Peter Kolmus

Espaces Σ-complètement réguliers

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 16 (1976-1977), exp. nº C4, p. C1-C9
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1976-1977__16__A9_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
16e année, 1976/77, Communication n° 4, 9 p.

Avril 1977

ESPACES σ-COMPLÈTEMENT RÉGULIERS

par Peter KOLMUS

1. Introduction.

L'objet de ce travail est de donner une caractérisation des sous-espaces des espaces $\mathcal{K}_\sigma$ séparés. Un aspect de leur importance tient au fait qu'un ensemble $\mathcal{K}$-analytique, partie d'un espace $\mathcal{K}_\sigma$ séparé X, est $\mathcal{K}$-souslinien, donc capacitable pour toute capacité de Choquet, défini sur l'espace X (CHOQUET [1]).

La question de savoir quels espaces séparés de Lindelöf sont plongeables dans un espace $\mathcal{K}_\sigma$ séparé était résolu par MacGIBBON [2]. Puisque un ensemble $\mathcal{K}$-analytique est de Lindelöf, il existe déjà un critère de plongement pour les espaces $\mathcal{K}$-analytiques. Cependant, la propriété d'être de Lindelöf ne joue aucun rôle par rapport au plongement d'un espace séparé dans un espace $\mathcal{K}_\sigma$ séparé.

La caractérisation de sous-espaces d'un espace $\mathcal{K}_\sigma$ séparé que l'on donne ici est très près de la caractérisation de sous-espaces d'un espace compact, c'est-à-dire les espaces complètement réguliers. Parmi les caractérisations de ces derniers espaces, nous signalons la suivante.

Pour qu'un espace topologique E soit complètement régulier, il faut et il suffit que la topologie sur E soit engendrée par une sous-famille de $\mathcal{C}(E, \underset{\sim}{R})$ qui sépare les points et les fermés de E.

Cependant, il existe des espaces $\mathcal{K}_\sigma$ séparés qui admettent seulement les constantes comme fonctions continues (voir exemple 2, paragraphe 3), donc il n'y a aucune possibilité d'obtenir une caractérisation par rapport aux fonctions continues pour la topologie donnée. En dépit de cette difficulté, on est toujours conduit à chercher un critère en termes de fonctions dans $\underset{\sim}{R}$ pour simplifier le problème de plongement.

2. Préliminaires.

Désormais, par la notation $\mathcal{C}(E)$, il est entendu qu'il s'agira de fonctions continues bornées de E dans $\underset{\sim}{R}$, où E est un espace topologique.

On aura besoin de diverses notions de séparation.

Deux parties A, B d'un espace topologique E sont :

(a) séparées dans E, s'il existe deux ouverts disjoints U, V dans E tels que $A \subset U$ et $B \subset V$,

(b) complètement séparées, s'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}(E)$ telle que $0 \leqslant f \leqslant 1$,

$f \equiv 0$ sur A , $f \equiv 1$ sur B ,

(c) $\mathfrak{S}$-séparées, s'il existe une fonction $f \in \mathfrak{S}$ telle que $0 \leq f \leq 1$, $f \equiv 0$ sur A , $f \equiv 1$ sur B , où $\mathfrak{S}$ est une famille de fonctions numériques bornées sur E .

Si la famille $\mathfrak{S}$ est un sous-espace vectoriel coréticulé de $\underset{\sim}{R}^E$ contenant les constants, alors deux parties A , B de E sont $\mathfrak{S}$-séparées s'il existe une fonction $f \in \mathfrak{S}$ telle que

$$\sup_{x\in A} f(x) = \alpha < \beta = \inf_{x\in B} f(x) ,$$

car les parties A , B sont $\mathfrak{S}$-séparées par la fonction

$$g = (\beta - \alpha)^{-1} [((\alpha \vee f) \wedge \beta) - \alpha] .$$

Soit E un espace topologique, réunion d'une suite croissante dénombrable (E_n) de sous-espaces. La topologie inductive sur E par rapport aux sous-espaces E_n est toujours plus fine que la topologie donnée sur E . Pour les distinguer, la notation $\mathcal{C}[(E_n)]$ représentera la famille de fonctions numériques bornées sur E , continues par rapport à la topologie inductive sur E . Donc, pour que la fonction f appartienne à $\mathcal{C}[(E_n)]$, il faut et il suffit que f soit bornée, et que f_{E_n} appartienne à $\mathcal{C}(E_n)$ pour tout n .

