GILLES GODEFROY

Préduaux d'espaces de Banach

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 16 (1976-1977), exp. nº C3, p. C1-C8
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1976-1977__16__A8_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
16e année, 1976/77, Communication n° 3, 8 p.

PREDUAUX D'ESPACES DE BANACH

par Gilles GODEFROY

Soit E un espace de Banach. Je dirai que " F est un prédual de E " ou que " E a pour prédual F ", si F est un espace de Banach tel que F' soit isométrique à E .

Je dirai que " E a un unique prédual" ou que " F est l'unique prédual de E " si tout espace de Banach G , tel que G' soit isométrique à E , est isométrique à F .

Le but de ce travail est d'établir des conditions d'existence ou d'unicité du prédual pour certains espaces de Banach.

1. Existence du prédual.

Soit E un Banach, E' son dual, E'' son bidual. Soit

$$\mathcal{S}_E = \{F \text{ s. e. v. de } E'' \text{ ; } F \text{ est } \sigma(E'', E')\text{- fermé, } E \oplus F = E''\} ,$$

où on identifie, comme dans toute la suite, E à un sous-espace de E'' .

On a la proposition suivante.

PROPOSITION 1. - *Soit E un espace de Banach. On a l'équivalence*

1° E *est isomorphe au dual d'un espace de Banach.*
2° $\mathcal{S}_E \neq \emptyset$.

Démonstration.

1° $\Longrightarrow$ 2°. - Supposons que E soit isomorphe à G', où G est considéré comme un sous-espace fortement fermé, et $\sigma(E', E)$ dense de E' . On a alors $E \oplus G^{\perp} = E''$, d'où $G^{\perp} \in \mathcal{S}_E$. Par conséquent $\mathcal{S}_E \neq \emptyset$.

2° $\Longrightarrow$ 1°. - Soit $F \in \mathcal{S}_E$. Soit G s. e. v. de E' tel que $G^{\perp} = F$. L'espace G' est isomorphe à $E''/G^{\perp} = E''/F$, donc à E .

C. Q. F. D.

Remarque. - La condition $\mathcal{S}_E \neq \emptyset$ n'est pas suffisante pour que E soit *isométrique* au dual d'un espace de Banach.

Soit alors $F \in \mathcal{S}_E$. L'orthogonal $F^{\perp}$ de F dans E' est $\sigma(E', E)$-dense. *On pose*

$$\alpha(F) = (\sup \{\varepsilon \text{ ; } B_{\varepsilon}(E') \subseteq \overline{F^{\perp} \cap B_1(E')}^{\sigma(E',E)}\})^{-1} .$$

On a $1 \leqslant \alpha(F) < +\infty$. En effet, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 2. - Soit $F \in \mathcal{S}_E$, et soit $F^\perp$ l'orthogonal de F dans E'. L'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & (F^\perp)' \\ f & \longmapsto & f_{|F^\perp} \end{array}$$

est un isomorphisme. On a $\|\varphi^{-1}\| = \alpha(F)$, et $\|\varphi\| \leq 1$.

Démonstration. - On a $E'' = E \oplus F$. L'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} E'' & \longrightarrow & (F^\perp)' \\ f & \longmapsto & f_{|F^\perp} \end{array}$$

induit donc un isomorphisme φ entre $E = E''/F = E''/(F^\perp)^\perp$ et $(F^\perp)'$. On a évidemment $\|\varphi\| \leq 1$, où on a muni $(F^\perp)'$ de la norme duale de la norme induite sur $F^\perp$ par E'.

φ est un isomorphisme ; cela signifie que toute forme linéaire continue h sur $F^\perp$ se prolonge en une forme linéaire $\tilde{h}$ de E. On a

$$\|\varphi^{-1}\| = \sup_{\|h\|=1} \|\tilde{h}\| .$$

On a $\|\varphi^{-1}\| \leq \alpha(V)$. En effet, si $|h| \leq 1$ sur $F^\perp \cap B(E')$, alors $|\tilde{h}| \leq 1$ sur $\overline{F^\perp \cap B_1(E')}^{\sigma(E',E)}$, donc $|\tilde{h}| \leq 1$ sur $B_{1/\alpha(V)}(E')$. Et, par conséquent, $|\tilde{h}| \leq \alpha(V)$ sur $B_1(E')$.

