Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Erik G. F. Thomas

Représentations intégrales dans les cônes convexes conucléaires et applications

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 17, n° 1 (1977-1978), exp. n° 9, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_1_A4_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
17e année, 1977/78, n° 9, 12 p.

19 janvier 1978

REPRÉSENTATIONS INTÉGRALES DANS LES CÔNES CONVEXES CONUCLÉAIRES ET APPLICATIONS

par Erik G. F. THOMAS

Résumé. - On met en évidence une nouvelle classe de cônes convexes, les cônes conucléaires, pour laquelle on a, moyennant des hypothèses de séparabilité, des théorèmes d'existence et d'unicité de représentation intégrale. Les cônes bien coiffés sont un cas particulier des cônes conucléaires. On donne des applications aux cônes de noyaux de type positif sur un espace nucléaire.

1. Mesures coniques localisables.

Soit F un espace localement convexe sur $\mathbb{R}$, F' l'espace dual, et soit S l'ensemble des fonctions suprémum d'un nombre fini de formes linéaires continues

(1) $$\varphi = \sup_i \ell_i \ .$$

Soit $h(F)$ l'espace vectoriel réticulé $S-S$. Notons

$$h^+(F) = \{\varphi \in h(F) \ ; \ \varphi(x) \geqslant 0 \ , \ \forall \ x \in F\} \ .$$

Rappelons qu'une mesure conique sur F est une forme linéaire $\mu : h(F) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\mu(\varphi) \geqslant 0$, pour tout $\varphi \in h^+(F)$.

Soit $\Gamma \subset F$ un cône faiblement fermé. Alors on dit que μ est portée par Γ si $\mu(\varphi) \geqslant 0$, pour tout φ telle que $\varphi \geqslant 0$ sur Γ.

Rappelons enfin que la résultante $r(\mu)$ d'une mesure conique μ est l'élément a du complété faible de F tel que $\ell(a) = \mu(\ell)$, pour tout $\ell \in F'$ (voir [1] ou [2]).

Définition 1. - Nous dirons que μ est localisable s'il existe une mesure de Radon $m \geqslant 0$ sur $F \setminus \{0\}$ telle que $\int |\ell| \, dm < +\infty$, pour tout $\ell \in F'$, et que

(2) $$\mu(\varphi) = \int \varphi \, dm \ ,$$

quel que soit $\varphi \in h(F)$.

Nous disons alors que m est une localisation de μ et, si m est concentrée sur une partie A de $F \setminus \{0\}$, que μ est localisable sur A.

Toute mesure conique localisable sur un compact K de F (voir [1], p. 335) est localisable au sens ci-dessus, notamment sur $K \setminus \{0\}$.

Remarque. - G. CHOQUET a également considéré ce type de localisation générale (Cours de Maryland, 1971).

Il est bien connu qu'une mesure conique localisable $\neq 0$ possède une infinité de localisations.

Dans les propositions suivantes, on suppose que μ est une mesure conique localisable.

PROPOSITION 1. - *Soit* Γ *un cône faiblement fermé et soit* m *une localisation de* μ . *Alors* μ *est portée par* Γ *si, et seulement si,* m *est concentrée sur* Γ (*voir* [14], 6.5).

PROPOSITION 2. - *Soit* Γ *un cône quelconque* (*de sommet* 0) *et soient* m_1 *et* m_2 *deux localisations de* μ . *Alors* m_1 *est concentrée sur* Γ *si, et seulement si,* m_2 *est concentrée sur* Γ ([14], 6.1) (m *est concentrée sur un ensemble* A *si* A *est* m*-mesurable et* $m(F \setminus A) = 0$).

Nous dirons alors que μ *est concentrée sur* Γ .

Notons $\mathfrak{M}^+(\Gamma)$ l'ensemble des mesures coniques localisables concentrées sur Γ , tel que $r(\mu) \in F$.

PROPOSITION 3. - *Soit* μ *concentrée sur* Γ *et soit* $f : \Gamma \longrightarrow \overline{\underset{\sim}{R}}$ *une fonction positivement homogène de degré quelconque. Soient* m_1 *et* m_2 *deux localisations de* μ . *Alors* f *est* m_1*-mesurable si, et seulement si,* f *est* m_2*-mesurable* (cf. [14], 4.1). *Nous dirons alors que* f *est* μ*-mesurable.*

PROPOSITION 4. - *Soit* μ *concentrée sur* Γ *et soit* $p : \Gamma \longrightarrow \underset{\sim}{R}_+$ *une fonction positivement homogène de degré* 1 , μ*-mesurable, et telle que* $p(x) > 0$, *pour tout* $x \in \Gamma \setminus \{0\}$. *Posons*

(3) $$\mathbb{S} = \{x \in \Gamma \ ; \ p(x) = 1\} .$$

Alors μ *possède une localisation et une seule sur* $\mathbb{S}$.

