Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Alain Louveau

Notions élémentaires de théorie descriptive effective

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 17, n^{o} 1 (1977-1978), exp. n^{o} 1, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_1_A1_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
17e année, 1977/78, n° 1, 10 p.

27 octobre, 10 novembre 1977

NOTIONS ÉLÉMENTAIRES DE THÉORIE DESCRIPTIVE EFFECTIVE

par Alain LOUVEAU

Résumé. - La théorie descriptive effective a, en plus de son intérêt propre, pris récemment une grande importance, comme outil permettant de résoudre certains problèmes de la théorie descriptive classique. Citons comme exemples le théorème sur les relations coanalytiques de L. HARRINGTON (qui a fait l'objet d'un exposé de l'auteur au séminaire Choquet, 1976/77, n° 19), le problème de la classe de Borel minimum d'une fonction borélienne uniformisante d'un fermé du plan à coupes dénombrables (HARRINGTON), l'étude des boréliens du plan à coupes de classe de Borel donnée (qui fera l'objet d'un prochain exposé dans ce séminaire).

Le présent exposé a pour but de fournir les bases pour une compréhension des techniques mises en jeu dans la résolution des problèmes que nous venons d'indiquer. Aussi ne donnerons-nous aucune démonstration de théorème, préférant illustrer les techniques sur quelques exemples.

Les considérations "effectives" ne sont pas absentes des premiers travaux en théorie descriptive. N. N. LUSIN en particulier est résolument constructiviste, refusant de considérer des ensembles non "effectivement" définis, et consacre une grande part de son livre (*) à des considérations sur l'effectivité de ses définitions et démonstrations.

Mais les idées intuitives sous-jacentes étant celles de "formule" (définition d'un ensemble) et de "passage d'un objet donné par une formule à un autre" comme dans le théorème de Novikov (existence d'un point nommable dans un coanalytique non vide), il fallut attendre les progrès de la logique pour avoir une mathématisation correcte de ces notions métamathématiques.

Dans les années 1930-1940, après les travaux de GÖDEL sur l'incomplétude de l'arithmétique, la notion de fonction récursive est étudiée de façon extensive, principalement par CHURCH, KLEENE, TÜRING, qui fondent les bases de la récursivité sur ω.

Les fonctions récursives (d'un ensemble ω^n dans ω) représentent la mathématisation de la notion intuitive de fonction calculable par machine. Diverses définitions ont été proposées qui, toutes, ont abouti à la même classe de fonctions. La thèse de CHURCH est l'assertion métamathématique que toute fonction intuitivement calculable par machine est en fait récursive.

Une définition possible de la classe $\mathcal{C}$ des fonctions récursives est la suivante.

Définition 1. - $\mathcal{C}$ est la plus petite classe de fonctions de $\omega^n \longrightarrow \omega$ (n variable) qui contient

(*) LUSIN (N. N.). - Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications. Réimpression de l'édition de 1930. - New York, Chelsea publishing Company, 1972.

(a) la <u>fonction successeur,</u> $S : \omega \longrightarrow \omega$ définie par $S(n) = n + 1$,

(b) pour tous n et k , la <u>fonction constante</u> $C^k_n : \omega^k \longrightarrow \omega$, $C^k_n(x_1 , \dots , x_k) = n$,

(c) pour tous n et $i \leqslant n$, la <u>fonction projection</u> $P^n_i : \omega^n \longrightarrow \omega$, $P^n_i(x_1 , \dots , x_k) = x_i$,

et qui satisfait les clauses suivantes :

1° <u>Clôture par composition</u>. - Si $g_1 , \dots , g_k \in \mathcal{C}$, $g_i : \omega^m \longrightarrow \omega$, et $h \in \mathcal{C}$, $h : \omega^k \longrightarrow \omega$, alors la fonction $f : \omega^m \longrightarrow \omega$, définie par

$$f(x_1 , \dots , x_m) = h(g_1(x_1 , \dots , x_m) , \dots , g_k(x_1 , \dots , x_m)) ,$$

est aussi dans $\mathcal{C}$.