Une partie A de $E = \bigcup_n \nearrow E_n$ sera dite bornée s'il existe un entier naturel n tel que $A \subset E_n$. Donc, si $\mathfrak{S}$ est une sous-fammille de $\mathcal{C}[(E_n)]$, deux parties A , B de E sont bornées, $\mathfrak{S}$-séparées s'il existe $n \in \underset{\sim}{N}$ et $f \in \mathfrak{S}$ tels que $A , B \subset E_n$, $0 \leq f \leq 1$, $f \equiv 0$ sur A , $f \equiv 1$ sur B .

3. Espaces, σ-Complètement Réguliers.

On verra, d'après le théorème de plongement (paragraphe 4), que les deux définitions suivantes sont équivalentes.

Définition 1. - Un espace topologique E est dit σ-complètement régulier s'il existe une suite croissante (E_n) de sous-espaces de E , et un sous-espace vectoriel coréticulé $\mathfrak{S}$ de $\mathcal{C}[(E_n)]$ contenant 1 tels que

(a) $E = \bigcup_n E_n$,

(b) $\mathfrak{S}$ sépare les points et les fermés de E ,

(c) tout couple de parties bornées, $\mathfrak{S}$-séparées de E , est séparé dans E .

On remarque qu'il s'agit toujours de la topologie donnée sur E , et donc que les fonctions dans $\mathfrak{S}$ ne sont pas continues en général.

Définition 2. - Un espace topologique E est dit σ-complètement régulier s'il existe une suite croissante (E_n) de sous-espaces de E , et une famille $\mathfrak{S} \subset \mathcal{C}[(E_n)]$ tels que

(a) $E = \bigcup_n E_n$,

(b) $\mathfrak{S}$ sépare les points et les fermés de E_n pour tout n ,

(c) tout couple de parties $\mathfrak{S}$-séparés de E_n est séparé dans E pour tout n .

Remarques.

1° L'énoncé de la définition 1 montre les liens avec les espaces complètement réguliers, surtout l'énoncé de la partie (b). Lorsqu'il s'agit d'applications, la définition 2 est plus efficace.

2° Les parties (b) et (c) des définitions entraînent que l'espace E est séparé.

3° Les trois exemples qui suivent et la démonstration du théorème de plongement (paragraphe 4) montreront que la propriété (c) des définitions, et le choix d'une sous-famille convenable $\mathfrak{S}$ de $\mathcal{C}[(E_n)]$ sont essentiels.

Exemple 1. - Soit $E = \underset{\sim}{N}$ avec la topologie de complémentaires finis ($U \subset E$ est ouvert si $\complement U$ est fini). Alors E est un espace $\mathcal{K}_\sigma$, mais non séparé. L'espace E ne vérifie pas la propriété (c) des définitions car il n'existe pas d'ouverts non vides disjoints dans E . On remarque que $\mathcal{C}(E) \approx \underset{\sim}{R}$, et $\mathcal{C}[(E_n)] = \mathcal{C}(\underset{\sim}{N})$, où $E_n = [0 , n]$.

Exemple 2 (The relatively prime integer topology on $\underset{\sim}{N}^*$; voir STEEN and SEEBACH [3]). - Soit $E = \underset{\sim}{N}^*$. Pour tout couple $p , q \in \underset{\sim}{N}^*$ tel que $(p , q) = 1$ (C'est-à-dire p , q sont premiers entre eux), soit $V_p(q) = \{q + pn ; n \in \underset{\sim}{Z}\} \cap \underset{\sim}{N}^*$.

La famille $\mathcal{B} = \{V_p(q) ; p , q \in \underset{\sim}{N}^* , (p , q) = 1\}$ est une base d'une topologie séparée sur E , car

$$V_p(q) \cap V_r(s) = \begin{cases} \emptyset & q \not\equiv s \pmod{(p , r)} \\ V_{[p,r]}(t) & q \equiv s \pmod{(p , r)} \text{ et } t \in V_p(q) \cap V_r(s) . \end{cases}$$

(où $[p , r]$ est le plus petit commun multiple).