En particulier, s'il existe $\ell \in F'$, *avec* $\ell(x) > 0$, *pour tout* $x \in \Gamma \setminus \{0\}$, μ *possède une localisation et une seule sur l'ensemble*

(4) $$A = \{x \in \Gamma \ ; \ \ell(x) = 1\} ,$$

base de Γ (*voir* [14]).

Remarque. - Alors qu'il n'existe pas toujours de base, on démontre qu'il existe toujours une fonction p du type considéré ci-dessus. Si F est métrisable ou si F' contient une partie dénombrable séparant les points de Γ , on peut facilement construire une fonction borélienne p avec les propriétés indiquées.

En pratique, c'est l'ensemble $\mathbb{S}$ qui se présente plutôt que la fonction p . Le corollaire suivant est alors utile.

COROLLAIRE 1. - *Soit* μ *concentrée sur* Γ *et soit* $\mathbb{S} \subset \Gamma \setminus \{0\}$ *une partie* $\mathcal{K}$*-analytique rencontrant chaque rayon de* Γ *en un point et un seul. Alors* μ *possède une localisation et une seule sur* $\mathbb{S}$.

En effet, la fonction $p : \Gamma \longrightarrow \underset{\sim}{R}_+$, positivement homogène de degré 1 , égale à 1 sur $\mathbb{S}$, est alors universellement mesurable, et $\mathbb{S}$ est donné par (3).

2. Représentations intégrales.

Soit maintenant Γ un cône convexe fermé saillant dans F.

Soit $\text{ext}(\Gamma)$ la réunion des génératrices extrémales de Γ. Comme $\text{ext}(\Gamma)$ est un cône, les définitions précédentes peuvent lui être appliquées. Notons $\mathfrak{M}^+(\text{ext}\,\Gamma)$ l'ensemble des mesures coniques localisables concentrées sur $\text{ext}(\Gamma)$ telles que $r(\mu) \in F$ (d'où $r(\mu) \in \Gamma$).

Définition 2. - Nous dirons qu'un point $a \in \Gamma$ possède une représentation intégrale (unique) au moyen de génératrices extrémales s'il existe $\mu \in \mathfrak{M}^+(\text{ext}\,\Gamma)$ (unique) telle que $a = r(\mu)$.

Cette définition est bien en accord avec la terminologie classique : En effet, si Γ possède une base A (non nécessairement bornée) les points extrémaux de A sont les points de A appartenant aux génératrices extrémales de Γ. Alors, d'après la proposition 4, la définition signifie qu'il existe une mesure de Radon m (unique) sur l'ensemble des points extrémaux de A, telle que $\int |\ell|\, dm < +\infty$ et que $\ell(a) = \int \ell(x)\, dm(x)$, pour tout $\ell \in F'$.

Dans le cas où F ne possède pas de base, bornons-nous à indiquer la proposition suivante qu'on déduit facilement du corollaire 1.

PROPOSITION 5. - Supposons qu'il existe un espace topologique $\mathcal{K}$-analytique T et une application continue $t \longrightarrow e_t$ de T dans $\text{ext}(\Gamma) \setminus \{0\}$ telle que toute génératrice extrémale contient e_t, pour un $t \in T$ et un seul. Alors $a \in \Gamma$ possède une représentation intégrale (unique) selon la définition 2 si, et seulement si, il existe une mesure de Radon m sur T (unique) telle que $\int |\ell(e_t)|\, dm(t) < +\infty$ et $\ell(a) = \int \ell(e_t)\, dm(t)$, pour tout $\ell \in F'$ (voir [14], 3.4).

Le problème est maintenant de savoir, dans quels cônes convexes, tout élément possède une représentation intégrale (unique) au moyen de génératrices extrémales.

De façon précise, pour quels cônes Γ l'application $r : \mathfrak{M}^+(\text{ext}\,\Gamma) \longrightarrow \Gamma$ est-elle surjective (respectivement bijective) ?

Afin de simplifier les énoncés, disons que Γ possède la propriété de représentation intégrale (R. I.) si

(a) Pour tout cône convexe fermé $\Gamma_1 \subset \Gamma$, l'application $r : \mathfrak{M}^+(\text{ext}\,\Gamma_1) \longrightarrow \Gamma_1$ est surjective ;

(b) Cette application est bijective si, et seulement si, Γ_1 est réticulé pour son ordre propre.

Alors le théorème classique de CHOQUET dit que tout cône à base compacte métrisable possède la propriété R. I. ; le théorème de EDGAR [5] affirme le résultat analogue pour tout cône à base fermée bornée séparable dans un Banach ayant la propriété de Radon-Nikodyn (voir aussi [4] pour un théorème d'existence (§ 5), et pour un exemple intéressant d'inexistence (§ 6)).