2° <u>Clôture par induction</u>. - Si $g : \omega^k \longrightarrow \omega$ est dans $\mathcal{C}$, et $h : \omega^{k+2} \longrightarrow \omega$ est dans $\mathcal{C}$, alors la fonction $f : \omega^{k+1} \longrightarrow \omega$, définie par

$$f(0 , x_1 , \dots , x_k) = g(x_1 , \dots , x_k) ,$$

$$f(n + 1 , x_1 , \dots , x_k) = h(f(n , x_1 , \dots , x_k) , n , x_1 , \dots , x_k) ,$$

est aussi dans $\mathcal{C}$.

3° <u>Minimalisation</u>. - Si $g : \omega^{k+1} \longrightarrow \omega$ est dans $\mathcal{C}$, et pour tous $(x_1 , \dots , x_k) \in \omega^k$, il existe $x \in \omega$ tel que $g(x , x_1 , \dots , x_k) = 0$, alors la fonction f , définie par

$$f(x_1 , \dots , x_k) = \inf\{x \; g(x , x_1 , \dots , x_k) = 0\} ,$$

est aussi dans $\mathcal{C}$.

La classe $\mathcal{C}$ est clairement dénombrable. On démontre que toutes les fonctions habituelles de l'arithmétique (addition, multiplication, exponentiation, n-ième nombre premier, etc.) sont récursives. En particulier, il existe des bijections récursives de chaque espace ω^k sur ω .

Appelons ensemble récursif (dans ω^k), un ensemble dont la fonction caractéristique est récursive. Intuitivement, c'est un ensemble A pour lequel il existe un algorithme pour décider si un k-uple $(x_1 , \dots , x_k)$ est, ou non, dans A .

A partir de ces ensembles, on peut définir, en utilisant les opérations de projection (de $\omega^k \longrightarrow \omega^\ell$) et de complémentation, une hiérarchie sur certains sous-ensembles des ω^n . C'est la hiérarchie arithmétique, introduite et étudiée principalement par KLEENE dans les années 1950. Par exemple, les ensembles de la première classe, les projections d'ensembles récursifs, ou semi-récursifs, sont intuitivement les ensembles A pour lesquels il existe un algorithme qui, si un k-uple $(x_1 , \dots , x_k)$ est dans A , permet de le savoir (par contre l'algorithme ne sert à rien si $(x_1 , \dots , x_k) \notin A$). KLEENE a montré qu'il existe des ensembles de chaque classe qui ne sont pas dans la classe précédente, et a établi des propriétés structurelles (théorèmes de séparation, de réduction) qui apparentent formellement cette hiérarchie à celle des boréliens de classe finie sur ω^ω . Un long effort de généralisation à partir de cette analogie formelle, inauguré par les travaux d'ADDISON, a permis d'aboutir à une théorie unique qui englobe la hiérarchie de Kleene sur ω et la théorie descriptive classique. Le cadre adéquat pour cette étude est celui des espaces polonais récursivement présentés (espaces r. p.), définis et étudiés par MOSCHOVAKIS [1].

Définition 2. - Une présentation récursive d'un espace topologique polonais X est un couple $(d , (r_n)_{n\in\omega})$ formé d'une distance d sur X compatible avec sa topologie et pour laquelle X est complet, et d'une suite $(r_n)_{n\in\omega}$ d'éléments de X qui est dense dans X , telles que les relations suivantes

$$d(r_k , r_\ell) < \frac{m}{n+1} \quad \text{et} \quad d(r_k , r_\ell) \leqslant \frac{m}{n+1}$$

sont récursives (comme sous-ensembles de ω^4).

Tous les espaces polonais ne sont pas récursivement présentables : il n'y a qu'un nombre dénombrable de types (à un homéomorphisme près) d'espaces polonais récursivement présentés. Cependant les espaces habituels de l'analyse ω , ω^ω , 2^ω , $[0 , 1]$, $[0 , 1]^\omega$, $\underset{\sim}{R}$, le sont. En fait, les distances et les suites denses, définies habituellement pour ces espaces, conviennent, [1]. De même, si X et Y sont des espaces r. p., on peut munir canoniquement $X \times Y$ d'une présentation récursive associée (les définitions habituelles conviennent) ; c'est ce que nous supposerons fait dans la suite.