Ce qui est le plus intéressant dans cet exemple est le fait que $\mathrm{ad}_E(V_p(q)) = p\underset{\sim}{N}^*$ (puisque $V_p(q) \cap V_r(np) \neq \emptyset$ si $(p , r) = 1$), d'où

$$\mathrm{ad}_E(V_p(q)) \cap \mathrm{ad}_E(V_r(s)) \neq \emptyset .$$

Donc, on trouve encore que $\mathcal{C}(E) \approx \underset{\sim}{R}$ et $\mathcal{C}[(E_n)] = \mathcal{C}(\underset{\sim}{N}^*)$, où $E_n = [1 , n]$.

Ainsi, E est un espace $\mathcal{K}_\sigma$ séparé pour lequel $\mathcal{C}(E)$ est trivial. D'autre part, la propriété (c) de la définition 1 est vérifiée pour la famille $\mathfrak{S} = \mathcal{C}[(E_n)]$ car les ensembles bornés sont les ensembles finis, donc, sous-ensembles bornés, $\mathfrak{S}$-séparés de E , sont séparés dans E .

Exemple 3. - Soit $E = [0 , 1]$, et soit $I \subset E$ l'ensemble des irrationnels. Soit $\mathfrak{F}$ la famille des ensembles fermés de $[0 , 1]$, et soit $\mathfrak{D}$ la famille des parties dénombrables fermées de I . Alors, si E est muni de la topologie engendrée par $\mathfrak{F} \cup \mathfrak{D}$, on trouve que l'espace E est un espace de Baire car la topologie induite sur I par celle de E est la topologie usuelle sur I, et I est encore partout dense dans E.

Cependant, E n'est pas plongeable dans un espace $\mathcal{K}_\sigma$ séparé $F = \bigcup_n K_n$. S'il était vrai, alors $\mathrm{int}_E(E \cap K_n)$ serait non vide ($E = \bigcup_n (E \cap K_n)$ et le théorème de Baire) pour un entier n. Mais $E \cap K_n$ serait complètement régulier, et cependant aucun ouvert n'est régulier dans E.

Jusqu'à ce qu'on montre que les espaces σ-complètement réguliers sont précisément les sous-espaces des espaces $\mathcal{K}_\sigma$ séparés, il n'est pas évident que l'espace E ne soit pas σ-complètement régulier. Le fait qu'il n'est pas σ-complètement régulier pour une suite de sous-espaces fermés est une conséquence de la proposition suivante.

PROPOSITION 1. - *Si $E = \bigcup_n E_n$ est σ-complètement régulier, alors E_n est complètement régulier pour tout n.*

Démonstration. - Si $\mathfrak{S} \subset \mathcal{C}[(E_n)]$ sépare les points et les fermés de E, alors $\mathfrak{S}_n = \{f_{E_n} ; f \in \mathfrak{S}\} \subset \mathcal{C}(E_n)$ sépare les points et les fermés de E_n.

PROPOSITION 2. - *Tout sous-espace d'un espace σ-complètement régulier est σ-complètement régulier.*

Démonstration. - Soit $E \subset F = \bigcup_n F_n$, où F est σ-complètement régulier pour le sous-espace vectoriel coréticulé $\mathfrak{S} \subset \mathcal{C}[(F_n)]$. Alors E est σ-complètement régulier pour le sous-espace vectoriel coréticulé $\mathfrak{S}' = \{f_E ; f \in \mathfrak{S}\} \subset \mathcal{C}[(E_n \cap F_n)]$.

LEMME. - *Soit K un compact, et soit F, A, B des parties fermées de K telles que $A \cap B = \emptyset$ et $A \cap F$, $B \cap F \neq \emptyset$. Alors, toute fonction $f \in \mathcal{C}(F)$ telle que $f_{A\cap F} \equiv 0$ et $f_{B\cap F} \equiv 1$ se prolonge à une fonction $\hat{f} \in \mathcal{C}(K)$ telle que $\hat{f}_A \equiv 0$ et $\hat{f}_B \equiv 1$.*

Démonstration. - La fonction $g(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \\ f(x) & x \in F \\ 1 & x \in B \end{cases}$ est continue sur $F \cup A \cup B$, donc g se prolonge à une fonction continue $\hat{f} \in \mathcal{C}(K)$.