D'autre part, les résultats de CHOQUET sur les cônes faiblement complets montrent que tout cône convexe fermé saillant dans $\underset{\sim}{R}^{N}$, et, plus généralement, tout cône convexe saillant faiblement complet et faiblement métrisable possède la propriété R. I. (par rapport à la topologie faible). Remarquer que l'exemple le plus simple d'un tel cône, $\underset{\sim}{R}_{+}^{N}$, ne possède pas de base.

Ces cônes sont tous réunion de chapeaux métrisables ([2], Vol. II, corollaire 30.19). Il est clair que, pour un cône, réunion de chapeaux métrisables, non nécessairement faiblement complet, l'application $r : \mathfrak{M}^{+}(\mathrm{ext}\ \Gamma) \longrightarrow \Gamma$ est surjective (les éléments extrémaux d'un chapeau étant contenus dans $\mathrm{ext}(\Gamma)$). En fait, le théorème d'unicité est encore valable dans ce cas (voir le corollaire 4 du théorème 1 ci-dessous), donc tout cône convexe fermé, réunion de chapeaux métrisables, possède la propriété R. I. Nous mettons en évidence une classe, un peu plus grande que celle-ci, de cônes qui possèdent encore la propriété R. I. (théorème 1), ce qui va permettre un résultat très simple dans le cas des espaces conucléaires (théorème 2).

3. Espaces et cônes conucléaires.

Rappelons la définition des espaces conucléaires. Soit F un e. l. c. séparé, qu'on suppose quasi-complet pour simplifier les énoncés.

Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties convexes, symétriques, fermées et bornées. On suppose que $\mathfrak{S}$ contient avec A aussi λA, pour $\lambda \geq 0$.

À chaque ensemble $A \in \mathfrak{S}$ est associé l'espace de Banach $F_A = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda A$, de boule unité A. Pour $A \subset B$, on a l'injection continue $F_A \hookrightarrow F_B$; d'autre part, l'inclusion $F_A \hookrightarrow F_B$ est continue.

Définition 3 ([10], p. 227). - L'espace F est $\mathfrak{S}$-conucléaire si, pour tout $A \in \mathfrak{S}$, il existe $B \in \mathfrak{S}$, avec $A \subset B$, tel que l'inclusion $F_A \subset F_B$ soit une application nucléaire.

On dit que F est conucléaire si F est $\mathfrak{S}$-conucléaire, $\mathfrak{S}$ étant l'ensemble de toutes les parties convexes, symétriques, fermées et bornées.

Remarque. - Dans un espace quasi-complet $\mathfrak{S}$-conucléaire, les ensembles $A \in \mathfrak{S}$ sont compacts et métrisables. En effet, avec les notations de la définition 3, l'application nucléaire $F_A \hookrightarrow F_B$ est compacte, donc A est relativement compact dans F_B, mais étant fermé dans F, A est compact dans F_B, et a fortiori compact et métrisable dans F. Donc, dans un espace quasi-complet conucléaire, toutes les parties fermées bornées sont compactes métrisables.

Les exemples les plus importants d'espaces quasi-complets conucléaires sont les espaces $\mathfrak{N}'_b$, duaux forts d'espaces nucléaires tonnelés (e. g. $\mathfrak{D}'(\underset{\sim}{R}^n)$). En partilier, tout espace de Frechet nucléaire est un espace conucléaire (e. g. $\mathcal{C}^{\infty}(\underset{\sim}{R}^n)$).

On peut modifier la définition des espaces conucléaires de la façon suivante : Au lieu d'exiger que les inclusions $F_A \hookrightarrow F_B$ soient nucléaires, on stipule que celles-ci soient 1-sommantes. Toute application nucléaire étant 1-sommante et le produit de deux applications 1-sommantes étant nucléaire ([9], § 3.3.5), cela donne une définition équivalente.

L'ensemble B étant convexe fermé borné et symétrique, posons

$$P_B(x) = \inf\{\lambda \geq 0 \;;\; x \in \lambda B\} \,. \tag{5}$$

On voit facilement que l'inclusion $F_A \subset F_B$ est 1-sommante si, et seulement si, il existe $M \geq 0$ tel que, pour toute famille finie $(x_i)_{i\in I}$, avec $\sum_{i\in J} x_i \in A$ pour tout $J \subset I$, l'on a

$$\sum_{i\in I} P_B(x_i) \leq M$$

(ce qui implique $\sum_{i\in I} P_{MB}(x_i) \leq 1$; voir [9], § 2.2.1).

Nous allons définir les cônes conucléaires en analogie avec ceci.