La donnée d'une présentation récursive sur un espace X permet de définir canoniquement une base de la topologie de X . Si $n \longmapsto ((n)_0 , (n)_1 , (n)_2)$ est une bijection récursive de ω sur ω^3 , on définit

$$B_n(X) = B(r_{(n)_0} , \frac{(n)_1}{(n)_2 + 1}) = \{x \in X ; \ d(x , r_{(n)_0}) < \frac{(n)_1}{(n)_2 + 1}\} ,$$

puis en utilisant les fonctions récursives de ω dans ω , la classe Σ_1^0 des "ouverts effectifs" :
Un sous-ensemble A de X est Σ_1^0 s'il existe $\alpha \in \mathcal{C}$ tel que

$$A = \bigcup_n B_{\alpha(n)}(X) .$$

Un tel ensemble A est évidemment ouvert, mais la réciproque est fausse. En effet, l'ensemble des Σ_1^0 d'un espace X est dénombrable (puisque $\mathcal{C}$ est dénombrable). Les analogues effectifs des boréliens de classe finie sont alors définis par les relations suivantes

$$\Pi_1^0 = \{A ; \ X - A \in \Sigma_1^0\}$$

et

$$\Sigma_{n+1}^0 = \{A ; \ \exists\, B \in \Pi_n^0 , \ B \subset X \times \omega , \ \pi_X(B) = A\} , \quad \Pi_{n+1}^0 = \{A ; \ X - A \in \Pi_n^0\} .$$

Les ensembles Σ_{n+1}^0 (resp. Π_{n+1}^0) sont des boréliens de classe n additive (resp multiplicative), mais la réciproque est fausse, puisque

$$\mathrm{card}\ (\Sigma^0_{n+1} \cap \mathcal{P}(X)) = \mathrm{card}\ (\Pi^0_{n+1} \cap \mathcal{P}(X)) = \aleph_0 .$$

Toujours par analogie avec la théorie classique, on peut définir les projectifs effectifs suivants.

$$\Sigma^1_1 = \{A \subset X \ ; \ \exists\, B \in \Pi^0_1 \ , \ B \subset X \times \omega^\omega \ , \ A = \pi_X(B)\}$$

et

$$\Pi^1_n = \{A \ ; \ X - A \in \Sigma^1_n\} \ , \ \Sigma^1_{n+1} = \{A \subset X \ ; \ \exists\, B \in \Pi^1_n \ , \ B \subset X \times \omega^\omega \ , \ A = \pi_X(B)\} .$$

Enfin, on pose $\Delta^0_n = \Sigma^0_n \cap \Pi^0_n$, et $\Delta^1_n = \Sigma^1_n \cap \Pi^1_n$.
Les ensembles Σ^1_1 correspondent aux ensembles analytiques, Π^1_1 aux coanalytiques, Δ^1_1 aux boréliens, etc ...

La théorie effective apparaît, alors, comme l'étude de certains ensembles projectifs particuliers ; ceux qui peuvent être définis inductivement comme nous venons de le faire. En fait, l'étude de tous les projectifs entre dans le champ d'étude de la théorie effective, grâce à la notion de classe relativisée. Si X est un espace r. p., et x un point de X , on définit, pour chaque espace r. p. Y les classes relativisées à x : $\Sigma^i_j(x)$, $\Pi^i_j(x)$, $\Delta^i_j(x)$, $i = 0 , 1$, $j \in \omega$ par

$$\Sigma^i_j(x) = \{A \subset Y \ ; \ \exists\, B \subset X \times Y \ , \ B \in \Sigma^i_j \ , \ A = B(x)\} ,$$

où $B(x)$ désigne la coupe de B au point x $B(x) = \{y \ , \ (x , y) \in B\}$. On définit de même $\Pi^i_j(x)$, et on pose $\Delta^i_j(x) = \Sigma^i_j(x) \cap \Pi^i_j(x)$ ($\Delta^i_j(x)$ n'est pas la famille des coupes d'ensembles Δ^i_j au point x !).

Le théorème qui suit n'est pas très difficile. Il provient du fait que les ensembles universels de Sierpinski pour les classes boréliennes et les classes projectives peuvent être définis de manière effective à partir d'une base de la topologie de X (i. e. sont dans la classe effective correspondante).