De plus, soit

$$\frac{1}{\alpha(V)} + \varepsilon > \eta > \frac{1}{\alpha(V)} \quad \text{et} \quad x \in B_\eta(E') \setminus \left(\overline{F^\perp \cap B_1(E')}^{\sigma(E',E)}\right) .$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $h_0 \in E$ tel que $h_0(x) > 1$, et $|h_0| \leq 1$ sur $\overline{F^\perp \cap B_1(E')}^{\sigma(E',E)}$. On a alors $h_0 = \tilde{h}$, avec $\|h\| \leq 1$. Ie plus,

$$h_0\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq \frac{1}{\frac{1}{\alpha(V)} + \varepsilon} ;$$

donc

$$\|\varphi^{-1}\| \geq \frac{1}{\frac{1}{\alpha(V)} + \varepsilon} .$$

Ceci étant vrai pour tout ε, on a $\|\varphi^{-1}\| = \alpha(V)$.

C. Q. F. D.

On peut à présent énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 3. - Soit E un espace de Banach. On a les équivalences :

(i) E est isométrique au dual d'un espace de Banach,

(ii) $\exists\, F \in \mathcal{S}_E$ tel que $\alpha(F) = 1$,

(iii) $\exists\, V \subseteq E'$ tel que

$$\begin{cases} \text{(a)} & E \oplus V^\perp = E'' , \\ \text{(b)} & \overline{V \cap B_1(E')}^{\sigma(E',E)} = B_1(E') . \end{cases}$$

Démonstration. - (ii) et (iii) sont évidemment équivalents ; en effet, (iii) n'est qu'une ré-écriture de (ii), où $V^{\perp} = F$.

On a (i) $\Rightarrow$ (iii) . En effet, si E est isométrique à V' , alors l'image canonique $i(V)$ de V dans E' vérifie (a) et (b).

Enfin (ii) $\Rightarrow$ (i) . En effet, soit $F \in \mathcal{S}_E$ tel que $\alpha(F) = 1$. La proposition 3 montre que l'application $\varphi : E \longrightarrow (F^{\perp})'$, qui vérifie $\|\varphi\| \leq 1$ et $\|\varphi^{-1}\| = 1$, est une isométrie.

C. Q. F. D.

Parenthèse. - Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des tonneaux $\sigma(E', E)$-compacts de E' . Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des normes sur E' , équivalentes à la norme duale ; pour toute $N \in \mathcal{N}$, soit $B_1^N(E')$ la boule unité de (E', N) . Pour tout $K \in \mathcal{T}$, soit $\mathfrak{a}_0(K)$ l'espace de Banach des applications affines continues sur K , nulles en 0. On déduit des méthodes précédentes le résultat suivant : Soit $K \in \mathcal{T}$. On a l'équivalence :

(i) $\mathfrak{a}_0(K)$ est isométrique à un dual,

(ii) $\exists\, F \in \mathcal{S}_E$, $N \in \mathcal{N}$ tels que $K = \overline{F^{\perp} \cap B_1^N(E')}^{\sigma(E',E)}$.

Par conséquent, l'application

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{S} \times \mathcal{N} &\longrightarrow \mathcal{T} \\ (F , N) &\longmapsto \overline{F^{\perp} \cap B_1^N(E')}^{\sigma(E',E)} \end{aligned}$$

est une surjection de $\mathcal{S}_E \times \mathcal{N}$ sur l'ensemble des tonneaux $K \in \mathcal{T}$ tels que $\mathfrak{a}_0(K)$ soit isométrique à un dual.

Les résultats obtenus dans la suite du travail montrent que, sous certaines hypothèses, E' a la propriété de Radon-Nikodym, ou bien E est séparable et $E \not\supset \ell^1(\mathbb{N})$, l'application Ψ est injective.

On déduit immédiatement de ce résultat l'équivalence :

(i) $\exists\, K \in \mathcal{T}$ tel que $\mathfrak{a}_0(K)$ soit isométrique à un dual,

(ii) $\mathcal{S}_E \neq \emptyset$.

