual est séparable, sinon, d'après un résultat de ROSENTHAL [123] que nous verrons plus loin, E serait isomorphe à $C([0\,,1])$, ce qui contredirait le résultat d'AMIR. Enfin, tout récemment, ZIPPIN [146] a montré le théorème suivant.

THÉORÈME 6. - *Tout* $\mathcal{P}'$*-espace est isomorphe à* c_0 .

PROBLÈME 5. - *Existe-t-il des* $\mathcal{P}'_\lambda$*-espaces, pour* $1 < \lambda < 2$, *qui soient de dimension infinie* ?

On sait qu'il n'y a pas d'espace $\mathcal{P}'_1$ de dimension infinie, car alors un tel espace vérifierait la propriété d'intersection des boules de la proposition 5 (on utilise seulement le fait que E est 1-complémenté dans $E \times \mathbb{R}$), danc serait un $\mathcal{P}_1$-espace, et ne pourrait être séparable.

3. Les espaces de Banach réticulés injectifs.

Un espace de Banach *réticulé* E est injectif (sous-entendu, dans la catégorie des Banach réticulés) si, $\forall\, T : F \longrightarrow E$ *positif*, et $\forall\, G \supset F$ (F , G Banach réticulés), il existe $\tilde{T} : G \longrightarrow E$, *positif*, prolongeant T , et *de même norme*.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, "\tilde{T}"] & \\
F \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "T"'] & E
\end{tikzcd}$$

Il est équivalent de dire que si $F \supseteq E$, E est image d'une projection positive de norme 1 dans F ; de même la propriété d'extension des opérateurs positifs définis sur E est équivalente.

Ces espaces ont été introduits en 1975 par LOTZ [97], et étudiés par CARTWRIGHT [23], puis par HAYDON [55].

Enonçons, pour un Banach réticulé, les propriétés suivantes :

(C) : si x_1 , x_2 , y sont $\geqslant 0$ et vérifient $\|x_i\| \leqslant r_i$, $\|x_1 + x_2 + y\| \leqslant r_1 + r_2$, alors il existe y_1 , $y_2 \geqslant 0$, tels que $y = y_1 + y_2$ et $\|x_i + y_i\| \leqslant r_i$.

(P) : E est image d'une projection positive de norme 1 dans E'' .

(Q) : Tout ensemble filtrant croissant dans la boule unité de E possède une borne supérieure dans E , qui appartient à cette boule.

On peut alors énoncer le théorème suivant, dû à CARTWRIGHT et HAYDON.

THÉORÈME 7. - Soit E un espace de Banach réticulé.

1° E est injectif si, et seulement si, il vérifie (C) et (P) ;

2° E vérifie (C) si, et seulement si, E'' est injectif ;

3° si E vérifie (C) et (Q), il est injectif.

PROBLEME 6. - A-t-on l'implication (Q) $\Longrightarrow$ (P) ? (la réciproque est vraie).

Citons, comme exemples de Banach réticulés injectifs (cf. [97], [23]), les $C(K)$ où K est compact stonien (donc les $L^\infty(\mu)$), les espaces $L^1(\mu)$, et les espaces $\mathfrak{L}[E , C(K)]$, où E' est un Banach réticulé injectif et K est stonien (par exemple, $\mathfrak{L}(c_0 , \ell^\infty)$). Pour terminer, on peut remarquer que certains Banach réticulés injectifs sont très simples (cf. [55]).

PROPOSITION 8.

1° Un Banach réticulé séparable est un produit fini (pour la norme $\| \ \|_\infty$) d'espaces $L^1(\mu_i)$.

2° Un Banach réticulé injectif réflexif est de dimension finie.

III. Les espaces c_0 et ℓ^p , $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

1. Les facteurs directs de c_0 et des ℓ^p , $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Pour ces espaces, la situation isomorphique est assez simple. On a en effet le théorème suivant.

THÉORÈME 8. - Les espaces c_0 et ℓ^p , $1 \leqslant p \leqslant \infty$ sont indécomposables (au sens isomorphique).

Pour c_0 et les ℓ^p , $1 \leqslant p < \infty$, ce résultat est dû à PELCZYNSKI en 1960 [107]. Le cas de ℓ^∞ est plus difficile, par suite de l'absence de base. Il a été résolu en 1967 par LINDENSTRAUSS [82] (rappelons qu'un vieux résultat de PHILLIPS dit que c_0 n'est pas facteur direct de ℓ^∞).

On ignore s'il y a d'autres espaces indécomposables.

PROBLÈME 7. - Tout espace de Banach indécomposable est-il isomorphe à c_0 ou à un ℓ^p ?

Pour c_0 et les ℓ^p , $1 \leqslant p < \infty$, PELCZYNSKI montre en fait un résultat meilleur et plus utile, de type presque-isométrique, en utilisant des techniques de la théorie des bases.

PROPOSITION 9. - Si E est c_0 ou ℓ^p , $1 \leqslant p < \infty$, soit F un sous-espace de dimension infinie de E . Alors, $\forall\, \varepsilon > 0$, et $\forall$ entier m , $1 \leqslant m \leqslant +\infty$, $\exists\, G \subset F$, vérifiant

(a) $d(G\, ,\, \ell^p_m) \leqslant 1 + \varepsilon$ [ou $d(G\, ,\, c_{0,m}) \leqslant 1 + \varepsilon$],

(b) G est image d'une projection dans E de norme au plus $1 + \varepsilon$.

Dans cet exposé, ℓ^p_m désigne l'espace classique de dimension $m \leqslant +\infty$, et de même pour $c_{0,m}$. Rappelons que la distance $d(E\, ,\, F)$ de 2 espaces de Banach isomorphes est définie par $d(E\, ,\, F) = \mathrm{Inf}\{\|T\|.\|T^{-1}\|\ ;\ T$ isomorphisme de E sur $F\}$ (Banach [10] savait déjà que tout sous-espace de dimension infinie de ℓ^p contient un sous-espace isomorphe à ℓ^p).

PROBLÈME 8. - Si I n'est pas dénombrable, $c_0(I)$ et $\ell^p(I)$ sont-ils primaires ? (ils ne sont évidemment pas indécomposables), ou même mieux : Tout facteur direct de $c_0(I)$ [respectivement $\ell^p(I)$] est-il isomorphe à un $c_0(J)$ [respectivement $\ell^p(J)$] ?

Pour $p = 1$, KÖTHE a donné en 1966 une réponse affirmative [73], mais sa méthode semble ne s'appliquer que dans le cas $p = 1$.

Pour $p = \infty$, l'affirmation forte est fausse. $L^\infty([0\, ,\, 1]^{2^c})$ est facteur direct dans un $\ell^\infty(I)$, mais isomorphe à aucun $\ell^\infty(\Gamma)$.

Pour les espaces ℓ^p il existe une réciproque "isométrique" au théorème 8 [107].

PROPOSITION 10. - Soit E un sous-espace de ℓ^p , $1 \leqslant p \leqslant \infty$, isométrique à ℓ^p . Alors, E est 1-complémenté dans ℓ^p . Soit E un sous-espace de c_0 , isométrique à c_0 . Alors, E est 1-complémenté dans c_0 .

Le cas de c_0 ne figure pas dans [107]. En voici une démonstration, suggérée par FARAHAT. Si $T : c_0 \xrightarrow[\sim]{1} E \subset c_0$, posons $u_n = T(\ell_n)$, et soit $\varphi_n \in \ell^1$ tel que $\|\varphi_n\| = 1$ et $\varphi_n(u_n) = 1$. Alors $\varphi_n(u_p) = \delta^p_n$, et les φ_n sont à supports disjoints, donc $\varphi_n \longrightarrow 0$ dans $\sigma(\ell^1\, ,\, c_0)$ [calculer $\varphi_n(\pm u_n \pm u_p)$ et $(\varphi_n \pm \varphi_p)(u_n \pm u_p)$]. Alors $P(x) = \sum \varphi_n(x).u_n$ est une projection $c_0 \longrightarrow E$ de norme 1 .

Pour c_0 , ℓ^∞ , ℓ^2 , on a une réciproque isomorphique [107].

PROPOSITION 11. - Soit E l'un des espaces c_0 , ℓ^∞ ou ℓ^2 . Tout sous-espace de E , isomorphe à E , est facteur direct dans E .

Cette réciproque est fausse pour les ℓ^p , pour p différent de 1 et 2 ([118], [120], [13]).

PROPOSITION 12. - Si $1 < p < 2$ ou $2 < p < \infty$, il existe dans ℓ^p un sous-espace isomorphe à ℓ^p et non facteur direct dans ℓ^p .

Pour $1 < p < 4/3$ et $p > 2$, le résultat est de ROSENTHAL [118], [120]. Pour $4/3 \leq p < 2$, il est de BENNET, DOR, GOODMAN, JOHNSON et NEWMAN, qui donnent une démonstration pour $1 < p < 2$ dans [13].

PROBLÈME 9. - Tout sous-espace de ℓ^1 isomorphe à ℓ^1 est-il facteur direct dans ℓ^1 ?

Pour d'autres problèmes concernant la proposition 12, voir ce qui concerne les espaces $L^p(\mu)$.

Remarque. - Jusqu'en 1972, on n'avait pas d'exemples de sous-espaces de ℓ^p , pour $2 < p < \infty$, non isomorphes à ℓ^p ! KWAPIEN [76] et DAVIE [30] en construisent à propos du contre-exemple d'Enflo à la propriété d'approximation, pour $2 < p < \infty$. Pour $1 < p < 2$, LINDENSRAUSS en donne dans [94], où il donne aussi une infinité de sous-espaces de ℓ^1 2 à 2 non isomorphes (ce sont d'ailleurs des espaces $\mathcal{L}^1$ (cf. aussi [83]). Par ailleurs, pour $1 \leq p < 2$, PELCZYNSKI connaissait déjà en 1960 une infinité de sous-espaces non isomorphes de ℓ^p , et de même pour c_0).

2. D'autres espaces de suites primaires ; quelques mots sur la théorie des bases et la propriété d'approximation.

Dans [4], ALSPACH, ENFLO et ODELL montrent la proposition suivante.

PROPOSITION 13. - Si $1 \leq r , p < \infty$, $\ell^p(\ell^r) = (\ell^r \oplus \ell^r \oplus \dots)_p$ est primaire.

Ils le montrent pour $r = 2$, mais M. CAPON a remarqué que leur méthode donne aussi le cas général.

Ce résultat est étendu à $r = +\infty$ par CASAZZA, KOTTMAN et LIN, qui montrent, en 1976, dans [25], le résultat suivant.

PROPOSITION 14.

1° $\ell^p(\ell^\infty) = (\ell^\infty \oplus \ell^\infty \oplus \dots)_{\ell^p}$ est primaire, si $1 \leq p < \infty$.

2° Soit E un espace de Banach avec une base symétrique, et qui n'est pas isomorphe à ℓ^1 . Alors $c_0(E) = (E \oplus E \oplus \dots)_{c_0}$ et $\ell^p(E) = (E \oplus E \oplus \dots)_{\ell^p}$, pour $1 < p < \infty$, sont primaires.

Cela donne comme exemple $c_0(\ell^p)$ et $\ell^p(c_0)$ $(1 < p < \infty)$.

Bases. - Il est sans doute temps de dire un mot des bases. La théorie des bases est certainement l'outil principal dans l'étude des espaces de Banach classiques.

Définitions.

1° Une suite $(x_n)_n$ dans un espace de Banach E est une base (de Schauder) si tout $x \in E$ s'écrit $x = \sum a_n x_n$, de façon unique. On montre alors que $x \longmapsto a_n$ est un élément x_n^* de E', et que les projections P_n de E sur $[x_1, \dots, x_n]$, espace engendré par $x_1, \dots, x_n$, vérifient $P_n \circ P_m = P_n$ si $n \leq m$, et $\sup_n \|P_n\| = M < \infty$ (M est la "constante de base").

2° Des bases $(x_n)_n$ de E et $(y_n)_n$ de F sont dites équivalentes si, $\forall (a_n)_n$, on a l'équivalence :

$$\sum a_n x_n \text{ converge} \iff a_n y_n \text{ converge.}$$

L'application $T : E \longrightarrow F : \sum a_n x_n \longmapsto \sum a_n y_n$ est alors un isomorphisme.

3° Une suite $(x_n)_n$ dans E est basique si c'est une base de Schauder de l'espace $[(x_n)_n]$ qu'elle engendre. On définit comme ci-dessus l'équivalence de 2 suites basiques $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$, et si elles sont équivalentes, $[(x_n)_n]$ et $[(y_n)_n]$ sont isomorphes.

4° Suite équivalente à une base : la suite $(x_n)_n$ de E est équivalente à la base $(y_n)_n$ de F si $\exists K > 0$ tel que $\forall J$ fini $\subset \mathbb{N}$ on ait,

$$\forall (a_i)_{i\in J}, \quad \frac{1}{K} \|\textstyle\sum_{i\in J} a_i y_i\|_F \leqslant \|\sum_{i\in J} a_i x_i\|_E \leqslant K \|\sum_{i\in J} a_i y_i\|_F .$$

Alors $[(x_n)_n]$ est isomorphe à F, et $(x_n)_n$ est une suite basique.