THÉORÈME 1. - <u>Soit $\mathfrak{U}$ une classe effective</u> ($\mathfrak{U} = \Sigma^i_j$, ou Π^i_j , ou Δ^i_j), $\boldsymbol{\mathfrak{U}}$ <u>la classe borélienne ou projective associée. Alors</u> $\boldsymbol{\mathfrak{U}} = \bigcup_{\alpha \in \omega^\omega} \mathfrak{U}(\alpha)$.

En d'autres termes, tout borélien, ou projectif, est borélien, ou projectif, effectif de même classe, en un certain $\alpha \in \omega^\omega$ (appelé un code pour l'ensemble considéré). Comme les propriétés des classes relativisées sont, en général, les mêmes que celles des classes effectives, avec les mêmes démonstrations, on voit que des résultats sur les classes effectives fourniront des résultats sur les ensembles de la théorie classique.

Nous allons illustrer ce phénomène sur quelques exemples. Pour cela, nous aurons besoin de savoir transformer un énoncé de la théorie classique en un énoncé de la théorie effective. Nous donnons à la fin de cet article un petit lexique permettant (dans les cas les plus simples) cette transformation. Il est remarquable que, une fois qu'ils sont convenablement transformés, la plupart des théorèmes connus de la théorie classique deviennent des théorèmes de la théorie effective. Les démonstrations de ces théorèmes sont souvent identiques, parfois nettement plus difficiles que leurs analogues de la théorie classique. Il semble donc que l'on obtienne une théorie qui est un raffinement de la théorie classique (les théorèmes effectifs sont plus précis que leurs analogues classiques), mais en perdant la simplicité. En fait, les exemples que nous avons choisi montrent qu'il n'en est rien. Dans un certain nombre de cas, les techniques effectives permettent de démontrer des théorèmes de type classique dont on ne connait pas de démonstration directe.

Exemple 1. - Considérons l'énoncé E_1 suivant (second théorème de séparation de Lusin) "Si $(A_n)_{n\in\omega}$ est une suite d'ensembles coanalytiques dans un espace polonais X, il existe une suite $(A'_n)_{n\in\omega}$ d'ensembles coanalytiques, tels que $A'_n \subset A_n$ pour tout n, $\bigcup_n A_n = \bigcup_n A'_n$, et les A'_n sont deux à deux disjoints".

Dans la version effective, on remplace "coanalytique" par Π^1_1, et polonais par espace r. p. . Cependant, cela ne suffit pas. Si on veut avoir un résultat effectif, on doit préciser, outre la nature des ensembles A_n, la nature de l'application $n \longmapsto A_n$. C'est pourquoi, on introduit l'ensemble $A \subset X \times \omega$ défini par $(x, n) \in A \longleftrightarrow x \in A_n$, et on doit demander que A soit Π^1_1 (ce qui implique, en particulier, que chaque A_n est Π^1_1). En retour, on obtient un renseignement supplémentaire sur l'application $n \longmapsto A'_n$. L'énoncé effectif correct est l'énoncé E'_1 suivant. "Soient X un espace r. p., et A un ensemble Π^1_1 de $X \times \omega$. Il existe un ensemble Π^1_1 A' de $X \times \omega$ tel que $A' \subset A$, $\pi_X(A') = \pi_X(A)$ et, en posant $A'_n = \{x \in X ; (x, n) \in A'\}$, les $(A'_n)_{n\in\omega}$ sont deux à deux disjoints". Cet énoncé est connu sous le nom de théorème de ω-réduction, ou de "easy uniformization theorem", [1]. En effet, A' peut être vu comme le graphe d'une fonction partielle de X dans ω, qui uniformise l'ensemble A.

Exemple 2. - Considérons maintenant l'énoncé E_2 suivant (uniformisation des boréliens à coupes compactes par des fonctions boréliennes). "Soient X et Y deux espaces polonais, B un borélien de $X \times Y$ dont les coupes $B(x)$, pour $x \in X$, sont compactes. Il existe une fonction borélienne $f : X \longrightarrow Y$ qui uniformise B, c'est-à-dire telle que, pour tout $x \in \pi_X(B)$, $(x, f(x)) \in B$."