Cette équivalence se déduit également de la proposition 1.

Montrons à présent que, dans un cas particulier, on peut obtenir un résultat plus maniable que le théorème 3.

PROPOSITION 4. - Soit E un Banach tel que E' soit séparable. Soit

$$\mathcal{R} = \{f \in E'' \; ; \; \operatorname{Ker} f \cap B_1(E') \text{ soit } \sigma(E', E)\text{-dense dans } B_1(E')\}.$$

$\mathcal{R}$ est un s. e. v. $\sigma(E'', E')$-fermé de E'' .

Démonstration. - Remarquons que si E' est séparable, toute $f \in E''$ est de 1re classe pour $\sigma(E', E)$. Par conséquent, $\operatorname{Ker} f \cap B_1(E')$ est $\mathcal{G}_\delta$ dans $B_1(E')$. On a donc

$$f \in \mathcal{R} \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} f \cap B_1(E') \text{ est } \sigma(E', E)\text{-résiduel dans } B_1(E') .$$

Or, on a

$$\mathrm{Ker}\ (\lambda f_1 + \mu f_2) \supseteq \mathrm{Ker}\ f_1 \cap \mathrm{Ker}\ f_2 \ .$$

L'intersection de deux résiduels étant un résiduel, $\mathcal{R}$ est un s. e. v. de E'' .

Pour démontrer que $\mathcal{R}$ est $\sigma(E'', E')$-fermé, il suffit de démontrer, d'après le théorème de Banach-Dieudonné, que $\mathcal{R} \cap B_1(E'')$ est $\sigma(E'', E')$-fermé ; E' étant séparable, $B_1(E'')$ est métrisable. Il suffit donc de vérifier que si

$$f_n \in \mathcal{R}\ ,\quad f_n \longrightarrow f \quad \text{pour } \sigma(E'', E')\ , \text{ alors } f \in \mathcal{R}\ .$$

Or, on a

$$\mathrm{Ker}\ f \cap B_1(E') \supseteq B_1(E') \cap (\textstyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ker}\ f_n)\ .$$

Une intersection dénombrable de résiduels étant un résiduel, on a $f \in \mathcal{R}$.

C. Q. F. D.

On a alors, avec les mêmes notations, le résultat suivant.

THÉORÈME 5. - Soit E un espace de Banach tel que E' soit séparable. On a l'équivalence

(i) E est isométrique au dual d'un Banach,

(ii) $E'' = E \oplus \mathcal{R}$.

Démonstration.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Soit F tel que F' soit isométrique à E . L'espace F s'identifie à un sous-espace de E' , tel que $F \cap B_1(E')$ soit $\sigma(E', E)$-dense dans $B_1(E')$. Soit $F^\perp$ l'orthogonal de F dans E'' . On a les relations suivantes

$$\left.\begin{array}{c} E \oplus F^\perp = E'' \\ \mathcal{R} \supseteq F^\perp \\ \mathcal{R}\ \text{e. v.} \\ E \cap \mathcal{R} = \{0\} \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathcal{R} = F^\perp\ ,$$

et, par conséquent, $E \oplus \mathcal{R} = E''$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Supposons que $E \oplus \mathcal{R} = E''$. Soit F l'orthogonal de $\mathcal{R}$ dans E' . L'espace E' étant séparable, il existe un ensemble dénombrable $D = \{f_n\}$ dans $\mathcal{R}$, qui est $\sigma(E'', E')$-dense dans $\mathcal{R}$. On a $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ker}\ f_n$, ce qui montre que $F \cap B_1(E')$ est résiduel, donc dense dans $B_1(E')$. L'espace $\mathcal{R}$ appartient donc à $\mathcal{S}_E$, et vérifie $\alpha(\mathcal{R}) = 1$. D'après le théorème 4, l'espace F' est isométrique à E .

C. Q. F. D.

Remarquons que l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) ci-dessus n'utilise pas l'hypothèse " E' séparable", mais simplement le fait que $\mathcal{R}$ soit un espace vectoriel. Ceci va nous permettre, dans la deuxième partie, d'établir des résultats d'unicité du prédual.