5° Suite équivalente à une suite basique : même définition, en utilisant $[(y_n)_n]$ au lieu de F.

Le lemme suivant, dû à BESSAGA et PELCZYNSKI en 1958 [14], est l'un des outils principaux pour construire des isomorphismes et prouver que certains sous-espaces sont facteurs directs. Il sert, en particulier, de façon fondamentale dans le théorème 8 et la proposition 9.

LEMME 1. - Soit E un espace de Banach, $(x_n)_n$ une suite basique dans E, et $(y_n)_n$ une autre suite de E vérifiant

$$\sum \|x_n^*\| \|x_n - y_n\| < \delta .$$

(1) Si $0 < (1 + \delta)/(1 - \delta) < \lambda$, $(y_n)_n$ est une suite basique équivalente à $(x_n)_n$, et l'application

$$T : [(x_n)_n] \longrightarrow [(y_n)_n] : \sum a_n x_n \longmapsto \sum a_n y_n$$

vérifie $\|T\| \|T^{-1}\| \leqslant \lambda$.

(2) Si de plus $[(x_n)_n]$ est image d'une projection P, et si

$$0 < (1 + \delta\|P\|)/(1 - \delta\|P\|) < \lambda ,$$

<u>alors</u> $[(y_n)_n]$ <u>est</u> $\lambda\|P\|$<u>-complémenté dans</u> E .

Autrement dit, si on pertube peu une suite basique, on modifie peu la situation. Pour toutes les questions élémentaires sur les bases, on peut consulter [94] et [78].

Une base $(x_n)_n$ de E est dite <u>inconditionnelle</u> si toute série convergente $\sum_n a_n x_n$ est en fait <u>inconditionnellement convergente</u>, c'est-à-dire, pour toute permutation σ des entiers, $\sum_n a_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)}$ converge.

PROBLÈME 10. - <u>Un facteur direct d'un espace</u> E <u>qui a une base inconditonnelle en a-t-il une aussi</u> ?

On sait, depuis BANACH, que tout espace de Banach contient une suite basique, et que tout Banach séparable est isométr ue à un sous-espace d'un espace qui a une base de Schauder, à savoir $C([0,1])$. Mais $C([0,1])$ n'a pas de base inconditionnelle. On voit aisément que $(\exp inx)$, $n = 0,\pm1,\pm2,\ldots$ est une base inconditionnelle de $L^2([-\pi,\pi])$. Par contre, $(|x|^{-\alpha}(\exp inx))$, $n = 0,\pm1,\pm2,\ldots$ est une base de Schauder de ce même espace, pour $0<\alpha<1/2$, qui n'est pas inconditionnelle.

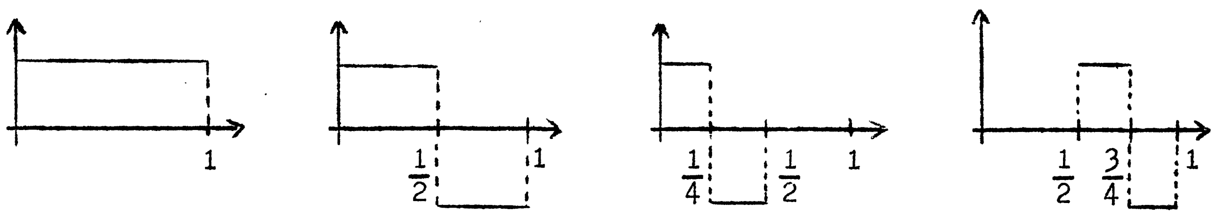
<u>Exemples</u>.

1° Les bases $x_n = (\delta_n^q)_q$ de c_0 et ℓ^p sont inconditionnelles $(1 \leq p < \infty)$.

2° La base de Haar de L^p est inconditonnelle si $1 < p < \infty$. On la définit ainsi :

$$f_1 = 1_{[0,1]}\ ,\quad f_{2^K+\ell} = 1_{\left[\frac{2\ell-2}{2^{K+1}},\frac{2\ell-1}{2^{K+1}}\right]} - 1_{\left[\frac{2\ell-1}{2^{K+1}},\frac{2\ell}{2^{K+1}}\right]}\ ,$$

$\ell = 1 , 2 , \ldots , 2^K$, $K = 0 , 1 , 2 , \ldots$



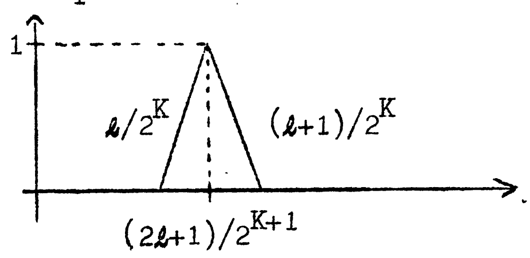
f_1 f_2 f_3 f_4

(la démonstration que cette base est inconditionnelle si $1 < p < \infty$ a été donnée par PALEY en 1932, dans [105]. Elle est difficile, voir aussi à ce propos [99]).

3° Cette même base pour L^1 n'est pas inconditionnelle. D'ailleurs L^1 n'a aucune base inconditionnelle (cf. PELCZYNSKI [107]).

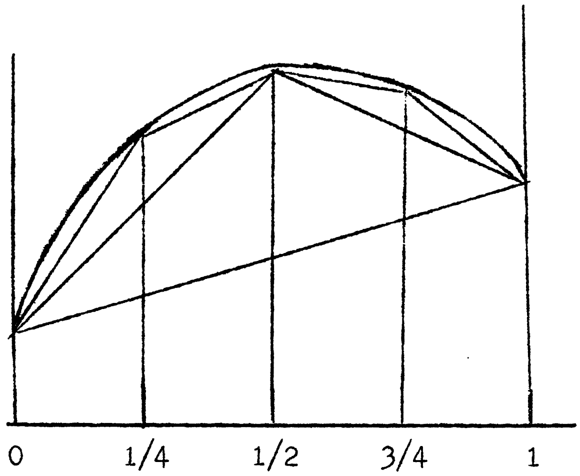
4° Les fonctions $u_0(t) = t$, $u_1(t) = 1 - t$, et

$u_{K,\ell} =$



forment une base de Schauder de $C(0,1)$ $(K=0,1,\ldots, 0<\ell<2^K)$ (mais, omme nous l'avons signalé, $C([0,1])$ n'a pas de base inconditionnelle, cf. DAY [32]). On voit aisément que l'on a

$$f = f(1)u_0 + f(0)u_1 + \sum_{K\geq 0}\ \sum_{0\leq \ell<2^K} \{f(\tfrac{2\ell+1}{2^{K+1}}) - \tfrac{1}{2}[f(\tfrac{\ell}{2^K}) + f(\tfrac{\ell+1}{2^K})]\}u_{K,\ell}$$



5° $(\exp inx)_{n=0,\pm1,\pm2,\ldots}$ est une base de Schauder de $L^p([0, 2\pi])$, pour $1<p<\infty$ [147], non inconditionnelle si $p \neq 2$.

Un problème fameux de Banach était : tout Banach séparable E a-t-il une base ? L'existence d'une telle base implique pour E de posséder la propriété d'approximation bornée, dont GROTHENDIECK demandait si tout Banach séparable la possède. ENFLO a répondu négativement en 1972 à ces 2 questions, dans [40].

La propriété d'approximation. - Un espace de Banach E a la propriété d'approximation ("P. A.") si, pour tout compact $K \subset E$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un opérateur T dans E, de rang fini, tel que $\|Tx - x\| < \varepsilon$, pour tout x de K. Il a la propriété d'approximation bornée ("P. A. B.") si, de plus, on peut choisir $\|T\| \leqslant \lambda$ pour un λ indépendant de K et de ε.

GROTHENDIECK a étudié en détail la P. A. dans [50]. Une des formes équivalentes à la P. A. est : Tout opérateur compact à valeurs dans E est limite, en norme d'opérateurs, d'une suite d'opérateurs de rangs finis.

Si E a une base de Schauder $(x_n)_n$, il a la propriété d'approximation bornée. Soit, en effet, P_n la projection sur $[x_1, \ldots, x_n]$, et soit K compact $\subset E$ et $\varepsilon > 0$. Il existe n tel que $d(x_1[x_1, \ldots, x_n]) < \varepsilon/2M$, où $\|P_n\| \leqslant M$, $\forall x \in K$. Alors si $x \in K$, soit $y_x \in [x_1, \ldots, x_n]$ tel que $\|x - y_x\| < \varepsilon/2M$. On a les inégalités

$$\|x - P_n x\| \leqslant \|x - y_x\| + \|P_n(y_x - x)\| < \varepsilon .$$

En 1972, ENFLO a construit dans c_0 un sous-espace qui n'a pas la propriété d'approximation [40]. Puis, KWAPIEN [76] et DAVIE [30] en construisent aussi dans ℓ^p, pour $2<p<\infty$. De tels sous-espaces ont été aussi construits dans des espaces d'Orlicz (voir ultérieurement). Tout récemment, des exemples analogues ont été donnés dans ℓ^p, pour $1 \leqslant p < 2$ [135]. Tous ces espaces n'ont évidemment pas de base.

FIEGEL et JOHNSON ont construit en 1972 un exemple d'espace de Banach qui a la propriété d'approximation, mais non la propriété d'approximation bornée, et qui n'a donc pas non plus de base de Schaüder.

PROBLÈME 11. - Si E est séparable et possède la P. A. B., a-t-il nécessairement une base de Schauder ?

Pour des espaces simples, tels que l'algèbre du disque $A(\underset{\sim}{D})$, ou des sous-espaces de ℓ^p de la forme $(B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus \ldots)_p$, avec $\dim(B_n) < \infty$, on ignorait en 1972 s'ils avaient une base, bien qu'ils aient la P. A. Par exemple, $A(\underset{\sim}{D})$ a la P. A. B., car si $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$, la somme de Césaro

$$(S_n f)(z) = \frac{1}{n+1} \sum_{q=0}^{n} (\sum_{q=0}^{p} a_q z^q)$$

converge uniformément vers f, et $\|S_n f\| \leqslant \|f\|$ (plus généralement, si $\exists (T_n)$ de rangs finis dans E, $T_n \longrightarrow I$ simplement, alors E a la P. A. B. : théorèmes de Banach-Steinhaus et Ascoli) (on sait maintenant que $A(\underset{\sim}{D})$ a une base, voir [19], [16]).

Un résultat partiel dans la direction du problème est dû à JOHNSON, ROSENTHAL et ZIPPIN [62], et indépendemment à PELCZYNSKI [114], la version "réflexive" étant due à JOHNSON [60].

THÉORÈME 9. - Un espace de Banach séparable [réflexif] a la propriété d'approximation bornée si, et seulement si, il est isomorphe à un facteur direct d'un espace [réflexif] qui a une base de Schauder.

KADEC [66], a par ailleurs, construit un Banach séparable E_0 dont tout Banach qui a la P. A. B. est facteur direct (cf. paragraphe V). Signalons enfin le tout récent et remarquable résultat de SZANKOWSKI [136] : L'espace $B(H)$ des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert n'a pas la propriété d'approximation.

Bases symétriques. - Donnons pour terminer ce paragraphe la notion de base symétrique introduite dans la proposition 14. Une base $(x_n)_n$ de E est symétrique si, pour toute permutation σ de $\underset{\sim}{N}$, elle est équivalente à la base $(x_{\sigma(n)})_n$. Une telle base est nécessairement inconditionnelle. Bien sûr, les bases $x_n = (\delta_n^p)_p$ de c_0 et ℓ^p $(1 \leqslant p < \infty)$ sont symétriques. Dans ces espaces, toute base symétrique est équivalente à celle-là (cf. [94]).

Terminons par le résultat suivant de LINDENSTRAUSS [84], SZANKOWSKI [134] et DAVIS [31].

THÉORÈME 10. - Tout espace de Banach [réfexif, uniformément convexe, super réfléxif] qui a une base inconditionnelle est isomorphe à un facteur direct d'un espace de Banach [réflexif, uniformément convexe, super réflexif] qui a une base symétrique.

D'autres espaces de suites intéressants ayant des bases symétrqiues sont les espaces d'Orlicz de suites et les espaces de Lorentz de suites.

3. Espaces d'Orlicz de suites et espaces de Lorentz de suites.

(a) Espaces de Lorentz de suites. - Ces espaces ont été introduits [96] à l'occasion de problèmes d'analyse harmonique et de théorie de l'interpolation, en 1950.

Soit $w = (w_n)_n$ une suite ≥ 0, décroissante, tendant vers 0, telle que $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = +\infty$, et soit $p \geq 1$ $(p < \infty)$. L'espace de Lorentz de suites $d(w, p)$ est l'espace des suites $(a_n)_n$ telles que

$$\sup\{\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|^p w_n ;\ \sigma \text{ permutation de } \underset{\sim}{N}\} < \infty ,$$

muni de la norme

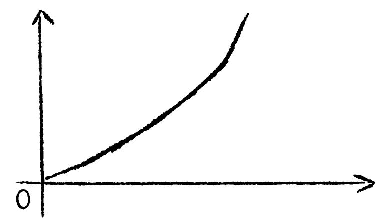
$$\|(a_n)_n\| = (\sup_\sigma \sum_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|^p w_n)^{1/p} .$$

C'est un espace de Banach, et il est réflexif si, et seulement si, $1 < p < \infty$. On en trouvera uue étude détaillée dans [46], [47], [1]. Il n'est pas isomorphe à ℓ^p. On montre que sa base naturelle $(e_n)_n$ est symétrique, et que c'est la seule, à équivalence près, à être symétrique.