Soit F un e. l. c. séparé, et soit $\Gamma \subset F$ un cône convexe. On suppose que $\mathfrak{S}$ est un ensemble de parties $A \subset \Gamma$, convexes, compactes, contenant 0, tel que $A \in \mathfrak{S}$ implique $\lambda A \in \mathfrak{S}$, pour tout $\lambda \geq 0$, et tel que $\sum_{A\in\mathfrak{S}} A = \Gamma$.

<u>Définition</u> 4. - Nous dirons que Γ est $\mathfrak{S}$-conucléaire si $\mathfrak{S}$ possède une des propriétés <u>équivalentes</u> suivantes :

(i) Pour tout $A \in \mathfrak{S}$, il existe $B \in \mathfrak{S}$ tel que, pour toute famille finie $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de Γ, avec $\sum_{i\in I} x_i \in A$, on a $\sum_{i\in I} P_B(x_i) \leq 1$.

(ii) Pour tout $A \in \mathfrak{S}$, il existe $B \in \mathfrak{S}$ tel que $A \cap \mathrm{co}(\Gamma \setminus B) = \emptyset$ ($\mathrm{co}(E)$ désignant l'enveloppe convexe de l'ensemble E).

La vérification de l'équivalence est immédiate : Plus précisément, pour A donné, les propriétés (i) et (ii) sont équivalentes pour B.

Si $\mathfrak{S}$ est l'ensemble de toutes les parties convexes, compactes, contenant 0, de Γ, on dit que Γ est cc-<u>conucléaire</u>.

4. Résultats principaux.

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> F <u>un espace quasi-complet et soit</u> Γ <u>un cône convexe fermé</u> $\mathfrak{S}$-<u>conucléaire, les ensembles de</u> $\mathfrak{S}$ <u>étant métrisables. Alors</u>

(A) <u>Tout point</u> $a \in \Gamma$ <u>est la résultante d'une mesure conique</u> $\mu \in \mathfrak{M}^+(\mathrm{ext}\,\Gamma)$.

(B) <u>Tout</u> $a \in \Gamma$ <u>est la résultante d'une</u> $\mu \in \mathfrak{M}^+(\mathrm{ext}\,\Gamma)$ <u>unique si, et seulement si,</u> Γ <u>est réticulé.</u>

COROLLAIRE 2. - $\Gamma = \overline{\mathrm{co}}\,\mathrm{ext}(\Gamma)$.

COROLLAIRE 3. - Γ <u>possède la propriété R. I.</u>

En effet, si $\Gamma_1 \subset \Gamma$ est un sous-cône convexe fermé, Γ_1 est $\mathfrak{S}_1$-conucléaire,

$\mathfrak{S}_1$ étant l'ensemble des parties de la forme $\Gamma_1 \cap A$, où $A \in \mathfrak{S}$. Le théorème s'applique donc aussi bien à Γ_1.

COROLLAIRE 4. - Si Γ est un cône convexe fermé, réunion de chapeaux métrisables, Γ possède la propriété R. I.

En effet, Γ est alors $\mathcal{K}$-conucléaire, $\mathcal{K}$ étant un ensemble de chapeaux métrisables de réunion Γ.

Remarques.

1° Le cas d'unicité peut être précisé : Sous les hypothèses du théorème 1, on a

(B') Le point $a \in \Gamma$ est la résultante d'une $\mu \in \mathfrak{M}^+(\text{ext}\,\Gamma)$ unique si, et seulement si, la face engendrée par a est réticulée.

2° L'hypothèse que l'espace soit quasi-complet n'est pas essentiel. Il suffit que l'enveloppe convexe ferméed'un compact de Γ soit compacte.

3° Si, dans le théorème 1, on ne suppose plus que les ensembles de $\mathfrak{S}$ sont métrisables, on ne sait pas si Γ possède au moins une génératrice extrémale.

THÉORÈME 2. - Soit F un espace quasi-complet conucléaire. Soit Γ un cône convexe fermé tel que, pour tout $a \in \Gamma$, l'ensemble $\Gamma \cap (a - \Gamma)$ soit compact. Alors les conclusions (A) et (B) du théorème 1 sont valables pour Γ, autrement dit Γ possède la propriété R. I.

Remarque. - Les ensembles fermés et bornés de F étant compacts, il suffit que les ensembles $\Gamma \cap (a - \Gamma)$ soient bornés. Il en résulte le corollaire suivant.

COROLLAIRE 5. - Tout cône convexe saillant faiblement complet d'un espace conucléaire possède la propriété R. I.

En effet, on sait alors que les ensembles $\Gamma \cap (a - \Gamma)$ sont faiblement compacts, donc bornés ([2], Vol. II, proposition 30.10).

Indications des démonstrations (pour plus de détails, voir [12] et [13] ou [14]). - Le théorème 2 est une conséquence du théorème 1, grâce à la proposition suivante et au fait que les compacts d'un espace conucléaire sont métrisables.