PROPOSITION 3. - *Un espace $\mathcal{K}_\sigma$ séparé est σ-complètement régulier.*

Démonstration. - Soit $X = \bigcup_n \nearrow K_n$ où X est séparé et K_n est compact pour tout n. Soit F_1, F_2 deux parties fermées disjointes de X. On peut supposer que $K_1 \cap F_1$, $K_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. Soit $f_1 \in \mathcal{C}(K_1)$ telle que $f_1(K_1 \cap F_1) = \{0\}$, $f_1(K_1 \cap F_2) = \{1\}$. D'après le lemme, f_1 se prolonge à une fonction $f_2 \in \mathcal{C}(K_2)$ telle que $f_2(K_2 \cap F_1) = \{0\}$ et $f_2(K_2 \cap F_2) = \{1\}$. Par récurrence, on a $f_n \in \mathcal{C}(K_n)$ telle que f_n se prolonge à f_{n+1} et telle que $f_n(K_n \cap F_1) = \{0\}$, $f_n(K_n \cap F_2) = \{1\}$. Alors, la fonction f telle que $f_{K_n} = f_n$ est continue sur chaque compact K_n, et la fonction $g = (0 \vee f) \wedge 1$ appartient à $\mathcal{C}[(K_n)]$, et vérifie $g(F_1) = \{0\}$, $g(F_2) = \{1\}$.

Soit $\mathfrak{S} = \mathcal{C}[(K_n)]$. La première partie de la démonstration montre que $\mathfrak{S}$ sépare les points et les fermés de X . Soit A , $B \subset X$, deux ensembles bornés $\mathfrak{S}$-séparés. Alors il existe un entier n tel que A , $B \subset K_n$, et il existe une fonction $f \in \mathfrak{S}$ telle que $f_A \equiv 0$, $f_B \equiv 1$. Donc $ad_X(A)$ et $ad_X(B)$ sont sous-ensembles fermés disjoints de K_n , donc ce sont des compacts disjoints de X , d'où A et B sont séparés dans X puisque X est séparé.

COROLLAIRE. - La topologie inductive pour une suite croissante de compacts est normale.

4. Le théorème de plongement.

LEMME 1. - Soit E complètement régulier, soit F un sous-espace de E , et soit $\mathfrak{S} \subset \mathcal{C}(E)$ une sous-famille qui sépare les points et les fermés de E . Soit

$$P = \pi\{ad_{\underset{\sim}{R}}(f(E)) \ ; \ f \in \mathfrak{S}\}$$
$$Q = \pi\{ad_{\underset{\sim}{R}}(f(F)) \ ; \ f \in \mathfrak{S}\} .$$

Alors, le diagramme suivant est un diagramme commutatif de plongements, où $\varphi : E \longrightarrow P$ et $\psi : F \longrightarrow Q$ sont définies par $x \longmapsto (f(x))_{f\in\mathfrak{S}}$ et $y \longmapsto (f_F(y))_{f\in\mathfrak{S}}$, respectivement.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & ad_Q(\psi(F)) \arrow[d] \\ E \arrow[r, "\varphi"] & ad_P(\varphi(E)) \end{tikzcd} .$$

Toute fonction $f \in \mathfrak{S}$ se prolonge à une fonction continue

$$\hat{f} : \ ad_P(\varphi(E)) \longrightarrow ad_{\underset{\sim}{R}}(f(E)) .$$

En effet, si π_f dénote la restriction à $ad_P(\varphi(E))$ de la projection de P sur $ad_{\underset{\sim}{R}}(f(E))$, alors $\hat{f} = \pi_f$. En particulier, si $x \neq y$ dans $ad_P(\varphi(E))$, alors il existe une fonction $f \in \mathfrak{S}$ telle que $\hat{f}(x) \neq \hat{f}(y)$.