LINDENSTRAUSS et TZAFRIRI ont montré dans [90], [91] le résultat suivant, qui concerne notre propos.

PROPOSITION 15. - Tout sous-espace E de dimension infinie dans $d(w, p)$ contient un sous-espace F isomorphe à ℓ^p, et si E a une base symétrique, on peut prendre F complémenté dans E. En particulier, $d(w, p)$ contient un sous-espace facteur direct isomorphe à ℓ^p.

(b) Espaces d'Orlicz de suites. - Ces espaces ont été introduits en 1930 par ORLICZ [104]. Une fonction d'Orlicz est une fonction $x \longmapsto M(x)$ sur $[0, +\infty[$, continue, croissante, convexe, strictement positive pour $x > 0$, vérifiant $M(0) = 0$ et $M(\infty) = \infty$



On suppose qu'elle vérifie la "condition Δ_2" en 0 :

$$\lim\sup_{x \to 0} \frac{M(2x)}{M(x)} < \infty .$$

On appelle espace d'Orlicz de suites ℓ_M l'espace des suites $(a_n)_n$ telles que $\sum_1^{\infty} M(|a_n|/t) < \infty$, pour un $t > 0$ (c'est alors vrai, $\forall\, t > 0$), muni de la norme

$$\|(a_n)\| = \inf\{t > 0 ;\ \sum_{n=1}^{\infty} M(|a_n|/t) \leq 1\} .$$

C'est un espace de Banach séparable, et sa base naturelle $(e_n)_n$ est symétrique.

En fait, l'espace ℓ_M et sa norme, à équivalence près, sont définis par le comportement de M au voisinage de 0, si bien qu'on peut toujours supposer que $M(1) = 1$ et que M est de classe C^1. Précisément, on a :

$$\ell_{M_1} = \ell_{M_2} \iff \exists\, K > 0 \text{ et } x_0 > 0 \text{ tels que } \frac{1}{K} M_2(x) \leqslant M_1(x) \leqslant K M_2(x) \quad \text{sur }]0\,,\, x_0[$$

(M_1 et M_2 sont <u>équivalentes</u>).

<u>Exemple</u>. - $F(x) = x^p|\log x|^\alpha$, $1 < p < \infty$, $\alpha > 0$, est une fonction d'Orlicz sur $[0\,,\, x_0]$, pour un x_0 de $]0\,,\,1[$, et il suffit de la prolonger sur $[x_0, \infty[$.

On montre que ℓ_F <u>contient un facteur direct isomorphe</u> à ℓ^p, et que, avec ℓ_F lui-même, ℓ^p est le seul espace d'Orlicz de suites isomorphe à un sous-espace de ℓ_F.

Les espaces ℓ_M ont été étudiés en détail par LINDENSTRAUSS et TZAFRIRI dans [90], [91], [92]. Leur intérêt, pour notre propos, provient de la proposition suivante.

PROPOSITION 16.

1° <u>Il existe un espace</u> ℓ_{M_0} <u>qui ne contient aucun facteur direct isomorphe à un</u> ℓ^p, $1 \leqslant p < \infty$.

2° <u>Soient</u> M <u>et</u> N <u>deux fonctions d'Orlicz. Si</u> N <u>est équivalente à une fonction de l'adhérence dans</u> $C([0\,,\,1])$ (<u>en norme</u>) <u>de l'ensemble des fonctions</u> $M_\lambda : x \longmapsto M(\lambda x)/M(\lambda)$, <u>pour</u> $0 < \lambda \leqslant 1$, <u>alors</u> ℓ_N <u>est isomorphe à un facteur direct de</u> ℓ_M.

PROBLÈME 12. - <u>La réciproque de l'assertion</u> 2° <u>de cette proposition est-elle vraie</u> ?

Un autre interêt des espaces d'Orlicz, à propos des facteurs directs, est que certains de ces espaces semblent être de bons candidats pour être indécomposables, c'est-à-dire donner une réponse négative au problème 7. On consultera à ce propos [94].

4. Espaces de Banach contenant un facteur direct isomorphe à ℓ^1.

Le résultat essentiel de ca paragraphe caractérise ces espaces par plusieurs propriétés.

THÉORÈME 11. - <u>Soit</u> E <u>un espace de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

1° E <u>contient un facteur direct isomorphe à</u> ℓ^1 ;

2° ℓ^1 <u>est un quotient de</u> E ;

3° E' <u>contient un sous-espace isomorphe à</u> c_0 ;

4° E' contient un sous-espace isomorphe à ℓ^∞ ;

5° Il existe un opérateur non compact de E dans ℓ^1 ;

6° Il existe un opérateur non faiblement compact de ℓ^∞ dans E' ;

7° Il existe une suite $(\ell_n)_n$ de E' sscalairement sommable

$$(\Sigma_n |\ell_n(x)| < \infty , \quad \forall\, x \in E)$$

mais ne convergeant pas en norme vers 0 ;

8° Il existe une suite $(\ell_n)_n$ de E' scalairement sommable, telle que la série $\Sigma\, \ell_n$ ne converge pas en norme.

On montre 1° $\Longrightarrow$ 2° $\Longrightarrow$ 4° $\Longrightarrow$ 7° $\Longrightarrow$ 8° $\Longrightarrow$ 5° $\Longrightarrow$ 6° $\Longrightarrow$ 3° $\Longrightarrow$ 1° .

Seules les implications 3° $\Longrightarrow$ 1° et 6° $\Longrightarrow$ 3° sont difficiles. La première, qui se fait par des techniques de la théorie des bases, est due à BESSAGA et PELCZYNSKI [14], la seconde est due à PELCZYNSKI [107].

Nous verrons plus loin qu'un espace C(K) ne vérifie aucune de ces propriétés, et, en particulier, ne contient pas de facteur direct isomorphe à ℓ^1 . Nous verrons aussi plus tard à quelle condition un sous-espace de L^1 contient un facteur direct isomorphe à ℓ^1 .

Remarque. - Comme nous l'avons signalé après le problème 3, E' peut posséder un facteur direct isomorphe à ℓ^1 sans que E contienne de sous-espace isomorphe à c_0 .

Notons que l'équivalence de 1°, 3° et 4° a été étendue au cas de $c_0(\Gamma)$, $\ell^1(\Gamma)$, $\ell^\infty(\Gamma)$, Γ infini quelconque, par ROSENTHAL [122].

IV. Les espaces C(K) .

1. La méthode de décomposition de Pelczynski.

Nous aurions pu introduire cette technique plus tôt (elle sert pour démontrer le théorème 8, par exemple), mais ses applications les plus frappantes concernent les C(K) et les L^p .

Nous en donnons deux versions, toutes deux dues à PELCZYNSKI, la 1re en 1958 [106], la 2e en 1960 [107].

LEMME 2.

1° Soient E et F deux Banach vérifiant $E \simeq E \oplus E$ et $F \simeq F \oplus F$. Si E est isomorphe à un facteur direct de F , et F isomorphe à un facteur direct de E , alors $E \simeq F$.

2° Soient E et F deux Banach, chacun étant isomorphe à un facteur direct de l'autre. Si $c_0(E) \simeq E$, ou si $\ell^p(E) \simeq E$, pour un $p \in [1 , \infty]$, alors E et F sont isomorphes.

Démontrons ce lemme.

1° Si $E \simeq F \oplus G$, on a $E \simeq (F \oplus F) \oplus G \simeq F \oplus (F \oplus G) \simeq F \oplus E$, et de même $F \simeq E \oplus F$;

2° Si $E \simeq F \oplus G$ et $F \simeq E \oplus H$, on a $c_0(E) \simeq c_0(F) \oplus c_0(G)$, donc

$$E \simeq c_0(E) \oplus c_0(G) \oplus c_0(H) ,$$

et

$$E \oplus H \simeq c_0(E) \oplus c_0(G) \oplus [c_0(H) \oplus H] ,$$

c'est-à-dire

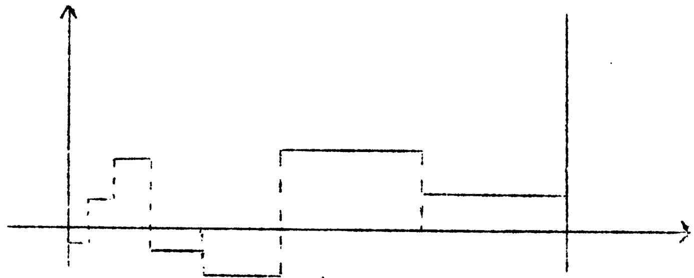
$$F \simeq c_0(E) \oplus c_0(G) \oplus c_0(H) \simeq E .$$

Démonstration analogue avec ℓ^p au lieu de c_0 .

Donnons deux exemples d'applications, toutes deux dues à PELCZYNSKI.

PROPOSITION 17. - Les espaces ℓ^∞ et $L^\infty([0 , 1])$ sont isomorphes.

Il est clair que ℓ^∞ se plonge comme facteur direct dans $L^\infty([0 , 1])$.



Comme $L^\infty([0 , 1])$ est le dual de L^1 qui est séparable, il existe Γ dénombrable dans la sphère unité de L^1 tel que L^∞ soit isomorphe à un sous-espace de $\ell^\infty(\Gamma) \sim \ell^\infty$, L^∞ étant injectif, ce sous-espace est facteur direct de ℓ^∞ . On conclut par le lemme 2. 1°, car $\ell^\infty \simeq \ell^\infty \oplus \ell^\infty$, et $L^\infty \simeq L^\infty \oplus L^\infty$.

Comme deuxième application, montrons que la proposition 9 implique le théorème 8 pour ℓ^p , $1 \leqslant p < \infty$ (ou pour c_0). Si $F \subset \ell^p$ y est facteur direct, $F \supset G \simeq \ell^p$, G étant facteur direct de ℓ^p ; comme $\ell^p(\ell^p) \simeq \ell^p$, le lemme 2. 2° donne la conclusion (même méthode pour c_0).

2. Résultats préliminaires sur la structure des espaces $C(K)$.

Rappelons le résultat cité en introduction, dû à BANACH et MAZUR.

THÉORÈME 12. - Tout espace de Banach séparable est isométrique à un sous-espace de $C([0 , 1])$ ou $C(\Delta)$.

On note par Δ l'ensemble de Cantor.

La classifiaction isométrique des espaces $C(K)$ ou même $c_0(X)$, X localement compact, date des années 1930. On a, en effet, l'énoncé facile suivant, de BANACH et STONE (cf. [133]).

PROPOSITION 18. - Soient X et Y deux espaces localement compacts. $c_0(X)$ est isométrique à $c_0(Y)$ si, et seulement si, X et Y sont homéomorphes.

La classification, à isomorphisme près, est bien plus difficile, seul le cas séparable est résolu. Citons un cas qui ramène l'isomorphie à une isométrie.

PROPOSITION 19.

1° Soient X et Y deux espaces compacts. Si $d[C(X), C(Y)] < 2$, X et Y sont homéomorphes.

2° Il existe 2 compacts X et Y non homéomorphes, avec $d[C(X), C(Y)] = 2$.

La première partie est due, indépendemment, à AMIR [6] et CAMBERN [21], en 1965. Le contre-exemple est dû à COHEN [27].

Si $C(X)$ est isométrique à un sous-espace de $C(Y)$, HOLSZTYNKI a montré en 1966 [57] que X est un quotient d'un fermé de Y. AMIR et ARBEL ont montré de plus [7] qu'alors X est un fermé d'un quotient Z de Y, tel qu'il existe un opérateur d'extension T de norme 1 de $C(X)$ dans $C(Z)$, et si j est l'isométrie de $C(X)$ dans $C(Y)$, on a : $j(f)(y) = T(f)[\varphi(y)]$ ($\varphi : Y \longrightarrow Z$ est l'application quotient).

PROBLÈME 13. - Si $d(C(X), E) < 2$, où E est un sous-espace de $C(Y)$, quel rapport y-a-t-il entre X et Y ?

BANACH posait en 1932 la question suivante : $C([0, 1])$ est-il isomorphe à $C([0, 1]^2)$? La réponse ne fut apportée qu'en 1952, par MILUTIN, mais publiée en 1966 seulement [102]. Elle est très générale.

THÉORÈME 13. - Si K est un compact métrisable non énombrable, $C(K)$ est isomorphe à $C([0, 1])$ (ou à $C(\Delta)$!).

Il y a actuellement plusieurs démonstrations de ce résultat. Citons celle de SAINT-RAYMOND [126], qui est assez simple et naturelle. Elle utilise le théorème de sélection de MICHAEL [101] et la méthode de décomposition de PELCZYNSKI.

Pour les compacts dénombrables, on a la proposition suivante (où $\omega = \underset{\sim}{N}_*$, et Ω est le 1er ordinal non dénombrable).

PROPOSITION 20.

1° Tout compact dénombrable est homéomorphe à un intervalle $[1, \alpha]$ des ordinaux dénombrables.