Pour avoir la version effective de cet énoncé il faut avoir une notion de fonction borélienne effective. Une fonction $f : X \longrightarrow Y$ est borélienne si, pour tout ouvert élémentaire $B_n(Y)$, $f^{-1}(B_n)$ est borélien. On ne peut cependant pas copier cette définition pour l'analogue effectif. Comme dans l'exemple précédent, on doit préciser la nature de l'application $n \longmapsto f^{-1}(B_n)$. Ceci conduit à la définition suivante.

Soit $f : X \longrightarrow Y$, où X et Y sont r. p. On appelle diagramme de f, l'ensemble $D^f \subset X \times \omega$ défini par

$$(x, n) \in D^f \longleftrightarrow x \in \mathrm{dom}(f) \wedge f(x) \in B_n(Y)$$

(on a ajouté, ici, $x \in \mathrm{dom}(f)$ pour inclure le cas où f est une fonction partielle). On dit que f est Γ-récursive (pour une certaine classe Γ), si $D^f \in \Gamma$. Clairement, la définition de fonction Δ^1_1-récursive correspond bien à l'analogue recherché de la notion de fonction borélienne. Une autre notion est importante en théorie effective, celle de fonction Π_1^1-récursive partielle. L'analogue classique est peu utilisé. C'est la notion de fonction partielle définie sur un ensemble coanalytique et mesurable pour la tribu des bianalytiques de ce coanalytique (qui n'est pas la tribu des boréliens lorsque le coanalytique n'est pas borélien). Les fonctions Π_1^1-récursives partielles sont closes par composition, et la classe Π_1^1 est close par image réciproque par les fonctions Π_1^1-récursives partielles. De plus, si une fonction Π_1^1-récursive partielle est définie sur un Δ_1^1 (en particulier, si elle est totale), elle est, alors, Δ_1^1-récursive partielle sur ce Δ_1^1.

Revenons à l'énoncé E_2. Sa version effective est l'énoncé E_2' suivant.
"Soient X et Y deux espaces r. p., B un ensemble Δ_1^1 de $X \times Y$ dont les coupes $B(x)$, pour $x \in X$, sont compactes. Il existe alors une fonction Δ_1^1-récursive $f : X \longrightarrow Y$ qui uniformise B, c'est-à-dire telle que, $\forall x \in \pi_X(B)$, $(x , f(x)) \in B$." Cet énoncé est un résultat de MOSCHOVAKIS [1]. Remarquons que la version relativisée $E_2'(\alpha)$, obtenue en remplaçant partout Δ_1^1 par $\Delta_1^1(\alpha)$ dans E_2', qui se démontre de la même façon, implique en particulier l'énoncé E_2, d'après nos remarques sur les classes relativisées.

Nous allons maintenant introduire un énoncé effectif E_2'', qui est une conséquence de l'énoncé E_2', et qui n'a pas de correspondant dans la théorie classique. L'intérêt de cet énoncé est qu'il est beaucoup plus simple que E_2', et qu'en fait il implique E_2'. Plus précisément, il existe un théorème général de la théorie effective qui va assurer que $(\forall\ \alpha \in \omega^\omega ,\ E_2''(\alpha))$ implique E_2'. C'est là l'un des apports techniques originaux, et très féconds, de la théorie descriptive effective.

Remarquons que puisqu'il n'y a qu'un ensemble dénombrable d'ensembles Δ_1^1 dans $X \times \omega$, il n'y a qu'un ensemble dénombrable de fonctions Δ_1^1-récursives de X dans Y. Par suite, pour chaque point $x \in X$ l'ensemble $A_x = \{f(x) ;\ f\ \Delta_1^1\text{-récursive de } X \text{ dans } Y\}$ est dénombrable. Si on veut que l'énoncé E_2' soit vrai, il est donc nécessaire que la coupe $B(x)$, si elle n'est pas vide, contienne un des points de A_x.