PROPOSITION 6. - Soit F un espace quasi-complet conucléaire et soit Γ un cône convexe fermé tel que $\Gamma \cap (a - \Gamma)$ soit compact, pour tout $a \in \Gamma$. Alors Γ est cc-conucléaire.

LEMME 1. - Soit $K \subset \Gamma$ compact. Alors l'ensemble $K^* = \Gamma \cap (K - \Gamma)$ est compact (voir [13]).

Ceci admis, soit $A \subset \Gamma$ convexe compact contenant l'origine. Soit $A_s = A^* - A^*$; c'est un convexe compact symétrique et on peut lui associer un convexe compact B_s selon notre 2e définition de conucléarité de F. Soit $B = B_s \cap \Gamma$. Alors, si

$x_i \in \Gamma$ et $\sum_{i \in I} x_i \in A$, on a $\sum_{i \in J} x_i \in A^* \subset A_s$, pour tout $J \subset I$, d'où $\sum_{i \in I} P_B(x_i) \leq 1$ (noter que $P_{B|\Gamma} = P_{B_s|\Gamma}$) et la preuve de la proposition 6 en résulte.

Preuve du théorème 1.

Existence. - Observons d'abord que si B est associé avec A, comme dans la définition 4, on a $A^* \subset B \subset B^*$ (notation du lemme ci-dessus), donc A^* est compact métrisable et Γ est $\mathfrak{S}^*$-conucléaire, où $\mathfrak{S}^*$ est l'ensemble des parties de la forme A^*, où $A \in \mathfrak{S}$. On peut donc, sans restreindre la généralité, supposer que $A = A^*$, pour tout $A \in \mathfrak{S}$.

Soit $a \in \Gamma$, $a \in A \in \mathfrak{S}$ et soit B associé avec A comme dans la définition 4, B étant compact métrisable, il existe une suite $\ell_n \in F'$ telle que la série $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |\ell_n(x)|$ converge uniformément sur B, et que f soit strictement sous-additif sur B ($x = x_1 + x_2 \in B$, x_i non proportionnels implique $f(x) < f(x_1) + f(x_2)$). Alors on démontre que, si m est une mesure de Radon sur B maximisant l'intégrale $\int f\,dm$ parmi les mesures m sur B, avec $\int dm \leq 1$ et $\int x\,dm(x) = a$, m est concentrée sur $\mathrm{ext}(\Gamma)$, et la mesure conique localisée en m convient.

Unicité. - Soit $a \in \Gamma$. Si la face engendrée par a est réticulée, posons, pour $\varphi \in h(F)$,

$$\mu_a(\varphi) = \lim_{\sum x_i = a,\, x_i \in \Gamma} \sum \varphi(x_i) \,, \tag{6}$$

la limite étant prise suivant l'ensemble filtrant croissant des partitions finies de a au moyen d'éléments de Γ, ordonné par la relation "plus fin que" (lemme de décomposition de Riesz).

Si $a \in A$ et B est associé avec A selon la définition 4, on montre que la mesure conique μ_a est localisable sur B. L'unicité résulte alors des deux lemmes suivants.

LEMME 2. - Si $\mu \in \mathfrak{M}^+(\Gamma)$ avec $r(\mu) = a$, on a $\mu \prec \mu_a$ (i. e. $\mu(\varphi) \leq \mu_a(\varphi)$ $\forall\, \varphi \in S$).

LEMME 3. - Si $\mu \in \mathfrak{M}^+(\mathrm{ext}\,\Gamma)$, μ est maximale dans $\mathfrak{M}^+(\Gamma)$ selon l'ordre de CHOQUET. Il en résulte donc que, si $r(\mu) = a$, et $\mu \in \mathfrak{M}^+(\mathrm{ext}\,\Gamma)$, $\mu = \mu_a$.

Inversement, si l'application $r : \mathfrak{M}^+(\mathrm{ext}\,\Gamma) \longrightarrow \Gamma$ est une bijection, Γ est réticulé ; cela résulte du fait que, sous l'hypothèse du théorème 1, le cône $\mathfrak{M}^+(\mathrm{ext}\,\Gamma)$ est lui-même réticulé.

Remarque. - Pour la preuve de l'unicité, on ne se sert que de la propriété de décomposition de Riesz, qui est donc, pour les cônes considérés dans le théorème 1, équivalente au fait que Γ est réticulé.

5. Cônes conucléaires et cônes bien coiffés.

On peut se demander s'il existe des cônes conucléaires qui ne sont pas bien coiffés. On doit à GOULLET de RUGY un exemple d'un cône conucléaire qui n'est pas bien coiffé.