2° Soient α et β deux ordinaux vérifiant $\omega \leq \alpha \leq \beta < \Omega$. Alors $C([1, \beta])$ est isomorphe à $C([1, \alpha])$ si, et seulement si, $\beta < \alpha^\omega$.

Le 1er point est dû à MAZURKIEWICZ et SIERPINSKI [100], le 2e à BESSAGA et PELCZYNSKI [15], en 1960. Ce résultat montre ainsi qu'il y a une infinité non dénombrable de types d'isomorphismes pour les espaces $C(K)$, K compact, dénombrable. Après $C([1, \omega])$, le plus simple est $C([1, \omega^\omega])$. Le cas général est l'espace

$C([1, \omega^{\omega^\alpha}))$.

La situation est donc claire en ce qui concerne les $C(K)$ séparables. Elle est par contre encore très confuse pour les compacts non métrisables. On peut trouver un certain nombre de résultats partiels dans le remarquable article [110] de PELCZYNSKI, et dans des travaux de HAGLER [52], DITOR et HAYDON. Ils ont surtout étudié le cas des groupes compacts, et des espaces $\underset{\sim}{D}^I$, où $\underset{\sim}{D} = \{0, 1\}$. Citons, à titre d'exemple, quelques résultats (nous verrons le cas des $C([1, \alpha])$, $\alpha \geqslant \Omega$, plus loin, § 6).

PROPOSITION 21. - Soit G un groupe compact, et m le plus petit cardinal d'une base de sa topologie. Alors $C(G)$ est isomorphe à $C(\underset{\sim}{D}^m)$.

Cette proposition est due à PELCZYNSKI, dans [110].

DITOR et HAYDON [36] ont démontré que si S est compact non métrisable, et si $C(S)$ est isométrique à un facteur direct 1-complémenté de $C(\underset{\sim}{D}^\Omega)$, alors $C(S)$ est isomorphe à $C(\underset{\sim}{D}^\Omega)$. Ils montrent aussi que, si E est un facteur direct de $C(\underset{\sim}{D}^m)$, de densité m, et si le plus petit ordinal cofinal de m n'est pas ω, alors le dual E' de E est isomorphe à l'espace $M(\underset{\sim}{D}^m)$ des mesures sur $\underset{\sim}{D}^m$ (la densité d'un Banach est le plus petit cardinal d'une partie totale).

PROBLÈME 14. - Si $m \geqslant \Omega$, caractériser les compacts S tels que $C(S)$ soit isométrique à un facteur direct 1-complémenté de $C(\underset{\sim}{D}^m)$.

PROBLÈME 15. - Tout espace $C(K)$ contient-il un facteur direct isomorphe à c_0 ou ℓ^∞ ?

(Si K est métrisable, la réponse est oui, avec c_0 !)

PROBLÈME 16. - Tout espace $C(K)$ est-il isomorphe à un espace $C(L)$, où L est compact et totalement discontinu ?

(C'est vrai si K est métrisable, par le théorème de Milutin !) Voir à ce propos les travaux de DITOR [35]. La classification des $C([1, \alpha])$, α ordinal non dénombrable, est plus compliquée que la proposition 20. Déjà, dans [128], SEMADENI remarquait que $C([1, \Omega])$ et $C([1, \Omega.2])$ ne sont pas isomorphes. La solution, que nous verrons plus loin, date de 1975 seulement [51], [72]. Les espaces $L^\infty(\mu)$ posent aussi de gros problèmes, bien que le cas des mesures finies soit traité dans [122]. Signalons, par exemple, que $L^\infty([0, 1]^{2^c})$ n'est isomorphe à aucun $\ell^\infty(\Gamma)$, ce qui contraste avec la proposition 17 et le théorème 4.

3. $C(K)$ comme facteur direct de Banach séparables (K compact métrisable), et les espaces de Banach universels.

Le résultat de base est un théorème de PELCZYNSKI [112] datant de 1968.

THÉORÈME 14.

1° Soit E un espace de Banach séparable, et F un sous-espace de E, isométrique à $C(K)$, où K est compact et totalement discontinu. Alors, il existe un sous-espace G de F, isométrique à $C(K)$, et 1-complémenté dans E.

2° Soit E un espace de Banach séparable, et F un sous-espace de E isomorphe à $C(K)$. Alors, F contient un sous-espace G isomorphe à $C(K)$ et facteur direct dans E.

En fait, 2° se déduit aisément du 1° grâce au théorème 13 et à la proposition 20, en renormant E.

Ce théorème est en fait de nature topologique, et repose sur le lemme suivant (de KURATWSKI [75] pour X non dénombrable, de PELCZYNSKI dans le cas dénombrable).

LEMME 3. - Soient X et Z des espaces métriques compacts, et $\varphi : Z \longrightarrow X$ continue, surjective. On suppose que X est totalement discontinue : Alors, il existe un fermé P de Z, homéomorphe à X, et tel que $\varphi_{|P}$ soit un homéomorphisme de P sur $\varphi(P)$.

Du théorème 14 et de la méthode de décomposition de Pelczynski résulte immédiatement que tout facteur direct d'un $C(K)$ (K compact métrisable) qui contient un sous-espace isomorphe à $C(K)$ est lui même isomorphe à $C(K)$.

Un espace de Banach E est [isométriquement] universel pour les Banach séparables s'il contient isomorphiquement [isométriquement] tout Banach séparable. Il résulte de ce qui précède que, pour cela, il faut et il suffit que E contienne un facteur direct [1-complémenté] isomorphe [isométrique] à $C(\Delta)$. Du point de vue isomorphique, $C(\Delta)$ est "le plus petit Banach universel possible" au sens suivant. Si un facteur direct E de $C(\Delta)$ est universel, il est isomorphe à $C(\Delta)$. Nous évoquerons plus loin la question des espaces de Banach "complémentablement universels" (cf. § V).

Le théorème 14 est une technique très utile. Par exemple, et sans rentrer dans les caractérisations de PELCZYNSKI et ROSENTHAL des espaces de Banach séparables qui contiennent ℓ^1, montrons comment ce premier auteur l'utilise pour montrer que, si un Banach séparable E contient ℓ^1, alors $C([0\,,\,1])$ est un quotient de E, $C([0\,,\,1])$ étant séparable est image de ℓ^1 par une surjection T. Comme $C([0\,,\,1]) \subset \ell^\infty$, T se prolonge en $\tilde{T} : E \longrightarrow \ell^\infty$, en fait à valeurs dans l'espace séparable $V = \overline{\tilde{T}(E)}$, qui contient $C([0\,,\,1])$. Par le théorème 14, $C([0,1]) \supseteq G$, G image d'une projection P dans V, et G est isomorphe à $C([0\,,\,1])$ par S. Par suite, $S^{-1} \circ P \circ \tilde{T}$ est une application surjective de E sur $C([0\,,\,1])$ (cf. [124], [111]).

$$\begin{tikzcd}
 & \ell^\infty & & \\
 & \cup & & \\
E \arrow[r, "\tilde{T}"] & \overline{\tilde{T}(E)} \arrow[ddr, "P"] & & \\
\cup & \cup & & \\
\ell^1 \arrow[r, two heads, "T"'] & C([0\,,\,1]) & G \arrow[l, phantom, "\supseteq"] \arrow[r, "\tilde{S}"'] & C([0\,,\,1])
\end{tikzcd}$$

4. Les facteurs directs de $C([0\,,\,1])$.

Du point de vue isomorphique cette question est équivalente à celle des facteurs directs des $C(K)$, K compact métrisable non dénombrable.

L'un des premiers résultats isomorphiques décisif, date de 1972. Il est dû à LEWIS et STEGALL [80], et généralise la situation de c_0 , qui est facteur direct de $C([0\,,\,1])$, d'après le théorème de Banach-Mazur et le théorème 5.

THÉORÈME 15. - Si E est un facteur direct de $C([0\,,\,1])$ dont le dual E' est séparable, alors ce dual est isomorphe à ℓ^1 .

La démonstration, difficile, utilise la théorie des opérateurs absolument sommants, intégraux et nucléaires, et la propriété de Radon-Nikodym. En fait, on montre que E' est isomorphe à un facteur direct de L^1 qui a la propriété de Radon-Nikodym et le point difficile est de montrer qu'un tel espace est isomorphe à ℓ^1 .

Il y a une infinité non dénombrable de tels facteurs directs de $C([0\,,\,1])$, 2 à 2 non isomorphes, et ils sont même 1-compléméntés.

PROPOSITION 22. - Pour tout ordinal dénombrable α , $C([1\,,\,\alpha])$ est isométrique à un facteur direct 1-complémenté de $C([0\,,\,1])$.

En effet, $C([1\,,\,\alpha])$ est isométrique à un sous-espace F de $C([0\,,\,1])$ (BANACH-MAZUR), et F contient un sous-espace G isométrique à $C([1\,,\,\alpha])$, 1-comlémenté dans $C([0\,,\,1])$, parce que $[1\,,\,\alpha]$ est totalement discontinu (théorème 14) [on peut dire aussi que $[1\,,\,\alpha]$ se plonge dans $[0\,,\,1]$ et appliquer la proposition 29].

L'identification des facteurs directs de $C([0\,,\,1])$ de dual non séparable avait été faite dès 1971 par ROSENTHAL [123].

THÉORÈME 16. - Si E est un facteur direct de $C([0\,,\,1])$ dont le dual E' n'est pas séparable, alors E est isomorphe à $C([0\,,\,1])$.

En fait, ROSENTHAL montre le résultat plus précis et plus utile suivant.

PROPOSITION 23. - Soit E un Banach séparable, et $T : C([0\,,\,1]) \longrightarrow E$ un opérateur tel que $T^*(E')$ soit séparable. Alors, il existe un sous-espace V de $C([0\,,\,1])$, isométrique à $C(\Delta)$, et 1-complémenté dans $C([0\,,\,1])$, tel que $T_{|V}$ soit un isomorphisme de V sur $T(V)$.

Il résulte évidemment des théorèmes 15 et 16, puisque, si $C([0\,,\,1]) = E \oplus F$, E' ou F' n'est pas séparable, que l'on a le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2. - $C([0, 1])$ [et donc $C(K)$, pour K compact métrisable non dénombrable] est primaire.

(Voir aussi [87]).

Mais l'imprécision du théorème 15, sur la nature de E lui-même, laisse ouvert le problème suivant.

PROBLÈME 17. - Tout facteur direct de $C([0, 1])$ est-il isomorphe à un $C(K)$?

BENYAMINI a montré dans [11] qu'un facteur direct de $C([0, 1])$ de dual séparable est isomorphe à un quotient d'un espace $C([1, \alpha])$, α ordinal dénombrable.

On a des résultats plus précis sur les fadteurs directs 1-complémentés.

5. Les facteurs directs 1-complémentés des $C(K)$.

SAMUEL a démontré, en 1970, le résultat suivant [127].

PROPOSITION 24. - Si E est 1-complémenté dans $C(K)$, et si les points extrémaux de la boule unité de E' sont dénombrables, E est isomorphe à un $C([1, \alpha])$ pour un certain ordinal dénombrable α.

L'instrument fondamental est la notion de $C_\sigma(X)$. Soit X un compact, et σ une involution de X qui est un homéomorphisme. $C_\sigma(X)$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur X "impaires pour σ" ($f = -f \circ \sigma$). SAMUEL utilise alors le résultat suivant démontré par JONAC et SAMUEL [65] en 1970, et, indépendemment, par LINDENSTRAUSS et WULBERT [95] en 1971.

THÉORÈME 17. - Si E est un facteur direct 1-complémenté de $C(K)$, E est isométrique à un espace $C_\sigma(X)$.

En fait, dans [127], SAMUEL démontre aussi que tout $C_\sigma(X)$ séparable est isomorphe à un $C(L)$ (L compact métrisable). On en déduit le résultat suivant, qui répond partiellement au problème 17, et qui a été ensuite démontré plus simplement par FAKHOURY dans [41].

PROPOSITION 25. - Si K est métrisable, tout facteur direct 1-complémenté de $C(K)$ est isomorphe à un $C(L)$.

PROBLÈME 18. - Tout facteur direct de $C(K)$, K compact métrisable, est-il isomorphe à un espace $C(L)$?

Si K n'est pas déhombrable, ce n'est autre que le problème 17.

6. Les espaces $C([1, \alpha])$, α ordinal.

La classification de ces espaces, pour α non nécessairement dénombrable, est due à GULKO et OSKIN [51] et indépendemment à KISLAKOV [72] (voir aussi LABBÉ [77]).

PROPOSITION 26. - Soient α et β deux ordinaux de même cardinal, avec $\alpha < \beta$ (si $|\alpha| \neq |\beta|$, $C([1 , \alpha])$ n'est pas isomorphe à $C([1 , \beta])$), et soit ξ le 1er ordinal ayant leur cardinalité. Ecrivons $\alpha = \xi\eta + \rho$ $(\rho < \xi)$. Il y a 2 cas :

1° Si α est non dénombrable et régulier (non limite de cardinaux $< \xi$, en nombre $< \xi$), et si $\eta \leq \xi$, posons $\beta = \xi\eta' + \rho'$ $(\rho' < \xi)$. Alors $C([1 , \alpha])$ est isomorphe à $C([1 , \beta])$ si, et seulement si, $|\eta| = |\eta'|$.