Rappelons qu'un ensemble ouvert U est dit ouvert régulier si $int(ad(U)) = U$, et un ensemble fermé F est dit fermé régulier si $ad(int(F)) = F$.

Si U est ouvert régulier, alors $ad(U)$ est fermé régulier, et si F est fermé régulier, alors $int(F)$ est ouvert régulier.

Si E est un espace régulier, et si $\mathcal{B}$ est une base pour la topologie de E , alors

$$\mathcal{B}' = \{int(ad(B)) \ : \ B \in \mathcal{B}\}$$

est une base d'ouverts réguliers.

LEMME 2. - Soit X partout dense dans E . Pour que U soit ouvert régulier *dans* E , *il faut et il suffit que* $U \cap X$ *soit ouvert régulier dans* X . *De plus, on a*

$$U = \mathrm{int}_E(\mathrm{ad}_E(U \cap X)) .$$

Démonstration. - D'abord, supposons que ω soit ouvert régulier dans X . Soit V ouvert dans E tel que $\omega = V \cap X$. Alors

$$U = \mathrm{int}_E(\mathrm{ad}_E(V)) = \mathrm{int}_E(\mathrm{ad}_E(\omega))$$

est ouvert régulier dans E , et $V \subset U$. Donc

$$\begin{aligned} \omega = V \cap X \subset U \cap X &= \mathrm{int}_E(\mathrm{ad}_E(\omega)) \cap X \\ &\subset \mathrm{int}_X(\mathrm{ad}_E(\omega) \cap X) \\ &= \mathrm{int}_X(\mathrm{ad}_X(\omega)) = \omega , \end{aligned}$$

car ω est ouvert régulier dans X . Ceci montre que $\omega = U \cap X$ et $U = \mathrm{int}_E(\mathrm{ad}_E(U \cap X))$.

Maintenant, supposons que U soit ouvert régulier dans E . Alors,

$$\omega = \mathrm{int}_X(\mathrm{ad}_X(U \cap X))$$

est ouvert régulier dans X , et $\mathrm{ad}_X(\omega) = \mathrm{ad}_X(U \cap X)$. Donc

$$\mathrm{ad}_E(\omega) = \mathrm{ad}_E(U \cap X) = \mathrm{ad}_E(U) ,$$

d'où

$$U = \mathrm{int}_E(\mathrm{ad}_E(U)) = \mathrm{int}_E(\mathrm{ad}_E(\omega)) .$$

D'après la première partie de la démonstration, on a

$$\omega = U \cap X .$$

LEMME 3. - *Soit* $E = \bigcup_n \nearrow E_n$, *et soit* X *une partie de* E *telle que* $X \cap E_n$ *soit un sous-espace régulier partout dense de* E_n *pour tout* n . *Supposons que* U_1 , U_2 *sont des ouverts réguliers disjoints de* E_1 . *Alors, pour tout couple* V_1 , V_2 *d'ouverts disjoints de* X *tel que* $U_j \cap E_1 \subset V_j$ $(j = 1 , 2)$, *il existe un couple* ω_1 , ω_2 *de parties de* E *tel que*

(a) $U_j \subset \omega_j$ $\quad (j = 1 , 2)$,

(b) $V_j = X \cap \omega_j$ $\quad (j = 1 , 2)$

(c) $\omega_j \cap E_n$ *soit ouvert dans* E_n $\quad (j = 1 , 2 ; \ n \geqslant 1)$.

Démonstration. - Pour tout n , et pour $j = 1 , 2$, soit

$$\omega_{j,n} = \{\mathrm{int}_{E_n}(\mathrm{ad}_{E_n}(\omega)) ; \quad \omega \subset V_j \cap E_n \ \text{ouvert régulier}\} .$$

Les ensembles $\omega_{j,n}$ sont croissants pour n (j fixé). D'après le lemme 2,

$$\omega_{j,n} \cap X = \omega_{j,n} \cap (X \cap E_n) = V_j \cap E_n .$$

De plus, $U_j \subset \omega_{j,1}$ $(j = 1 , 2)$, car U_1 , U_2 sont ouverts réguliers dans E_1 .