Quels sont ces points ? D'après la définition de D_f, si $y = f(x)$, alors $\{n ;\ y \in B_n(Y)\} = D_f(x)$ est un sous-ensemble $\Delta_1^1(x)$ de ω. Ceci amène la définition suivante. Un point $y \in Y$ est dit Γ-récursif (pour une classe Γ, qui dans la suite sera toujours Δ_1^1 ou $\Delta_1^1(x)$) si $\{n ;\ y \in B_n(Y)\} \in \Gamma$. On écrit souvent par abus de notation, $y \in \Gamma$ (cette définition n'a clairement pas d'analogue dans la théorie classique).
D'après l'analyse qui précède, chaque coupe $B(x)$ non vide, qui est un ensemble $\Delta_1^1(x)$ et compact, doit contenir un point $\Delta_1^1(x)$-récursif. L'énoncé E_2' implique donc, pour tout $x \in X$, l'énoncé relativisé $E_2''(x)$ de l'énoncé E_2'' suivant :

"Tout ensemble Δ_1^1 et compact non vide contient un point Δ_1^1-récursif." L'énoncé E_2'' (relativisé) est un résultat de MOSCHOVAKIS [1]. Comme nous l'avons annoncé plus haut, le fait important est que l'énoncé E_2'' (relativisé) implique en fait l'énoncé E_2', et donc, de nouveau par relativisation l'énoncé non effectif E_2.

Ceci se démontre grâce à un théorème très général d'uniformisation, dont des cas particuliers, les plus utiles en pratique, se trouvent dans MOSCHOVAKIS [1], et que l'on peut trouver, dans la forme générale que nous indiquons ici, dans [2].

THÉORÈME 2. - <u>Soit</u> A <u>un sous-ensemble</u> Π_1^1 <u>d'un produit</u> $X \times Y$ <u>de deux espaces r. p. . L'ensemble</u> $B = \{x \; ; \; (\exists y \in \Delta_1^1(x) \; , \; (x , y) \in A)\}$ <u>est un ensemble</u> Π_1^1 <u>, et il existe une fonction</u> Π_1^1<u>-récursive partielle</u> $f : X \longrightarrow Y$, <u>définie sur</u> B , <u>qui uniformise</u> A <u>sur</u> B , <u>i. e. telle que pour tout</u> $x \in B$ $(x , f(x)) \in A$.

Les cas particuliers les plus utilisés de ce résultat sont les suivants

1° le cas où B_1 est un ensemble Δ_1^1 contenu dans B . L'application f , restreinte à B_1 , est alors Δ_1^1-récursive partielle.

2° Le cas où A est Δ_1^1 , et $B = \Pi_X(A)$. B est alors Δ_1^1 , et f est une fonction Δ_1^1-récursive (que l'on peut rendre totale) qui uniformise A .

Le cas particulier 2° ci-dessus est le résultat qui permet de passer de $(\forall x \; , \; E_2''(x))$ à l'énoncé E_2' , comme on le voit facilement.

L'exemple 2 est un exemple immédiat d'application du théorème 2. Nous allons maintenant en donner une application moins évidente.

<u>Exemple</u> 3. - Considérons l'énoncé E_3 suivant. "Soient X et Y deux espaces polonais, A et B deux ensembles analytiques de $X \times Y$, tels que pour tout $x \in X$ la coupe $A(x)$ soit disjointe de $\overline{B(x)}$ (la barre désigne l'adhérence dans Y). Il existe, alors, un ensemble borélien à coupes ouvertes C de $X \times Y$, union dénombrable de rectangles de la forme $D \times U$, où D est borélien de X et U est ouvert (élémentaire) de Y , tel que $A \subset C$, et $C \cap B = \emptyset$. En particulier, tout borélien à coupes ouvertes est union dénombrable de rectangles de la forme indiquée."

Ce résultat est dû à DELLACHERIE, d'après des travaux de ČEGOLKOV et ČOBAN. La version effective, quoique longue à écrire, ne présente pas de difficulté particulière par rapport à l'exemple 2. C'est l'énoncé E_3' suivant.

"Soient X et Y deux espaces r. p., A et B deux Σ_1^1 de $X \times Y$, tels que, pour tout $x \in X$, $A(x) \cap \overline{B(x)} = \emptyset$. Il existe alors un ensemble Δ_1^1 C de $X \times Y \times \omega$, tel que, pour chaque $n \in \omega$, $C_n = \{(x , y) \; ; \; (x , y , n) \in C\}$ soit un ensemble Δ_1^1 de la forme $D \times N_k(Y)$, où D est un Δ_1^1 de X , et tel que $A \subset \bigcup_n C_n$ et $\bigcup_n C_n \cap B = \emptyset$. En particulier, tout ensemble Δ_1^1 à coupes ouvertes est de la forme $\bigcup_n C_n$, où C est un Δ_1^1 de la forme indiquée."