2° Si ce n'est pas le cas, alors $C([1 , \alpha])$ est isomorphe à $C([1 , \beta])$ si, et seulement si, $\beta < \alpha^{\omega}$.

On retrouve la remarque de SEMADINI citée plus haut. $C([1 , \Omega])$ n'est pas isomorphe à $C([1 , \Omega.2])$. Comme $C([1 , \Omega.2]) \simeq C([1 , \Omega]) \oplus C([1 , \Omega])$, on voit que $C([1 , \Omega])$ n'est pas primaire. Qu'en est-il en général pour $C([1 , \alpha])$? BILLARD a résolu le cas dénombrable en 1975 [17]. Si α est dénombrable, $C([1 , \alpha])$ est primaire. Le cas général est dû à ALSPACH et BENYAMINI [3], en 1976.

THÉORÈME 18. - $C([1 , \alpha])$ n'est pas primaire si, et seulement si, il est isomorphe à un espace $C([1 , \xi.m])$, où ξ est non dénombrable et régulier, et $1 < m < \omega$.

On retrouve ainsi le résultat de BILLARD et l'exemple de SEMADINI.

Signalons, par ailleurs, que les facteurs directs de $C([1 , \omega^{\omega}])$ ont été déterminés par BENYAMINI [11] et ALSPACH [21]. Il n'y a que c_0 et $C([1 , \omega^{\omega}])$ lui-même.

7. Autres propriétés des facteurs directs des $C(K)$ ou des préduaux de $L^1(\mu)$.

On connait peu de propriétés générales des facteurs directs des $C(K)$. La première est due à GROTHENDIECK [49], et repose sur la propriété de Dunford et Pettis (D. P.).Un Banach E a la propriété D. P. si, pour toute suite $x_n \longrightarrow 0$ faiblement dans E , et toute suite $\ell_n \longrightarrow 0$ faiblement (pour $\sigma(E' , E'')$) dans E' , alors $\ell_n(x_n) \longrightarrow 0$. Il est équivalent de dire que tout opérateur T faiblement compact de E dans un Banach F transforme les ensembles faiblement compacts de E en ensembles normiquement compacts de F .

L'exemple fondamental d'espaces ayant la propriété D. P. est donné en 1940 par DUNFORD et PETTIS dans [37], voir aussi [49].

LEMME 4. - Les espaces $L^1(\mu)$, les espaces $C(K)$, et plus généralement les préduaux d'espaces $L^1(\mu)$ vérifient la propriété D. P.

Si E' possède la propriété D. P., E aussi. Il suffit, donc, de montrer le lemme pour les $C(K)$. Si $T : X \longrightarrow E$ et $S : E \longrightarrow Y$ sont faiblement compacts, et si E a la propriété D. P., alors $S \circ T$ est un opérateur compact.

GROTHENDIECK en déduit dans [49] le résultat suivant.

PROPOSITION 27. - Tout facteur direct réflexif d'un espace ayant la propriété D. P. est de dimension finie (c'est donc le cas pour les facteurs directs réflexifs des $L^1(\mu)$, des $C(K)$ et des préduaux de $L^1(\mu)$).

PELCZYNSKI [107] a précisé l'obstruction à ce qu'un facteur direct d'un $C(K)$ ou d'un prédual de $L^1(\mu)$, de dimension infinie, soit réflexif. En fait, le cas prédual de $L^1(\mu)$ est dû à ZIPPIN et JOHNSON [64] et LINDENSTRAUSS [81].

THÉORÈME 19. - Tout facteur direct de dimension infinie d'un prédual de $L^1(\mu)$ (en particulier d'un $C(K)$) contient un sous-espace isomorphe à c_0 .

La difficulté principale est de montrer ce résultat pour un $C(K)$. En fait, le résultat technique important, et utile dans bien d'autres questions, est le suivant (cf. [108], [109]), analogue de la proposition 23.

PROPOSITION 28. - Pour un opérateur $T : C(K) \longrightarrow E$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° T transforme toute série faiblement inconditionnellement convergente ($\sum |\ell(x_n)| < \infty$, $\forall \ell \in C(K)'$) en série inconditionnellement convergente (T est "inconditionnellement convergent") ;

2° T transforme toute suite de Cauchy faible en une suite convergente (T est "complètement continu") ;

3° T est faiblement compact ;

4° Il n'existe aucun sous-espace X de $C(K)$ de dimension infinie, tel que $T_{|X}$ soit un isomorphisme (T est "strictement singulier") ;

5° Il n'existe aucun sous-espace X de $C(K)$, isomorphe à c_0 , tel que $T_{|X}$ soit un isomorphisme.

Ainsi, si $T : C(K) \longrightarrow E$ n'est pas faiblement compact (et c'est le cas si E est un facteur direct de $C(K)$ et T la projection correspondante), T est un isomorphisme sur un sous-espace de $C(K)$ isomorphe à c_0 . On en déduit que $C(K)$ ne vérifie pas les propriétés du théorème 11.

Ce résultat a été étendu récemment par ALSPACH, qui étudie à quelle condition un tel opérateur T , pour K-métrisable, a sa restriction à un sous-espace isomorphe à $C([1 , \omega^K])$ ou a $c_0([1 , \omega^\omega])$ qui est un isomorphisme (cf. [2]). Cette étude, fondée sur la notion d'ε-indice de SZLENK [137], sert pour démontrer le théorème 6.

Le théorème 19 est à peu près le seul résultat concernant les facteurs directs quelconques des espaces $C(K)$ ou des préduaux de $L^1(\mu)$ généraux.

Signalons néanmoins, dans ce paragraphe, le résultat suivant de BORSUK [18], très utile, et conséquence simple du théorème sélection de MICHAEL [101].

PROPOSITION 29. - Soit K un espace compact, et F un fermé de K , métrisable. Il existe un "opérateur d'extension" linéaire positif isométrique T de $C(F)$ dans $C(K)$, transformant la fonction 1_F en la fonction 1_K , tel que $T(f)_{|F} = f$. L'espace $T[C(F)]$ est donc 1-complémenté dans $C(K)$ et isométrique à $C(F)$, et l'espace $C_F(K)$ des fonctions nulles sur F en est un supplémentaire 2-complémenté.

Le plus simple est d'utiliser, par [101], une application continue

$$K \longrightarrow M_1^+(F) \ : \ x \longrightarrow \mu_x \ ,$$

telle que, $\forall\, x \in F$, $\mu_x = \delta_x$. On pose $(Tf)(x) = \mu_x(f_{|F})$.

Dans [79], LAZAR et LINDENSTRAUSS étendent le théorème de sélection de Michael, ce qui leur permet de montrer la proposition suivante.

PROPOSITION 30. - Si E est un prédual séparable d'un $L^1(\mu)$ non séparable, E contient un facteur direct 1-complémenté isométrique à $C(\Delta)$ (Δ ensemble de Cantor).

L'existence d'opérateur d'extension de $C(F)$ dans $C(K)$ (F fermé de K) est un problème important (cf. le résultat d'AMIR et ARBEL cité avant le problème 13), ainsi que l'existence d'opérateurs moyennants. Si $\varphi : K \longrightarrow H$ est continue surjective (K, H compacts), un opérateur T de $C(K)$ dans $C(H)$ est moyennant si, $\forall\, f \in C(H)$, $T[f \circ \varphi] = f$. L'existence d'un tel opérateur pour une surjection particulière $\varphi : \Delta \longrightarrow [0\ ,\ 1]$ intervient dans le théorème de Milutin. Pour ces questions, on peut consulter [110], [52], [36].

8. Le problème des hyperplans et le cas des $C(K)$.

Tous les hyperplans d'un Banach sont isomorphes entre eux. BANACH a posé le problème suivant.

PROBLÈME 19. - Un espace de Banach de dimension infinie est-il toujours isomorphe à ses hyperplans ?

Bien sûr, il est alors isomorphe à tous ses sous-espaces de codimension finie. La réponse est évidemment affirmative si l'espace est primaire. C'est donc le cas pour les $C(K)$, K compact métrisable, c_0, les ℓ^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, certains $C([1,\alpha])$, α non dénombrable (cf. théorème 18), et nous le verrons plus loin, les $L^p([0\ ,\ 1])$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (pour L^∞, cela résulte de la proposition 17). Pour les $C(K)$ non séparables, le problème se reformule de la façon suivante.

PROBLÈME 20. - Soit X un espace localement compact, dont le compactifié d'Alexandrof X_∞ n'est pas métrisable. $C_0(X) \oplus \underset{\sim}{R}$ est-il isomorphe à $C_0(X)$?

Remarque. - Le problème correspondant isométrique est facile à résoudre. "$C_0(X) \oplus \underset{\sim}{R}$ est isométrique (pour la"norme sup") à $C_0(X)$" $\Longleftrightarrow$ "X est homéomorphe à $X \cup \{1$ point isolé$\}$" $\Longrightarrow$ "X a une infinité de points isolés". Si X_∞ est métrisable, la réciproque de cette dernière implication est vraie, sinon elle est fausse. en général.

Le problème suivant est en étroits rapports avec le problème 19.

PROBLÈME 21. - Existe-t-il un espace de Banach de dimension infinie E tel que tout opérateur T dans E s'écrive $T = \lambda I_E + S$, où S est compact ?

En effet, si un tel espace existe, alors (par l'alternative de Fredholm) il ne peut être isomorphe à aucun de ses sous-espaces de codimension finie, et la réponse du problème 19 est négative.

V. Mélanges.

1. Les Banach dont le dual contient un facteur direct isomorphe à $M([0 , 1])$.

Dans [111], PELCZYNSKI montre qu'un Banach séparable E contient un sous-espace isomorphe à ℓ^1 si, et seulement si, E' contient un sous-espace isomorphe à $L^1([0 , 1])$. HAGLER et STEGALL montrent le résultat analogue suivant [54].

THÉORÈME 20. - Pour un espace de Banach E , les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° E contient un sous-espace isomorphe à $\bigoplus_{\ell^1} \ell^\infty_n = (\ell^\infty_1 \oplus \ell^\infty_2 \oplus \ell^\infty_3 \oplus \dots)_{\ell^1}$;

2° E' contient un facteur direct isomorphe à $L^1([0 , 1])$;

3° E' contient un facteur direct isomorphe à $M([0 , 1])$ (espace des mesures);

4° E' contient un ensemble Γ sans point isolé pour $\sigma(E' , E)$, équivalent à la base de $\ell^1(\Gamma)$, tel que l'espace fermé engendré par Γ soit facteur direct.

Si de plus, E est séparable, ces conditions équivalent à

5° $\exists\, T : E \longrightarrow C([0 , 1])$ surjectif tel que $T^*(M([0 , 1])$ soit facteur direct dans E' .

Si E' contient un facteur direct isomorphe à $\ell^1(\Gamma)$, et si $\dim(X) < \mathrm{card}(\Gamma)$, alors E vérifie les 4 propriétés précédentes.

Par des résultats de [131], et un résultat que nous verrons plus loin sur les espaces de Banach W. C. G. ("wearkly compactly generated", engendrés par un compact faible) [85], valable aussi dans les espaces de Banach $\mathcal{K}$-analytiques pour leur topologie faible [138], on montre que le 5° est aussi équivalent à 1°, ..., 4° pour un espace W. C. G., ou même pour un Banach faiblement $\mathcal{K}$-analytique.

PROBLÈME 22. - Posons $Z = \bigoplus_{n=1\,\ell^1}^{\infty} \ell^\infty_n$, et si m est un cardinal, $Z_m = \ell^1(m , Z)$. On suppose $m > \aleph_0$. Soit E un Banach, tel que E' contienne un facteur direct isomorphe à $M(\underset{\sim}{D}^m)$. Alors E contient-il un sous-espace isomorphe à Z_m ?

(On peut montrer que Z'_m contient un facteur direct isomorphe à $M(\underset{\sim}{D}^m)$.)

2. Espaces de Banach complémentablement universels.

Etant donnée une catégorie d'espaces de Banch, un espace de Banach E est universel si tout Banach de la catégorie est isomorphe à un sous-espace de E. Il est complémentablement universel si tout Banach de la catégorie est isomorphe à un facteur direct de E.

KADEC [66] montre la 1re partie, et PELCZYNSKI [113] la 2e du théorème suivant

THÉORÈME 21.

1° Il existe un Banach séparable complémentablement universel pour les Banach séparables qui ont la P. A. B.

2° Il existe un Banach, qui possède une base de Schauder [inconditionnelle], qui est complémentablement universel pour les espaces ayant une base de Schauder [inconditionnelle].

(Comparer au théorème 9 et au problème 11.) En fait, on montre que les espaces de Kadec et Pelczynski sont isomorphes.

JOHNSON montre dans [61] qu'il existe un espace de Banach séparable E tel que E' soit complémentablement universel pour les duaux de Banach séparables. PELCZYNSKI et WOJTASZCZYK [116] ont montré qu'il existe un prédual de L^1, séparable, qui est complémentablement universel pour tous les Banach séparables qui sont des préduaux de L^1.

Certains résultats négatifs existent aussi. Par exemple, dans [63], JOHNSON et SZANKOWSKI montrent qu'il n'existe pas de Banach séparable complémentablement universel pour les Banach séparables (comparer au théorème 12), ni de Banach séparable complémentablement universel pour les espaces de Banach qui ont la propriété d'approximation. Ils montrent aussi que, pour $p \in]2, \infty[$, il n'existe pas de Banach séparable complémentablement universel pour tous les sous-espaces de ℓ^p.