2. Unicité du prédual.

Soit E un espace de Banach, E' son dual, E'' son bidual. Nous noterons, dans cette partie, $i(E)$ l'image de E par l'injection canonique de E dans E''.

Dans l'esprit du théorème 5, on a le lemme suivant.

LEMME 6. - Soit E un Banach. Soit $\mathcal{R}$ le sous-ensemble de E''', défini par

$$\mathcal{R} = \{\varphi \in E''' \ ; \ \operatorname{Ker} \varphi \cap B_1(E'') \text{ est } \sigma(E'', E')\text{-dense dans } B_1(E'')\} .$$

On a les équivalences :

(i) $\mathcal{R}$ est un espace vectoriel,

(ii) $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{R}$, $\operatorname{Ker} \varphi_1 \cap \operatorname{Ker} \varphi_2 \cap B_1(E'')$ est dense dans $B_1(E'')$,

(iii) $\mathcal{R} = i(E)^{\perp}$.

Si ces conditions sont vérifiées, E est l'unique prédual de E'.

Démonstration. - $i(E) \cap B_1(E'')$ est $\sigma(E'', E')$-dense dans $B_1(E'')$. On a donc (iii) $\Rightarrow$ (ii).

Il est, de plus, immédiat que (ii) $\Rightarrow$ (i).

Montrons que (i) $\Rightarrow$ (iii). On a toujours $\mathcal{R} \supseteq i(E)^{\perp}$. De plus, $\mathcal{R} \cap E' = \{0\}$, et $E''' = E' \oplus i(E)^{\perp}$. Donc

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{R} \text{ espace vectoriel} \\ \mathcal{R} \cap E' = \{0\} \\ E''' = E' \oplus i(E)^{\perp} \\ \mathcal{R} \supset i(E)^{\perp} \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathcal{R} = i(E)^{\perp} .$$

De plus, si les conditions équivalentes (i), (ii), (iii) sont réalisées, on a $\mathcal{R} = i(E)^{\perp}$, d'où $i(E) = \mathcal{R}^{\perp}$ (orthogonal dans E''), d'après le théorème des bipolaires. L'espace $i(E)$, isométrique à E, est donc bien déterminé ; d'où l'unicité du prédual de E'.

C. Q. F. D.

Remarques. - Voilà un exemple où $\mathcal{R}$ n'est pas un espace vectoriel. Soit $E = c_0(\underset{\sim}{N})$. On a $E'' = \ell^{\infty}(\underset{\sim}{N})$. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non trivial sur $\underset{\sim}{N}$. Soit

$$\varphi_1 \in \ell^{\infty}(\underset{\sim}{N})' : \quad \varphi_1(u) = \lim_{\mathcal{U}} u(n) ,$$
$$\varphi_2 \in \ell^{\infty}(\underset{\sim}{N})' : \quad \varphi_2(u) = u(1) - \lim_{\mathcal{U}} u(n) .$$

On voit aisément que φ_1 et $\varphi_2 \in \mathcal{R}$, mais $\varphi_1 + \varphi_2 \notin \mathcal{R}$.

Les conditions (i), (ii), (iii) du lemme 4 montrent en fait que l'espace E a une "unique position" dans son bidual, c'est-à-dire que si F est un prédual de E', on a $i(F) = i(E)$.

Nous allons à présent appliquer le lemme 6 à montrer l'unicité de certains préduaux.

THÉORÈME 7. - Soit E un espace de Banach dont le dual E' est séparable et ne contient pas $\ell^1(\underset{\sim}{N})$. Alors E est l'unique prédual de E'.

Démonstration. - Vérifions la condition (ii) du lemme 6. Si E' est séparable et ne contient pas $\ell^1(\underset{\sim}{N})$, d'après la caractérisation de Rosenthal, toute $\varphi \in E'''$

est $\sigma(E'' , E')$ de 1re classe. On a donc

$$\varphi \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \operatorname{Ker} \varphi \cap B_1(E'') \text{ est résiduel dans } B_1(E'') .$$

L'intersection de deux résiduels étant un résiduel, la condition (ii) est vérifiée.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 8. - Soit E un espace de Banach localement uniformément convexe. Alors E est l'unique prédual de E' .