Passons maintenant à l'énoncé E_3'' . C'est (comme dans l'exemple 2) l'énoncé correspondant à chaque coupe.

(E_3'') "Soient X un espace r. p., A et B deux ensembles Σ_1^1 de X tels que

$A \cap \overline{B} = \emptyset$. Il existe alors un ensemble Δ^1_1 C de $X \times \omega$, tel que pour chaque n , C_n soit de la forme $N_k(X)$, et tel que $A \subset \bigcup_n C_n$ et $\bigcup_n C_n \cap B = \emptyset$. En particulier, tout ouvert Δ^1_1 est de la forme $\bigcup_n C_n$, avec C de la forme indiquée".

Le résultat E''_3 est implicite dans MOSCHOVAKIS [1]. Remarquons que les énoncés E_3, E'_3 et E''_3 réprésentent le premier pas dans l'étude des boréliens de coupes de classe donnée (resp. dans l'étude des ensembles Δ^1_1 de classe de Borel donnée). Le passage de E''_3 à E'_3, que nous allons indiquer maintenant est, dans le cas général qui sera étudié dans un exposé ultérieur, le point fondamental qui permet de se restreindre au problème effectif.

Le passage se fait de façon moins claire que dans l'exemple 2. L'énoncé E''_3 n'affirme pas l'existence de points Δ^1_1-récursifs. Cependant il est possible de démontrer le résultat suivant. Soit C un ensemble Δ^1_1 de $X \times \omega$, tel que, pour tout n , C_n est de la forme $N_k(X)$. Il existe alors un élément Δ^1_1-récursif, $\alpha \in \omega^\omega$, tel que $C = \bigcup_n N_{\alpha(n)}(X)$.
Soient alors A et B les deux Σ^1_1 tels que, $\forall x \in X$, $A(x) \cap \overline{B(x)} = \emptyset$. Pour chaque x , il existe, par $E''_3(x)$, un élément $\Delta^1_1(x)$-récursif, $\alpha \in \omega^\omega$, tel que

(1) $$A(x) \subset \bigcup_n N_{\alpha(n)}(Y) \text{ et } \bigcup_n N_{\alpha(n)}(Y) \cap B(x) = 0 \ .$$

L'ensemble $D \subset X \times \omega^\omega$ des couples (x , α) satisfaisant (1) est Π^1_1 , comme on le vérifie facilement. C'est à cet ensemble qu'on applique le théorème 2. D'après ce théorème, il existe une fonction Π^1_1-récursive f qui, étant totale, est Δ^1_1-récursive, telle que $(\forall x \in X , \ (x , f(x)) \in D)$. Il suffit alors de poser

$$(x , y , n) \in C \longleftrightarrow y \in N_{f(x)(n)}(Y) \ .$$

C satisfait les conclusions de E'_3.

Pour terminer cette étude des notions de base de théorie effective, nous allons dire quelques mots de l'analogue effectif de $\aleph_1$.
L'ensemble des ordinaux dénombrables joue un rôle central dans la théorie classique des ensembles analytiques et coanalytiques. Nous introduisons d'abord un codage de ces ordinaux par des éléments de ω^ω .
Si $n \longmapsto ((n)_0 , (n)_1)$ est une bijection récursive de ω dans ω^2 , d'inverse $(n , m) \longmapsto \langle n , m \rangle$, et $\alpha \in \omega^\omega$, soit R_α la relation sur ω^2 définie par $R_\alpha(n , m) \longleftrightarrow \alpha(\langle n , m \rangle) = 0$. On dit que α est un (code de) bon ordre si R_α est un bon ordre, et on écrit $\alpha \in WO$. A chaque tel α correspond un ordinal dénombrable unique, noté $|\alpha|$, et l'application $\alpha \longmapsto |\alpha|$ est clairement surjective sur $\aleph_1$. On démontre que WO est un ensemble Π^1_1 non borélien.