PROBLÈME 23. - Si $p \in]1, 2[$, existe-t-il un Banach séparable complémentablement universel pour tous les sous-espaces de ℓ^p ?

Signalons, bien que ce soit sans rapport direct avec le problème des facteurs directs, que, dans [137], SZLENK montre qu'il n'existe pas de Banach réflexif séparable universel pour tous les Banach réflexifs séparables, ni de Banach à dual séparable universel pour tous les Banach à dual séparable (voir aussi, à ce propos, WOJTASZCZYK [142]).

3. Facteurs directs et espaces totalement incomparables.

Deux espaces de Banach E et F sont totalement incomparables si on ne peut trouver $E_1 \subset E$ et $F_1 \subset F$, de dimension infinie, qui soient isomorphes (la notion a été introduite par ROSENTHAL dans [119]). Si E et F sont totalement incomparables, les facteurs directs de $E \times F$ ont une structure simple. Plus généralement, EDELSTEIN et WOJTASZCSYK montrent dans [143] et [39] le résultat suivant.

PROPOSITION 31. Soient $E_1, \ldots, E_n$ des Banach 2 à 2 totalement incomparables.

Tout facteur direct F *de* $E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$ *est isomorphe à un produit* $F_1 \oplus \ldots \oplus F_n$ *de facteurs directs* F_i *des* E_i *, par un isomorphisme qui se prolonge en un isomorphisme de* $E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$ *sur lui-même.*

On en déduit, par exemple, qu'un facteur direct de dimension infinie de

$$c_0 \oplus \ell^{p_1} \oplus \ell^{p_2} \oplus \ldots \oplus \ell^{p_n} , \quad 1 \leqslant p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \infty$$

est isomorphe à $c_0 \oplus \ell^{p_{i_1}} \oplus \ldots \oplus \ell^{p_{i_K}}$, ou à $\ell^{p_{i_1}} \oplus \ldots \oplus \ell^{p_{i_K}}$, où $i_1 < \ldots < i_K$ est une sous-suite de $\{1 , 2 , \ldots , n\}$.

4. Facteurs directs dans les espaces W. C. G.

Un espace de Banach est W. C. G. ("weakly compactly generated") s'il possède un ensemble faiblement compact total. C'est le cas d'un espace réflexif. Le résultat suivant, dû à AMIR et LINDENSTRAUSS, permet de ramener des problèmes de facteurs directs dans les $L^p(\mu)$ au cas séparable $L^p([0 , 1])$ (cf. [8], [34] et [88]).

PROPOSITION 32. - *Si* F *est un sous-espace séparable d'un espace W. C. G.* E *, il existe un sous-espace séparable* G *de* E *, facteur direct dans* E *, tel que* $F \subset G \subset E$.

Ce résultat est aussi valable dans les espaces de Banach $\mathcal{K}$-analytiques pour leur topologie faible, introduits par TALAGRAND [138].

5. Primarité de certains espaces spéciaux.

Signalons simplement, ici, deux résultats.

(i) L'espace de suites de JAMES [59] est primaire (CASAZZA [24]) ;

(ii) L'espace de Pelczynski universel pour les espaces à base inconditionnelle, cité dans le théorème 21, est primaire (CASAZZA et LIN [26]).

6. Facteurs directs et ultraproduits, réflexivité locale.

Soit $(X_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ une famille de Banach, et $\mathfrak{U}$ un *ultrafiltre* non trivial sur Γ . Sur l'espace

$$(\oplus_\Gamma X_\gamma)_\infty = \{(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \; ; \; x_\gamma \in X_\gamma , \; \sup_\gamma \|x_\gamma\|_{X_\gamma} < \infty\} ,$$

on définit la semi-norme $\|(x_\gamma)\|_{\mathfrak{U}} = \lim_{\mathfrak{U}} \|x_\gamma\|_{X_\gamma}$. Le *séparé complété* de cet espace s'appelle ultraproduit des X_γ par rapport à l'ultrafiltre $\mathfrak{U}$. Nous le noterons $\mathfrak{U}(\Gamma , X_\gamma)$.

Une classe $\mathfrak{A}$ de Banach est dite *stable par ultraproduits* si, lorsque $\forall \gamma \in \Gamma$, $X_\gamma \in \mathfrak{A}$, alors $\mathfrak{U}(\Gamma , X_\gamma) \in \mathfrak{A}$. L'un des intérêts de cette notion, introduite dans [28] par DACUNBA-CASTELLE et KRIVINE, tient par exemple au résultat suivant, qu'on peut déduire aisément du fait qu'un Banach réticulé est isométrique à un $L^p(\mu)$ si $\|x + y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p$, si $x \wedge y = 0$ $(1 \leqslant p < \infty)$ (cf. [69]).

LEMME 5. - Pour chaque p , $1 \leqslant p < \infty$, la classe des espaces isométriques à des $L^p(\mu)$ est stable par ultraproduit.

Un des moyens techniques pour utiliser les ultraproduits est le résultat suivant (cf. [28]).

PROPOSITION 33. - Soit $\mathfrak{U}$ une classe d'espaces de Banach stables par ultraproduits, soit X un espace de Banach de dimension infinie, et $\mathfrak{F}$ une famille filtrante croissante de sous-espaces de X de dimension finie, dont la réunion est X.

On suppose que, $\forall B \in \mathfrak{F}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists Y_{B,\varepsilon} \in \mathfrak{U}$, et $C_{B,\varepsilon} \subset Y_{B,\varepsilon}$, tel que $d(B , C_{B,\varepsilon}) \leqslant K(1 + \varepsilon)$ (K constante donnée) [respectivement et que de plus $C_{B,\varepsilon}$ soit $M(1 + \varepsilon)$-complémenté dans $Y_{B,\varepsilon}$ (M constante donnée), X étant supposé facteur direct dans X''].

Alors, $\exists Y \in \mathfrak{U}$, et $C \subset Y$ [respectivement et KM-complémenté dans Y] tel que $d(X , C) \leqslant K$.

Autrement dit, un Banach qui est "localement" proche (c'est-à-dire au sens de la dimension finie) des éléments d'une classe stable par ultraproduits, est globalement proche d'un sous-espace d'un Banach de cette classe [et y est facteur direct sous des conditions supplémentaires]. Cette idée est fondamentale dans l'étude des espaces $\mathcal{L}^p$, c'est-à-dire des facteurs directs des $L^p(\mu)$ (cf. [88]).

A titre d'exemple d'application, montrons, par exemple, la proposition 2, en partant du fait, classique, que ℓ^2 est isomorphe à un facteur direct de $L^p([0 , 1])$ (par les fonctions de Rademacher). Précisément, p étant fixé, il existe $\psi_p : \ell^2 \xrightarrow{\sim} A \subset L^p([0 , 1])$, avec $\|\psi_p\| \leqslant K_p$, $\|\psi_p^{-1}\| \leqslant 1$, et une projection $Q_p : L^p \longrightarrow A$, avec $\|Q_p\| \leqslant L_p$. Soit H un espace de Hilbert quelconque, et B un sous-espace de dimension finie de H . Alors, il existe une isométrie u de B sur $\tilde{B}$, sous-espace de ℓ^2 formé des vecteurs dont les coordonnées d'indice $> \dim(B)$ sont nulles, et une projection π de norme 1 de ℓ^2 sur $\tilde{B}$.

Posons $C_B = \psi_p(\tilde{B}) \subset L^p([0 , 1])$. Alors, on voit aisément que $d(B , C_B) \leqslant K_p$, et que si $\rho = \psi_p \circ \pi \circ \psi_p^{-1}$, $\rho \circ Q_p$ est une projection de L^p sur C_B , de norme au plus $K_p L_p$. Donc C_B est $(K_p L_p)$-complémenté dans L^p . Il résulte alors du lemme 5 et de la proposition 33 que H est K_p-isomorphe à un sous-espace $(K_p^2 L_p)$-complémenté dans $L^p(\mu)$ pour une certaine mesure μ .

$$\begin{tikzcd}
 & \ell^2 \arrow[r, "\psi_p", "\sim"'] \arrow[d, "\pi"'] & A \arrow[d, "\rho"'] & L^p(0 , 1) \arrow[l, two heads, "\subset"', "Q_p"] \\
B \arrow[r, "u", "\sim"'] & \tilde{B} \arrow[r, "\psi_p|\tilde{B}", "\sim"'] & C_B &
\end{tikzcd}$$

Cette étude "locale" des espaces de Banach intervient aussi pour "faire passer" des propriétés de nature "locale" d'un espace à son bidual, grâce au "principe de réflexivité locale" de Lindenstrauss et Rosenthal [133], amélioré par SIMONS [129] et surtout par JOHNSON, ROSENTHAL et ZIPPIN [62].

PROPOSITION 34.

1° Soit E un espace de Banach, et F un sous-espace de dimension finie de E''. Alors, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists T : F \longrightarrow E$, linéaire et injective, telle que $Tx = x$, $\forall x \in F \cap E$, et $\|T\|\|T^{-1}\| \leqslant 1 + \varepsilon$.

2° Si, de plus, on se donne Γ fini dans E', et une projection $P : E'' \longrightarrow F$, on peut imposer que $\ell(Tx) = \ell(x)$, $\forall \ell \in \Gamma$ et $\forall x \in F$, et qu'il existe une projection $\tilde{P} : E \longrightarrow TG$ vérifiant $\|\tilde{P}\| \leqslant \|P\|(1 + \varepsilon)$.

Ce principe de réflexivité locale, outre son utilité, par exemple, dans l'étude des espaces $\mathcal{L}^p$, permet de démontrer des relations entre bidual et ultrapuissance, telles la suivante, due à STERN [132] (voir aussi [93]).

PROPOSITION 35. - Pour tout espace de Banach E, E'' est isométrique à un sous-espace 1-complémenté d'une ultrapuissance $E^\Gamma/\mathcal{U} = \mathcal{U}(\Gamma, E)$ de E.

Ainsi, toute propriété d'un Banach stable par ultrapuissance, isométrie et projection de norme 1 est vérifiée par son bidual.

VI. Facteurs directs dans les espaces d'opérateurs.

Les travaux dans cette direction sont plus récents. Ils remontent à 1960 avec THORP [139], 1965 avec ARTERBURN et WHITLEY [9], 1969 avec TONG et WILKEN [140], et plus récemment avec FAKHOURY [43]. L'objet d'étude est en général le suivant. L'espace $\mathcal{K}(E, F)$ des opérateurs compacts de E dans F est-il facteur direct dans l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ des opérateurs bornés ? Et la réponse est en général négative, sauf s'ils sont égaux.

THÉORÈME 22. - On suppose que E ou F possède un facteur direct ayant une base inconditionnelle. Alors, ou bien $\mathcal{K}(E, F)$ n'est pas facteur direct dans $\mathcal{L}(E, F)$, ou bien $\mathcal{K}(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$.

Le cas où c'est F qui vérifie l'hypothèse est dû à TONG et WILKEN, l'autre cas à FAKHOURY.

PROBLÈME 24. - Pour tout couple E, F, a-t-on l'alternative $\mathcal{K}(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$, ou bien $\mathcal{K}(E, F)$ n'est pas facteur direct dans $\mathcal{L}(E, F)$?

Une approche plus fine du problème consiste à particulariser les espaces E et F, pour décider laquelle des deux éventualités est vraie. Par exemple, TONG et WILKEN montrent que si $E = C(K)$, K compact infini non dispersé, et $F = c_0$ ou ℓ^p, $2 \leqslant p < \infty$, alors $\mathcal{K}(E, F)$ n'est pas complémenté dans $\mathcal{L}(E, F)$.

PROBLÈME 25. - Que peut-on dire si K n'est pas dispersé, et $F = \ell^p$, $1 < p < 2$?

Pour $p = 1$, on sait que tout opérateur de $C(K)$ dans ℓ^1 est compact (cf. la proposition 28). Si K est dispersé, et $F = c_0$, PELCZYNSKI a montré que $\mathcal{K}(E, F)$

n'est pas facteur direct dans $\mathcal{L}(E, F)$ (cf. [140]).

Si K est dispersé, et $F = \ell^p$, $1 \leq p < \infty$, TONG et WILKEN montrent que tout opérateur de $C(K)$ dans ℓ^p est compact.

Signalons à ce propos le résultat de PITT [117], qui date de 1936. Tout opérateur de c_0 dans ℓ^p $(1 \leq p < \infty)$, ainsi que de ℓ^r dans ℓ^p si $1 \leq p < r < \infty$, est compact.

Une autre direction pour l'étude des facteurs directs dans les espaces d'opérateurs est constituée par la recherche des sous-espaces complémentés de $\mathcal{L}(\ell^2)$. D'après le théorème 22, $\mathcal{K}(\ell^2)$ n'est pas facteur direct dans $\mathcal{L}(\ell^2)$. En fait, le couple $\mathcal{K}(\ell^2)$, $\mathcal{L}(\ell^2)$ est analogue, par certains cotés, au couple c_0, ℓ^∞. C'est ainsi que, généralisant un résultat de FAKHOURY sur les opérateurs définis sur ℓ^∞ et dont le noyau contient c_0 (cf. [42]), DECORET montre que, pour tout opérateur $T : \mathcal{L}(\ell^2) \longrightarrow \mathcal{L}(\ell^2)$, dont le noyau contient $\mathcal{K}(\ell^2)$, il existe une partie A infinie de $\underset{\sim}{N}$ telle que, tout opérateur S dans ℓ^2, envoyant $\ell^2(A)$ dans $\ell^2(A)$, appartienne au noyau de T. Il en déduit le résultat suivant [33].