Exemple. - $F = \mathfrak{M}(0\,,\,1) = \mathcal{C}(0\,,\,1)'$, muni de la topologie $\star$ faible. Soit δ la masse unité en 0 (ou n'importe quel autre point déterminé), soit

$$K = \{\mu - \delta \;;\; \|\mu\| < 1\}$$

et soit $\Gamma = \bigcup_{\lambda>0} \lambda K$. Alors GOULLET de RUGY ([6], proposition 2.3) a montré que Γ est $\mathfrak{S}$-conucléaire, $\mathfrak{S}$ étant l'ensemble des homothétiques de K (si $A = \lambda K$, on peut prendre $B = 2\lambda K$, K est conique dans la terminologie de [6]), mais que Γ n'est pas bien coiffé.

D'autre part, le cône Γ est fermé dans F . On le voit en observant que tout élément de Γ peut être écrit sous la forme $\lambda(\mu - \delta)$ ou $\|\mu\| \leq 1$ et où μ ne comporte pas de masse en 0 , de sorte que $\|\mu - \delta\| = \|\mu\| + 1 \geq 1$, et en utilisant le théorème de Banach-Dieudonné, il suffit de vérifier que les intersections de Γ avec les ensembles fermés bornés sont fermés, ce qui est immédiat.

Dans un certain sens, ce cône est "tout juste fermé". Si l'on remplace F par $\mathcal{C}^1(0\,,\,1)'$, l'adhérence de Γ contient évidemment δ' ; a fortiori si l'on remplace F par $\mathcal{C}^\infty(0\,,\,1)'$. Il nous manque encore un exemple d'un cône du type considéré dans le théorème 2 qui ne soit pas bien coiffé.

Par contre, on a la proposition suivante.

PROPOSITION 7. - Soit T un cône réticulé $\mathfrak{S}$-conucléaire, $\mathfrak{S}$ étant un ensemble de parties compactes métrisables. Alors, Γ est bien coiffé.

On montre en effet que, sous l'hypothèse du théorème 1, le cône $\mathfrak{M}^+(\text{ext}\,\Gamma)$ est bien coiffé. Dans le cas d'unicité, Γ est image continue injective de ce cône, donc aussi bien coiffé.

Ici la démonstration est donc a posteriori (c'est-à-dire au moyen du théorème 1). Une démonstration géométrique directe permettrait sans doute de se passer de l'hypothèse de métrisabilité.

Remarque. - On démontre de même que tout cône convexe fermé Γ ayant une base bornée, et tel que tout point de Γ admet une représentation intégrale unique est déjà bien coiffé. Cela se démontre, sans la théorie des mesures coniques, en appliquant, à l'ensemble des points extrémaux de la base, la remarque suivante.

Remarque. - Si E est un espace topologique complètement régulier, le cône $\mathfrak{M}_b^+(E)$ des mesures de Radon bornées, muni de la topologie de la convergence étroite, est bien coiffé.

Preuve. - Soit $f : E \longrightarrow (0\,,\,+\infty)$ une fonction telle que, pour tout $\alpha > 0$,

$\{x\ ;\ \alpha \leq f(x)\}$ est compact. Alors $C_f = \{m \in \mathcal{M}_b^+(E)\ ;\ \int f\, dm \leq 1\}$ est un chapeau (théorème de Prohorov). Tout m appartient à un tel chapeau : Si $(K_n)_{n\geq 1}$ est une suite de compacts deux à deux disjoints telle que $m(E \setminus \bigcup_{n\geq 1} K_n) = 0$, soit $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite tendant vers $+\infty$ telle que $\sum_n \alpha_n\, m(K_n) \leq 1$. Alors la fonction f, égale à α_n sur K_n et $+\infty$ sur $E \setminus \bigcup_{n\geq 1} K_n$, possède la propriété ci-dessus et $m \in C_f$.

6. Applications.

Nous allons nous borner à indiquer un type important de cônes auxquels ces résultats s'appliquent.

Soit Φ un espace nucléaire tonnelé sur $\mathbb{C}$. Soit F l'espace des formes hermitiennes $K : \Phi \times \Phi \longrightarrow \mathbb{C}$ séparément continues, muni de la topologie de la convergence simple. Soit Γ l'ensemble des formes positives $K(\varphi, \varphi) \geq 0$, $\forall \varphi \in \Phi$. Alors Γ est un cône convexe fermé saillant.

THÉORÈME 3. - Γ est réunion de chapeaux métrisables.

Il en résulte que le théorème 1 s'applique à Γ et aux sous-cônes convexes fermés de Γ.