Considérons maintenant les α qui sont récursifs (de ω dans ω), et qui sont des bons ordres. Ils forment un ensemble dénombrable, et par suite, on peut définir l'ordinal dénombrable ω_1^{CK} (CK est pour CHURCH-KLEENE, qui l'ont introduit)

$$\omega_1^{CK} = \sup\{|\alpha| \ ; \ \alpha \in \mathcal{C} \cap WO\} \ .$$

On vérifie que ω_1^{CK} n'est pas atteint, et que $\{|\alpha| \ ; \ \alpha \in \mathcal{C} \cap WO\}$ est le segment initial formé des ordinaux $\xi < \omega_1^{CK}$. Cet ordinal joue, dans beaucoup de problèmes, le rôle joué par $\aleph_1$ dans la théorie classique. Citons par exemple

1° $\omega_1^{CK} = \{|\alpha| \ ; \ \alpha \in WO \wedge \alpha \in \Delta_1^1\}$.

2° $\omega_1^{CK} = \{\xi \quad \exists A \ , \ A \in \Delta_1^1 \wedge \text{rang Borel}(A) = \xi\}$.

3° Si A est Π_1^1 , $(A_\xi)_{\xi<\aleph_1}$ est sa décomposition canonique en composantes, et $B \subset A$ est Σ_1^1 , alors $\exists \xi < \omega_1^{CK}$, $B \subset A_\xi$ (théorème de la borne).

RÉFÉRENCES

Il n'existe pas encore d'ouvrage de référence pour la théorie descriptive effective. Cependant, un livre de Y. N. MOSCHOVAKIS doit paraître prochainement sur ce sujet (avec pour titre "Descriptive set theory"), et une rédaction provisoire des quatre premiers chapitres est en circulation (un exemplaire de ce travail existe à la bibliothèque de l'équipe d'analyse). La théorie effective occupe les chapitres 3 ("Basic notions of the effective theory") et 4 ("Structure theory for pointclasses"). Les résultats indiqués dans le présent exposé (avec le renvoi [1]) se trouvent pour la plupart, comme exercices, à la fin du chapitre 4 de ce livre. Par ailleurs, le théorème d'uniformisation apparaît dans un article de LOUVEAU [2] "Recursivity and compactness", à paraître dans les comptes rendus de la conférence d'Oberwolfach, avril 1977, publiés par Springer-Verlag dans les "Lecture Notes in Mathematics".

LEXIQUE

Transformation d'un énoncé classique en énoncé effectif.

Théorie classique	Théorie effective
Espace polonais	Espace récursivement présenté
ouvert	Σ_1^0 , $\Sigma_1^0(x)$
fermé	Π_1^0 , $\Pi_1^0(x)$
ouvert fermé	Δ_1^0 , $\Delta_1^0(x)$
borélien de classe n additive	Σ_{n+1}^0 , $\Sigma_{n+1}^0(x)$
borélien de classe n multiplivative	Π_{n+1}^0 , $\Pi_{n+1}^0(x)$
borélien de classe n ambigüe	Δ_{n+1}^0 , $\Delta_{n+1}^0(x)$
analytique	Σ_1^1 , $\Sigma_1^1(x)$
coanalytique	Π_1^1 , $\Pi_1^1(x)$
borélien	Δ_1^1 , $\Delta_1^1(x)$
projectif de classe n P	Σ_n^1 , $\Sigma_n^1(x)$
projectif de classe n C	Π_n^1 , $\Pi_n^1(x)$
projectif de classe n P et C	Δ_n^1 , $\Delta_n^1(x)$
suite de sous-ensembles de X	sous-ensemble de $X \times \omega$
union dénombrable	projection : $X \times \omega \longrightarrow X$
fonction continue	fonction récursive
fonction borélienne	fonction Δ_1^1-récursive
fonction bianalytique	fonction Π_1^1-récursive
-	hiérarchie sur ω
-	point récursif
-	point Δ_1^1-récursif
coupe compacte d'un borélien	ensemble compact Δ_1^1
$\aleph_1$	ω_1^{CK}

(Texte reçu le 15 novembre 1977)

Alain LOUVEAU
92 rue du Dessous des Berges
75013 PARIS