PROPOSITION 36. - <u>Tout facteur direct de</u> $\mathcal{L}(\ell^2)$, <u>qui contient</u> $\mathcal{K}(\ell^2)$, <u>contient un sous-espace isomorphe à</u> $\mathcal{L}(\ell^2)$ <u>et facteur direct dans</u> $\mathcal{L}(\ell^2)$.

Faute de pouvoir appliquer la méthode de décomposition de PELCZYNSKI à $\mathcal{L}(\ell^2)$, ce résultat laisse ouvert le problème suivant.

PROBLÈME 26. - <u>Tout facteur direct de</u> $\mathcal{L}(\ell^2)$ <u>contenant</u> $\mathcal{K}(\ell^2)$ <u>est-il isomorphe</u> à $\mathcal{L}(\ell^2)$?

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALTSHULER (Z.), CASAZZA (P. G.) and LIN (B. L.). - On symmetric basic sequences in Lorentz sequence spaces. - Israel J. Math., t. 15, 1973, p. 140-155.

[2] ALSPACH (D. E.). - Quotients of $C([0, 1])$ with separable dual, Bull. Amer. math. Soc., t. 83, 1977, p. 1057-1059.

[3] ALSPACH (D. E.) and BENYAMINI (Y.). - Primariness of spaces of continuous fonctions on ordinals. - Israel J. Math., t. 27, 1977, p. 64-92.

[4] ALSPACH (D. E.), ENFLO (P.) and ODELL (E.). - On the structure of separable $\mathcal{L}^p$ spaces $(1 < p < \infty)$, Studia Math., Warszawa, t. 60, 1977, p. 79-90.

[5] AMIR (D.). - Projections onto continuous function spaces, Proc. Amer. math. Soc., t. 15, 1964, p. 396-402.

[6] AMIR (D.). - On isomorphisms of continuous function spaces, Israel J. Math., t. 3, 1965, p. 205-210.

[7] AMIR (D.) and ARBEL (D.). - On injections and surjections of continuous function spaces, Israel J. Math., t. 15, 1973, p. 301-310.

[8] AMIR (D.) and LINDENSTRAUSS (J.). - The structure of weakly compact sets in Banach spaces, Annals of Math., Series 2, t. 88, 1968, p. 35-46.

[9] ARTERBURN (D.) and WHITLEY (R.). - Projections in the space of bounded linear operators, Pacific J. of Math., t. 15, 1965, p. 739-746.

[10] BANACH (S.). - Théorie des opérations linéaires. - Warszawa, Subwencji Funduszu Kultury Narodowej, 1932. (Monografje Matematyczne, 1).

[11] BENYAMINI (Y.). - An extension theorem for separable Banach spaces (à paraître).

[12] BENYAMINI (Y.) and LINDENSTRAUSS (J.). - A predual of ℓ^1 which is not isomorphic to a $C(K)$ space, Israel J. Math., t. 13, 1972, p. 246-254.

[13] BENNET (G.), DOR (L. E.), GOODMAN (V.), ... - On uncomplemented subspaces of L^p, $1 < p < 2$, Israel J. Math., t. 26, 1977, p. 178-187.

[14] BESSAGA (C.) and PELCZYNSKI (A.). - On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces, Studia Math., Warszawa, t. 7, 1958, p. 151-164.

[15] BESSAGA (C.) and PELCZYNSKI (A.). - Spaces of continuous functions. IV : On isomorphical classification of spaces of continuous functions, Studia Math., Warszawa, t. 19, 1960, p. 53-62.

[16] BILLARD (P.). - Bases dans H et bases de sous-espaces de dimension finie dans A, "Linear operators and approximation. Proceedings of the Conference held at the Oberwolfach mathematical Research Institute, 1971", p. 310-324. - Basel, Birkhäuser Verlag, 1972 (International Series of numerical Mathematics, 20).

[17] BILLARD (P.). - Sur la primarité des espaces $C([1 , \alpha])$, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 28, 1975, Série A, p. 629-631.

[18] BORSUK (K.). - Über Isomorphie des Funktionalräume, Bull. intern. Acad. polon. Sc. et Lettres, Série A, 1933, p. 1-10.

[19] BOČKAREV (S. V.). - Existence of a basis in the space of functions analytic in the disk, and some properties of Franklin's system, Math. of the USSR-Sbornik, t. 24, 1974, p. 1-16 ; [en russe] Mat. Sbornik, t. 95, 1974, p. 3-18.

[20] BRETAGNOLLE (J.), DACUMBA-CASTELLE (D.) et KRIVINE (J.-L.). - Lois stables et espaces L^p, Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B, t. 2, 1966, p. 231-259.

[21] CAMBERN (M.). - On isomorphisms with small bound, Proc. Amer. math. Soc. t. 18, 1967, p. 1062-1066.

[22] CAPON (M.). - Sous-espaces complémentés de $L^p([0 , 1])$, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, 17e année, 1977/78, nº 16, 7 p.

[23] CARTWRIGHT (D. I.). - Extensions of positive operators between Banach lattices, Memoirs of Amer. math. Soc., t. 164, 1975, p. 1-48.

[24] CASAZZA (P. G.). - James' quasi-reflexive space is primary, Israel J. Math., t. 26, 1977, p. 294-305.

[25] CASAZZA (P. G.), KOTTMAN (C. A.) and LIN (B. L.). - On some classes of primary Banach spaces, Canad. J. of Math., t. 29, 1977, p. 856-873.

[26] CASAZZA (P. G.) and LIN (B. L.). - Projections on Banach spaces with symmetric bases, Studia Math., Warszawa, t. 52, 1974, p. 189-193.

[27] COHEN (H. B.). - A bound-two isomorphism between $C(X)$ Banach spaces, Proc. Amer. math. Soc., t. 50, 1975, p. 215-217.

[28] DACUMBA-CASTELLE (D.) et KRIVINE (J.-L.). - Applications des ultraproduits à l'étude des espaces et des algèbres de Banach, Studia Math., Warszawa, t. 41, 1972, p. 315-334.

[29] DACUMBA-CASTELLE (D.) et KRIVINE (J.-L.). - Sous-espaces de L^1, Israel J. Math., t. 26, 1977, p. 320-351.

[30] DAVIE (A. M.). - The approximation problem for Banach spaces, Bull. London math. Soc., t. 5, 1973, p. 261-266.

[31] DAVIS (W. J.). - Embedding spaces with unconditional basis, Israel J. Math., t. 20, 1975, p. 189-191.

[32] DAY (M. M.). - Normed linear spaces, 3rd edition. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Ergebnisse der Mathematik, 21).

[33] DECORET (B.). - Suites de décomposition d'un espace de Banach à base inconditionnelle. Noyaux d'opérateurs et isométrie définis sur certains espaces d'opérateurs, Thèse de troisième cycle, Lyon, 1978.

[34] DIESTEL (J.). - Geometry of Banach spaces, Selected topics. - Berlin, Springer-Verlag, 1975 (Lecture Notes in Mathematics, 485).

[35] DITOR (S. Z.). - On a lemma of Milutin concerning averaging operators in continuous function spaces, Trans. Amer. math. Soc., t. 149, 1970, p. 443-452.

[36] DITOR (S. Z.) and HAYDON (R.). - On absolute retracts, $P(S)$, and complemented subspaces of $\mathcal{C}(D^{\omega_1})$, Studia Math., Warszawa, t. 56, 1976, p. 243-251.

[37] DUNFORD (N.) and PETTIS (B. J.). - Linear operations on summable functions, Trans. Amer. math. Soc., t. 47, 1940, p. 323-392.

[38] DVORETZKY (A.). - Some results on convex bodies and Banach spaces, "Proceedings of the international symposium on linear spaces, Jerusalem, 1960", p. 123-160. - Jerusalem, Jerusalem Academic Press, 1961 (A publication of the israel Academy of Sciences and Humanities).

[39] EDELSTEIN (J. S.) and WOJTASZCZYK (P.). - On projections and unconditional bases in direct sums of Banach spaces, Studia Math., Warszawa, t. 56, 1976, p. 263-276.

[40] ENFLO (P.). - A counterexample to the approximation problem in Banach spaces, Acta Math., Uppsala, t. 130, 1973, p. 309-317.

[41] FAKHOURY (H.). - Projections contractantes dans $\mathcal{C}(X)$, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, 10e année, 1970/71, Communication n° 5, 7 p.

[42] FAKHOURY (H.). - Etude du noyau d'un opérateur défini sur l'espace des suites bornées et applications, Bull. Sc. math., 2e série, t. 100, 1975, p. 45-55.

[43] FAKHOURY (H.). - Projections sur l'espace des opérateurs compacts, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, 15e année, 1975/76, n° 6 (non rédigé).

[44] FAKHOURY (H.). - Sur les espaces de Banach ne contenant pas ℓ^1 , Math. Scand. (à paraître).

[45] FIGIEL (T.) and JOHNSON (W. B.). - The approximation property does not imply the bounded approximation property, Proc. Amer. math. Soc., t. 41, 1973, p. 197-200.

[46] GARLING (D. J. H.). - On symmetric sequence spaces, Proc. London math. Soc., Series 3, t. 16, 1966, p. 85-106.

[47] GARLING (D. J. H.). - A class of reflexive symmetric BK-spaces, Canad. J. of Math., t. 21, 1969, p. 602-608.

[48] GOODNER (D. B.). - Projections in normed linear spaces, Trans. Amer. math. Soc., t. 69, 1950, p. 89-108.

[49] GROTHENDIECK (A.). - Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$, Canad. J. of Math., t. 5, 1953, p. 129-173.

[50] GROTHENDIECK (A.). - Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces L^1, Canad. J. of Math., t. 7, 1955, p. 552-561.

[51] GUL'KO (S. P.) and OS'KIN (A. V.). - Isomorphic classification of spaces of continuous functions on totally ordered bicompacta, Funct. Anal., t. 9, 1975, p. 56-57 ; [en russe] Funkcional. Anal. i Priložen, t. 9, 1975, p. 61-62.

[52] HAGLER (J.). - On the structure of S and $C(S)$ for S dyadic, Trans. Amer. math. Soc., t. 214, 1975, p. 415-428.

[53] HAGLER (J.). - A counterexample to several questions about Banach spaces, Studia Math., Warszawa, t. 60, 1977, p. 289-308.

[54] HAGLER (J.) and STEGALL (C.). - Banach spaces whose duals contain complemented subspaces isomorphic to $C[0,1]$, J. funct. Analysis, t. 13, 1973, p. 233-251.

[55] HAYDON (R.). - Injective Banach lattices, Math. Z., t. 156, 1977, p. 19-47.

[56] HAYDON (R.). - Sur les espaces de Banach injectifs qui sont des biduaux, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, 16e année, 1976/77, exposé n° 16, 2 p.

[57] HOLSZTYNKI (W.). - Continuous mappings induced by isometries of spaces of continuous function, Studia Math., Warszawa, t. 26, 1966, p. 133-136.

[58] ISBELL (J. R.) and SEMADENI (Z.). - Projection constants and spaces of continuous functions, Trans. Amer. math. Soc., t. 107, 1963, p. 38-48.

[59] JAMES (R. C.). - A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 37, 1951, p. 174-177.

[60] JOHNSON (W. B.). - Factoring compact operators, Israel J. Math., t. 9, 1971, p. 337-345.

[61] JOHNSON (W. B.). - A complementably universal cunjugate Banach space and its relation to the approximation problem, Israel J. Math., t. 13, 1972, p. 301-310.

[62] JOHNSON (W. B.), ROSENTHAL (H. P.) and ZIPPIN (M.). - On bases, finite dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces, Israel J. Math., t. 9, 1971, p. 488-506.

[63] JOHNSON (W. B.) and SZANKOWSKI (A.). - Complementably universal Banach spaces Studia Math., Warszawa, t. 58, 1976, p. 91-97.

[64] JOHNSON (W. B.) and ZIPPIN (M.). - Separable L_1 preduals are quotients of $C(\Delta)$, Israel J. Math., t. 16, 1973, p. 198-202.

[65] JONAC (M.-L.) et SAMUEL (C.). - Sur les sous-espaces complémentés de $C(S)$, Bull. Sc. math., 2e série, t. 94, 1970, p. 159-163.

[66] KADEC (M. I.). - On complementably universal Banach spaces, Studia Math., Warszawa, t. 40, 1971, p. 85-89.

[67] KADETS (M. I.) and MITYAGIN (B. S.). - Complemented subspaces in Banach spaces, Russian math. Surveys, t. 28, 1973, fasc. 6, p. 77-95.

[68] KAKUTANI (S.). - Some characterizations of Euclidean spaces, Japan J. of Math., t. 16, 1939, p. 93-97.