Indiquons seulement les chapeaux dont il s'agit : On sait que tout $K \in \Gamma$ est le noyau reproduisant d'un sous-espace hilbertien $\mathcal{H}_K \hookrightarrow \Phi'$, et qu'inversement tout sous-espace hilbertien $\mathcal{H} \hookrightarrow \Phi'$ est associé ainsi à un noyau $K \in \Gamma$ unique [11]. De plus, $0 \leq K_1 \leq K_2$, au sens de Γ si, et seulement si, $\mathcal{H}_{K_1} \subset \mathcal{H}_{K_2}$, avec injection de norme ≤ 1. Soit $K \in \Gamma$, et soit C_K l'ensemble des noyaux $K' \in \Gamma$ tels que $K' \leq K$ et que, de plus, l'inclusion $\mathcal{H}_{K'} \subset \mathcal{H}_K$ soit un opérateur de Hilbert-Schmidt de norme (Hilbert-Schmidt) au plus égale à 1. Alors, on démontre que C_K est un chapeau métrisable et que $\Gamma = \bigcup_{K\in\Gamma} C_K$.

Soit maintenant G un groupe d'automorphismes de Φ (i. e. d'homéomorphismes linéaires), et soit Γ_G l'ensemble des $K \in \Gamma$ invariants sous G, c'est-à-dire tel que

$$K(u\varphi\,,\ u\psi) = K(\varphi\,,\ \psi)\ ,\quad \forall\ u \in G\ .$$

Alors Γ_G est un sous-cône convexe fermé de Γ. Pour $K \in \Gamma_G$, l'espace $\mathcal{H}_K$ est invariant par les opérateurs de G (ou plutôt par leurs transposés u'). Plus exactement, la restriction à $\mathcal{H}_K$ des opérateurs u', $u \in G$, sont des opérateurs unitaires dans $\mathcal{H}_K$. On obtient donc ainsi une anti-représentation unitaire de G dans $\mathcal{H}_K$. Notons $G/\mathcal{H}_K$ l'ensemble de ces opérateurs unitaires. On a $K \in \mathrm{ext}(\Gamma_G)$ si, et seulement si, l'espace $\mathcal{H}_K$ est irréductible, i. e. ne contient pas de sous-espace fermé invariant (voir [15]). Ainsi les décompositions intégrales dans Γ_G correspondent aux décompositions de certaines représentations unitaires de G en représentations irréductibles. On démontre alors le théorème suivant dont la partie (A) et l'équivalence de (B) 1° et (B) 2° résultent directement des théorèmes 1 et 3.

THÉORÈME 4.

(A) Tout noyau $K \in \Gamma_G$ possède une représentation intégrale au moyen de noyaux extrémaux.

(B) Les conditions suivantes sont équivalentes :

1° Les représentations intégrales sont uniques.

2° Γ_G est réticulé pour son ordre propre (qui n'est autre que l'ordre induit par Γ).

3° Pour tout $K \in \Gamma_G$, le commutant $(G/\mathcal{H}_K)'$ est abélien.

4° Les représentations de G associées aux K appartenant aux génératrices extrémales différentes sont deux à deux inéquivalentes.

COROLLAIRE 6. - Si $G_1 \subset G_2$ et Γ_{G_1} est réticulé, Γ_{G_2} est également réticulé.

Cela résulte immédiatement de la condition 3° du théorème 4.

Exemples.

1° $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\underset{\sim}{R}^n)$ l'espace de Schwartz. $G \simeq \underset{\sim}{R}^n$ opère par translation sur D . Alors Γ_G s'identifie au cône de distribution de type positif par la formule

$$K(\varphi , \psi) = T(\varphi * \tilde{\psi}) , \quad \tilde{\psi}(x) = \overline{\psi(- x)} .$$

Les génératrices extrémales sont engendrées par les caractères, et le théorème 1 avec la proposition 5 montre qu'il existe une mesure de Radon m sur $\underset{\sim}{R}^n$ telle que $T(\varphi * \tilde{\varphi}) = \int |\hat{\varphi}|^2 \, dm$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$.

De là, il résulte facilement que la mesure m est tempérée ([3], p. 208) de sorte qu'on retrouve le théorème de Bochner-Schwartz. En particulier, on voit que Γ_G est réticulé.

2° $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\underset{\sim}{R}^n)$. On suppose que G est un groupe de difféomorphismes C^∞ , contenant les translations, opérant sur D (e. g. le groupe de Poincaré dans le cas $n = 4$).

Alors, d'après le théorème 4 et son corollaire 6, tout point de Γ_G possède une représentation intégrale unique au moyen de génératrices extrémales.

3° Soit V un groupe de Lie unimodulaire, soit $\mathcal{D} = \mathcal{D}(V)$ et soit $G = V \times V$ opérant sur $\mathcal{D}$ par translation à gauche et à droite.