Soit $\omega_j = \bigcup_n \omega_{j,n}$ $(j = 1 , 2)$. On a $\omega_{1,n} \cap \omega_{2,n} = \emptyset$ pour tout n , autrement

$$\omega_{1,n} \cap \omega_{2,n} \cap X = V_1 \cap V_2 \cap E_n \neq \emptyset ,$$

ce qui contredit la supposition que V_1 et V_2 soient disjoints.

Donc, ω_1 et ω_2 sont disjoints, et $U_j \subset \omega_j$ $(j = 1, 2)$. Ceci établit la partie (a).

Pour la partie (b), on a

$$X \cap \omega_j = \cup_n (X \cap \omega_{j,n}) = \cup_n (V_j \cap E_n) = V_j .$$

Enfin, pour la partie (c), on a

$$\omega_j \cap E_n = \cup_{p \geqslant n} (E_n \cap \omega_{j,p}) ,$$

qui est ouvert dans E_n, puisque $\omega_{j,p}$ est ouvert dans E_p.

THÉORÈME (<u>de plongement</u>). - <u>Tout espace</u> σ-<u>complètement régulier est partout dense dans un espace</u> $\mathcal{K}_\sigma$ <u>séparé</u>.

<u>Démonstration</u>. - Soit $E = \cup_n \nearrow E_n$ un espace σ-complètement régulier pour le sous-espace vectoriel coréticulé $\mathfrak{S} \subset \mathcal{C}[(E_n)]$. Soit H_n l'adhérence de E_n dans $\pi\{ad(f(E_n))\ ;\ f \in \mathfrak{S}\}$. D'après le lemme 1, l'espace E_n est un sous-espace de H_n, et H_n est un sous-espace de H_{n+1} pour tout n. Soit $H = \cup_n H_n$ muni de la topologie inductive par rapport aux injections $E \hookrightarrow H$ et $H_n \hookrightarrow H$ $(n \geqslant 1)$. Alors, E est un sous-espace partout dense dans H, et il ne reste qu'à montrer que H est séparé.

Donc, soit $x , y \in H$, $x \neq y$. On peut supposer que $x , y \in H_1$. Il existe une fonction $f \in \mathfrak{S}$ telle que $\hat{f}(x) \neq \hat{f}(y)$, où $\hat{f}$ est un prolongement de f, $\hat{f} \in \mathcal{C}[(H_n)]$. Il existe, donc, deux ouverts réguliers disjoints U_1, U_2 de H_1 tels que $x \in U_1$, $y \in U_2$, et tels que

$$\sup_{t \in U_1} \hat{f}(t) < \inf_{t \in U_2} \hat{f}(t)$$

(on se sert de $\hat{f}$ ou $-\hat{f}$). Puisque $f = \hat{f}_E$ $(f \in \mathfrak{S})$, il existe une fonction $g \in \mathfrak{S}$ telle que $g(U_1 \cap E) = \{0\}$ et $g(U_2 \cap E) = \{1\}$. D'après le lemme 2, les ensembles $U_1 \cap E$ et $U_2 \cap E$ sont des ouverts réguliers dans E_1.

Donc, les ensembles $U_1 \cap E$ et $U_2 \cap E$ sont des parties bornées, $\mathfrak{S}$-séparées de E, et la propriété (c) de la définition 1 entraîne qu'il existe deux ouverts disjoints V_1, V_2 de E qui séparent $U_1 \cap E$ et $U_2 \cap E$. D'après le lemme 3, il existe deux ensembles disjoints ω_1, ω_2 de H tels que

(a) $U_j \subset \omega_j$ $(j = 1 , 2)$,
(b) $V_j = \omega_j \cap E$ $(j = 1 , 2)$,
(c) $\omega_j \cap H_n$ est ouvert dans H_n $(j = 1 , 2\ ;\ n \geqslant 1)$.

Maintenant, la définition de la topologie sur H montre que ω_1 et ω_2 sont des voisinages disjoints de x et y respectivement.

<u>Remarques</u>.

(i) D'après le théorème de plongement, on voit que si $E = \cup_n E_n$ est σ-

complètement régulier, alors E est encore σ-complètement régulier pour la suite $(\mathrm{ad}_E(E_n))_{n\geq 1}$. Donc l'espace E de l'exemple 3 n'est pas σ-complètement régulier.