[69] KAKUTANI (S.). - Concrete representation of abstract (L)-spaces and the meanergodic theorem, Annals of Math., t. 42, 1941, p. 523-537.

[70] KELLEY (J. L.). - Banach spaces with the extension property, Trans. Amer. math. Soc., t. 72, 1952, p. 323-326.

[71] KHINTCHINE (A.). - Über dyadische Brüche, Math. Z., t. 18, 1923, p. 109-116.

[72] KISLJAKOV (S. V.). - Classification of spaces of continuous functions on the ordinals, Siberian math. J., t. 16, 1975, p. 226-231 ; [en russe], Sibirsk. mat. Ž., t. 16, 1975, p. 293-300.

[73] KÖTHE (G.). - Hebbare lokalekonvexe Räume, Math. Annalen, t. 165. 1966, p. 181-195.

[74] KRIVINE (J.-L.). - Sous-espaces et cônes convexes dans les espaces L^p , Thèse Sc. math., Paris, 1967.

[75] KURATOWSKI (C.). - Topologie. I, 4e édition. - Warszawa, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1958 (Polska Akademia Nauk. Monografie matematyczne, 20).

[76] KWAPIEN (S.). - On Enflo's example of a Banach space without the approximation property, Séminaire Goulaouic-Schwartz : Equation aux dérivées partielles et analyse fonctionnelle, 1972/73, exposé n° 8, 9 p.

[77] LABBE (M. A.). - Isomorphisms of continuous function spaces, Studia Math., Warszawa, t. 52, 1975, p. 221-231.

[78] LACEY (E. H.). - The isometric theory of the classical Banach spaces. - Berlin, Springer-Verlag, 1974 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 208).

[79] LAZAR (A. I.) and LINDENSTRAUSS (J.). - Banach spaces whose duals are L_1 spaces and their representing matrices, Acta Math., Uppsala, t. 126, 1971, p. 165-193.

[80] LEWIS (D. R.) and STEGALL (C.). - Banach spaces whose duals are isomorphic to $\ell_1(\Gamma)$, J. funct. Analysis, t. 12, 1973, p. 177-187.

[81] LINDENSTRAUSS (J.). - Extension of compact operators. - Providence, American mathematical Society, 1964 (Memoirs of the American mathematical Society, 48).

[82] LINDENSTRAUSS (J.). - On complemented subspaces of m , Israel J. Math., t. 5, 1967, p. 153-156.

[83] LINDENSTRAUSS (J.). - A remark on $\mathcal{L}^1$-spaces, Israel J. Math., t. 8, 1970, p. 80-82.

[84] LINDENSTRAUSS (J.). - A remark on symmetric bases, Israel J. Math., t. 13, 1972, p. 317-320.

[85] LINDENSTRAUSS (J.). - Weakly compact sets - Their topological properties and the Banach spaces they generate, "Symposium on infinite dimensional topology, Baton Rouge, 1967", p. 235-274. - Princeton, Princeton University Press, 1972 (Annals of Mathematics Studies, 69).

[86] LINDENSTRAUSS (J.) and PELCZYNSKI (A.). - Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications, Studia Math., Warszawa, t. 29, 1968, p. 275-326.

[87] LINDENSTRAUSS (J.) and PELCZYNSKI (A.). - Contribution to the theory of the classical Banach spaces, J. funct. Analysis, t. 8, 1971, p. 225-249.

[88] LINDENSTRAUSS (J.) and ROSENTHAL (H. P.). - The $\mathcal{L}_p$-spaces, Israel J. Math., t. 7, 1969, p. 325-349.

[89] LINDENSTRAUSS (J.) and TZAFRIRI (L.). - On the complemented subspaces problem, Israel J. Math., t. 9, 1971, p. 263-269.

[90] LINDENSTRAUSS (J.) and TZAFRIRI (L.). - On Orlicz sequence spaces, Israel J. Math., t. 10, 1971, p. 379-390.

[91] LINDENSTRAUSS (J.) and TZAFRIRI (L.). - On Orlicz sequence spaces, II, Israel J. Math., t. 11, 1972, p. 355-379.

[92] LINDENSTRAUSS (J.) and TZAFRIRI (L.). - On Orlicz sequence spaces, III, Israel J. Math., t. 14, 1973, p. 368-389.

[93] LINDENSTRAUSS (J.) and TZAFRIRI (L.). - The uniform approximation property on Orlicz spaces, Israel J. Math., t. 23, 1976, p. 142-155.

[94] LINDENSTRAUSS (J.) and TZAFRIRI (L.). - Classical Banach spaces. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 338).

[95] LINDENSTRAUSS (J.) and WULBERT (D. E.). - On the classification of the Banach spaces whose duals are L_1-spaces, J. funct. Analysis, t. 4, 1969, p. 332-349.

[96] LORENTZ (G. G.). - Some new functional spaces, Annals of Math., 2nd Series, t. 51, 1950, p. 37-55.

[97] LOTZ (H. P.). - Extensions and liftings of positive linear mappings on Banach lattices, Trans. Amer. math. Soc., t. 211, 1975, p. 85-100.

[98] MAHARAM (D.). - On homogeneous measure algebras, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 28, 1942, p. 108-111.

[99] MARCINKIEWICZ (J.). - Quelques théorèmes sur les séries orthogonales lacunaires, Ann. Soc. polon. Math., t. 17, 1938, p. 51-56.

[100] MAZURKIEWICZ (S.) et SIERPINSKI (W.). - Contribution à la topologie des ensembles dénombrables, Fund. Math., Warszawa, t. 1, 1920, p. 17-27.

[101] MICHAEL (E.). - Continuous selections, I, Annals of Math., Series 2, t. 63, 1956, p. 361-382.

[102] MILUTIN. - Isomorphisms of spaces of continuous functions..., [en russe], Teor. Funkc., Kharkov, t. 2, 1966, p. 150-156.

[103] NACHBIN (L.). - A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations, Trans. Amer. math. Soc., t. 68, 1950, p. 28-46.

[104] ORLICZ (M. W.). - Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B , Bull. intern. Acad. polon. Sc., Série A, 1932, p. 207-220.

[105] PALEY (R. E. A. C.). - A remarkable series of orthogonal functions, I, Proc. London math. Soc., Series 2, t. 34, 1932, p. 241-264.

[106] PELCZYNSKI (A.). - On the isomorphism of the spaces m and M , Bull. Acad. polon. Sc., Série 3, t. 6, 1958, p. 695-696.

[107] PELCZYNSKI (A.). - Projection in certain Banach spaces, Studia Math., Warszawa, t. 19, 1960, p. 209-228.

[108] PELCZYNSKI (A.). - Banach spaces on which every unconditionaly converging operator is weakly compact, Bull. Acad. polon. Sc., Série 3, t. 10, 1962, p. 641-648.

[109] PELCZYNSKI (A.). - On strictly singular and strictly cosingular operators. I : Strictly singular and strictly cosingular operators in $C(S)$-spaces, Bull. Acad. polon. Sc., Série 3, t. 13, 1965, p. 31-36.

[110] PELCZYNSKI (A.). - Linear extensions, linear averagings and their applications to linear topological classification of spaces of continuous functions, Rozpraw Mat., t. 58, 1968, 92 p.

[111] PELCZYNSKI (A.). - On Banach spaces containing $L^1(\mu)$, Studia Math., Warszawa, t. 30, 1968, p. 231-246.

[112] PELCZYNSKI (A.). - On $C(S)$-subspaces of separable Banach spaces, Studia Math., Warszawa, t. 31, 1968, p. 513-522.

[113] PELCZYNSKI (A.). - Universal bases, Studia Math., Warszawa, t. 32, 1969, p. 247-268.

[114] PELCZYNSKI (A.). - Any separable Banach space with the bounded approximation property is a complemented space of a Banach space with a basis, Studia Math., Warszawa, t. 40, 1971, p. 239-243.

[115] PELCZYNSKI (A.). - Banach spaces of analytics functions and absolutely summing operators. - Providence, American mathematical Society, 1977 (CBMS Regional Conference, Series in Mathematics, 30).

[116] PELCZYNSKI (A.) and WOJTASZCZYK (P.). - Banach spaces with finite dimensional expansions of identity and universal bases of finite dimensional subspaces, Studia Math., Warszawa, t. 40, 1971, p. 91-108.

[117] PITT (H. R.). - A note on bilinear forms, J. London math. Soc., t. 11, 1936, p. 174-180.

[118] ROSENTHAL (H. P.). - Projections onto translation-invariant subspaces of $L^p(G)$. - Providence, American mathematical Society, 1966 (Memoirs of the American mathematical Society, 63).

[119] ROSENTHAL (H. P.). - On totally incomparable Banach spaces, J. funct. Analysis, t. 4, 1962, p. 167-175.

[120] ROSENTHAL (H. P.). - On the subspaces of L^p $(p > 2)$ spanned by sequences of independent random variables, Israel J. Math., t. 8, 1970, p. 273-303.

[121] ROSENTHAL (H. P.). - On relatively disjoint families of measures with some applications to Banach space theory, Studia Math., Warszawa, t. 37, 1970, p. 13-36.

[122] ROSENTHAL (H. P.). - On injective Banach spaces and the spaces $L^\infty(\mu)$ for finite measures μ, Acta Math., Uppsala, t. 124, 1970, p. 205-248.

[123] ROSENTHAL (H. P.). - On factors of $C([0, 1])$ with non separable dual, Israel J. Math., t. 3, 1972, p. 361-378.

[124] ROSENTHAL (H. P.). - A characterization of Banach spaces containing ℓ^1, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 71, 1974, p. 2411-2413.

[125] ROSENTHAL (H. P.). - The Banach spaces $C(K)$ and $L^p(\mu)$, Bull. Amer. math. Soc., t. 81, 1975, p. 763-781.

[126] SAINT-RAYMOND (J.). - Dérivation par rapport à une application. Existence d'éxaves markoviens, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, 13e année, 1973/74, Communication n° 2, 9 p.

[127] SAMUEL (C.). - Sur certains espaces $C_\sigma(S)$ et sur les sous-espaces complémentés de $C(S)$, Bull. Sc. math., Série 2, t. 95, 1971, p. 65-82.

[128] SEMADENI (Z.). - Banach spaces non isomorphic to their cartesian squares, I, Bull. Acad. polon. Sc., 3e série, t. 8, 1960, p. 81-84.

[129] SIMONS (S.). - Local reflexivity and (p, q)-summing maps, Math. Annalen, t. 198, 1972, p. 335-344.

[130] SOBCZYK (A.). - Projection of the space (m) on its subspace (c_0), Bull. Amer. math. Soc., t. 47, 1941, p. 938-947.

[131] STEGALL (C.). - Banach spaces whose duals contain $\ell^1(\Gamma)$ with applications to the study of dual $L_1(\mu)$-spaces, Trans. Amer. math. Soc., t. 176, 1973, p. 463-477.

[132] STERN (J.). - Propriétés locales et ultrapuissances d'espaces de Banach, Séminaire Maurey-Schwartz : Espaces L^p, applications radonifiantes et géométrie des espaces de Banach, 1974/75, Exposés n° 7 et 8, 16 p. et 12 p.

[133] STONE (M. H.). - Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. Amer. math. Soc., t. 41, 1937, p. 375-481.

[134] SZANKOWSKI (A.). - Embedding Banach spaces with unconditional bases into spaces with symmetric bases, Israel J. Math., t. 15, 1973, p. 53-59.

[135] SZANKOWSKI (A.). - Subspaces without approximation property (à paraître).

[136] SZANKOWSKI (A.). - The space $B(H)$ has not approximation property (à paraître).

[137] SZLENK (W.). - The non-existence of a separable reflexive Banach space universal for all separable reflexive Banach spaces, Studia Math., Warszawa, t. 30, 1968, p. 53-61.

[138] TALAGRAND (M.). - Espaces de Banach K-analytiques (à paraître).

[139] THORP (E. O.). - Projections onto the subspaces of compact operators, Pac. J. Math., t. 10, 1960, p. 693-696.

[140] TONG (A. E.) and WILKEN (D. R.). - The uncomplemented subspace $K(E, F)$, Studia Math., Warszawa, t. 37, 1971, p. 227-236.

[141] VEECH (W. A.). - Short proof of Sobczyk's theorem, Proc. Amer. math. Soc. t. 28, 1971, p. 627-628.

[142] WOJTASZCZYK (P.). - On separable Banach spaces containing all separable reflexive Banach spaces, Studia Math., Warszawa, t. 37, 1970, p. 197-202.

[143] WOJTASZCZYK (P.). - On complemented subspaces and unconditional bases in $\ell_p + \ell_q$, Studia Math., Warszawa, t. 47, 1973, p. 197-206.

[144] WOLFE (J. E.). - Injective Banach spaces of type $C(T)$, Thèse, Berkeley, 1971.

[145] ZIPPIN (M.). - On some subspaces of Banach whose duals are L_1-spaces, Proc. Amer. math. Soc., t. 23, 1969, p. 378-385.

[146] ZIPPIN (M.). - The separable extension problem, Israel J. Math., t. 26, 1977, p. 372-387.

[147] ZYGMUND (A.). - Trigonometric series, 2nd edition. - Cambridge, University Press, 1959.

(Texte reçu le 8 mai 1978)

Marc ROGALSKI
38 rue Bezout
75014 PARIS