Le cône Γ_G des noyaux bi-invariants (traces) est un cône réticulé. En effet, la condition 3° du théorème 4 est vérifiée grâce à un théorème de GODEMENT-SEGAL ([6], p. 71) : Si $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{D}'(V)$ est invariant par translation à gauche et à droite et si $\mathcal{L}$ (respectivement $\mathcal{R}$) est l'algèbre de Von Neumann engendrée dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ par les translations à gauche (respectivement à droite), on a $\mathcal{L}' = \mathcal{R}$ et $\mathcal{R}' = \mathcal{L}$, ($\mathcal{L}'$ désignant le commutant de $\mathcal{L}$). Il s'ensuit que $(G/\mathcal{H})' = \mathcal{L}' \cap \mathcal{R}' = \mathcal{L}' \cap \mathcal{L}$ est abélien, donc la condition 3° du théorème 4 est vérifiée.

Il en résulte que toute trace possède une représentation intégrale unique au moyen de traces extrémales. Dans le cas particulier de groupes de Lie de type I, chaque génératrice extrémale contient un élément priviligié de la forme

$$K_{\pi}(\varphi , \psi) = \operatorname{tr} \pi(\varphi * \tilde{\psi}) ,$$

où π est une classe de représentation irréductible de G , et tr désigne la trace dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{K_{\pi}})$. On montre alors que l'ensemble de ces noyaux est un ensemble $\mathcal{K}$-analytique de sorte qu'on peut appliquer la proposition 4 et le corollaire 1 ci-dessus. Ainsi est associée, à chaque $K \in \Gamma_G$, une mesure de Radon m' sur l'ensemble des noyaux K_{π} . Il résulte du théorème 4, condition 4°, que, pour $K_{\pi_1} \neq K_{\pi_2}$, $\pi_1 \neq \pi_2$, on montre que l'application $K_{\pi} \longrightarrow \pi$ est Borel-mesurable, par rapport à la structure borélienne de MACKEY sur $\hat{G}$. Si l'on transporte la mesure m' sur $\hat{G}$, on obtient, pour chaque $K \in \Gamma_G$, une représentation intégrale unique

$$K = \int_{\hat{G}_2} K_{\pi} \, dm(\pi) ,$$

$\hat{G}_2$ étant l'ensemble des $\pi \in \hat{G}$ tels que $\pi(\varphi)$ soit un opérateur de Hilbert-Schmidt pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(G)$.

Lorsqu'on prend $K = \delta$, on retrouve la mesure de Plancherel sur $\hat{G}_2$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (G.). - Les cônes convexes faiblement complets dans l'analyse, "Proc. intern. Congress of Mathematicians" [1962. Stockholm], p. 317-330. - Djursholm, Institut Mittag-Leffer, 1973.

[2] CHOQUET (G.). - Lectures on analysis, Vol. I-III. - New York, Benjamin, 1969 (Mathematics Lecture Note Series).

[3] DONOGHUE (W. E.). - Distributions and Fourier transforms. - London, Academic Press, 1969 (Pure and applied Mathematics. Academic Press, 32).

[4] EDGAR (G. A.). - Extremal integral representations, J. funct. Analysis, t. 23, 1976, p. 145-161.

[5] EDGAR (G. A.). - A noncompact Choquet theorem, Proc. Amer. math. Soc., t. 49, 1975, p. 354-358.

[6] GODEMENT (R.). - Théorie des caractères, I et II, Annals of Math., t. 59, 1954, p. 47-85.

[7] GOULLET de RUGY (A.). - Sur les cônes engendrés par une famille de convexes compacts, Bull. Sc. math., 2e série, t. 97, 1973, p. 241-252.

[8] MAURIN (K.). - General eigenfunction expansions and unitary representations of topological groups. - Warszawa, PWN - Polish scientific Publishers, 1968 (Monografie matematyczne, 48).

[9] PIETSCH (A.). - Nuclear locally convex spaces. - Berlin, Springer-Verlag, 1972 (Ergebnisse der Mathematik, 66).

[10] SCHWARTZ (L.). - Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures. - Bombay, Oxford university Press, 1973 (Tata Institute of fundamental Research. Studies in Mathematics, 6).

[11] SCHWARTZ (L.). - Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés, J. Analyse math., Jérusalem, t. 13, 1964, p. 115-256.

[12] THOMAS (E. G. F.). - Integral representations in conuclear spaces, "Vector space measures and applications, II" [1977. Dublin], p. 172-179. - Berlin, Springer-Verlag, 1978 (Lecture Notes in Mathematics, 645).

[13] THOMAS (E. G. F.). - Représentation intégrale dans les cônes convexes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 286, 1978, Série A, p. 515-518.

[14] THOMAS (E. G. F.). - Integral representations in convex cones, Université de Groningen, Report ZW-7703.

[15] THOMAS (E. G. F.). - Integral representations of invariant reproducing kernels, Proceedings of a Congress of Mathematisch Genootschap [1978. Amsterdam].

(Texte reçu le 4 septembre 1978)

Erik G. F. THOMAS
Mathematisch Institut
Rijksuniversiteit te Groningen
Postbus 800
GRONINGEN (Pays-Bas)