(ii) La démonstration du théorème de plongement montre qu'il suffit de supposer que la famille $\mathfrak{S}$ sépare les points et les fermés bornés de E. On voit aussi qu'il n'est même pas nécessaire de supposer que la famille $\mathfrak{S}$ possède une structure d'espace vectoriel réticulé, d'où l'équivalence des définitions 1 et 2.

COROLLAIRE. - Soit $\mathfrak{S}$ une sous-famille de $\mathcal{C}[(E_n)]$ telle que $\mathfrak{S}$ sépare les points et les fermés bornés de E, et telle que tout couple de parties bornées, $\mathfrak{S}$-séparées de E, soit séparé dans E. Alors, E est σ-complètement régulier pour un sous-espace vectoriel coréticulé $\mathfrak{S}'$ de $\mathcal{C}[(E_n)]$ contenant $\mathfrak{S}$.

Démonstration. - Il existe un espace $\mathcal{K}_\sigma$ séparé $X = \bigcup_n K_n$ tel que E_n soit partout dense dans K_n pour tout n. Alors E est σ-complètement régulier pour la famille $\mathfrak{S}' = \{f_E\ ;\ f \in \mathcal{C}[(K_n)]\} \subset \mathcal{C}[(E_n)]$, qui contient $\mathfrak{S}$.

5. Quelques applications.

Définition. - Un sous-espace E d'un espace topologique F est $\mathcal{C}$-plongé dans F si toute fonction $f \in \mathcal{C}(E)$ se prolonge à une fonction $\overline{f}$ dans $\mathcal{C}(F)$. (Notation : $E \overset{\mathcal{C}}{\hookrightarrow} F$.)

PROPOSITION. - Soit $E = \bigcup_n E_n$ une réunion croissante de sous-espaces complètement réguliers telle que

(a) $E_n \overset{\mathcal{C}}{\hookrightarrow} E_{n+1}$ pour tout n,

(b) Tout couple de parties complètement séparées de E_n est séparé dans E pour tout n.

Alors E est σ-complètement régulier.

Démonstration. - C'est immédiat d'après la définition 2 avec la famille $\mathfrak{S} = \mathcal{C}[(E_n)]$.

La proposition suivante est essentiellement la caractérisation de MacGIBBON [2] des espaces $\mathcal{K}$-analytiques qui sont plongeables dans un espace $\mathcal{K}_\sigma$ séparé.

PROPOSITION. - Soit $E = \bigcup_n E_n$ une réunion croissante de sous-espaces fermés complètement réguliers telle que tout couple de parties complètement séparées de E_n est séparé dans E pour tout n. Si l'espace E est de Lindelöf, alors E est σ-complètement régulier.

Démonstration. - Chaque sous-espace E_n est de Lindelöf puisqu'il est fermé. Donc E_n est normal, et fermé dans E_{n+1} pour tout n, d'où $E_n \overset{\mathcal{C}}{\hookrightarrow} E_{n+1}$ pour tout n. Maintenant, la conclusion est une conséquence de la proposition précédente.

PROPOSITION. - *Si* $E = \bigcup_n E_n$ *est une réunion croissante de sous-espaces complètement réguliers telle que* $E_n \overset{\mathcal{C}}{\hookrightarrow} E$ *pour tout* n , *alors* E *est complètement régulier*.

Démonstration. - Dans ce cas, $\mathcal{C}(E) = \mathcal{C}[(E_n)]$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (G.). - Ensembles $\mathcal{K}$-analytiques et $\mathcal{K}$-sousliniens ; cas général et cas métrique, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 9, 1959, p. 75-81.

[2] MacGIBBON (Brenda TAYLOR-). - $\mathcal{K}$-analytic spaces and countable operations in topology, Ph. D. Thesis, Mc Gill University, Montreal, 1970.

[3] STEEN (L. A.) and SEEBACH (J. A., Jr). - Counterexamples in topology. - New York, Montreal, Holt, Rinehart and Winston, 1970.

(Texte reçu le 21 juin 1977)

Peter KOLMUS
Equipe d'Analyse, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05