Démonstration. - Dire que E est l. u. c. c'est dire que :

Si $x_\alpha \longrightarrow x$ pour $\sigma(E , E')$, avec $x_\alpha \in B_1(E)$ et $\|x\| = 1$, alors $\|x_\alpha - x\| \longrightarrow 0$.

On voit alors aisément que l'on a :

Si $x \in i(E)$, $\|x\| = 1$, $x_\alpha \in B_1(E'')$, $x_\alpha \longrightarrow x$ pour $\sigma(E'', E') \Rightarrow \|x_\alpha - x\| \longrightarrow 0$.

Vérifions alors la condition (iii). Si $\varphi \in E'''$ est nulle sur un ensemble $\sigma(E'' , E')$-dense de $B_1(E'')$, pour tout $x \in i(E)$, $\|x\| = 1$, il existe

$$(x_\alpha) \in B_1(E'') \cap \varphi^{-1}(0) \text{ tels que } x_\alpha \longrightarrow x \text{ pour } \sigma(E'' , E') .$$

On a alors $\|x_\alpha - x\| \longrightarrow 0$, d'où $\varphi(x) = 0$. φ est alors nulle sur $i(E)$, d'où $\mathcal{R} = i(E)^\perp$.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 9. - Soit E un espace de Banach ayant la propriété de Radon-Nikodym. Alors E est l'unique prédual de E' .

Démonstration. - Si E a la propriété de Radon-Nikodym, la boule unité de E est l'enveloppe convexe fortement fermée de ses points fortement exposés.

Or, on voit aisément que si x est fortement exposé dans $B_1(E)$, le point $i(x)$ est fortement exposé dans $B_1(E'')$, au moyen d'un élément de E' . Il existe donc $f \in E'$ telle que, $\forall \varepsilon$, $\exists \delta$ tel que

$$C = \{y \in B_1(E'') ; |f(y) - f(i(x))| < \delta\} \subseteq B_1(E'') \cap B(i(x) , \varepsilon) ,$$

où $B(i(x) , \varepsilon)$ désigne la boule fermée de E'' de centre $i(x)$ et de rayon ε . On voit, comme précédemment, que si φ est nulle sur un ensemble $\sigma(E'' , E')$-dense de $B_1(E'')$, elle est nulle en tout point de $B_1(E)$ fortement exposé, et donc nulle sur E . La condition (iii) est donc vérifiée.

C. Q. F. D.

Remarques. - Michèle CAPON a démontré que, dans le théorème 7, l'hypothèse " E' séparable" était superflue.

Les hypothèses des propriétés 7, 8 et 9 sont vérifiées par les sous-espaces des espaces considérés, mais pas par les quotients.

Ces théorèmes permettent d'établir qu'un certain nombre d'espaces de Banach sont l'unique prédual de leur dual. Par exemple :

1° Les espaces à bidual séparable (théorème 7), 2° Les sous-espaces des espaces duaux WCG (théorème 9), et en particulier les sous-espaces des duaux séparables.

On retrouve par exemple le fait que $\ell^1(\Gamma)$ est l'unique prédual de $\ell^\infty(\Gamma)$, ou que $\mathcal{K}(h)'$ est l'unique prédual de $\mathcal{L}(h)$. Et, de plus, leurs sous-espaces seront également des "préduaux uniques".

Remarquons de plus que si on renorme un espace E ayant la propriété de Radon-Nikodym, ou tel que $E' \not\supset \ell^1(\underset{\sim}{N})$, on obtient encore un tel espace, tandis que ce n'est pas vrai en général pour E l. u. c.

Enfin, les espaces L^1, par exemple $L^1(\underset{\sim}{R}, dt)$, qui sont unique prédual de leur dual (et ont même une "unique position" dans $(L^\infty)'$), n'entrent pas dans les classes définies par les théorèmes 7, 8 et 9 ; il serait intéressant de voir, si, dans le cas $E = L^2$, l'ensemble $\mathcal{R}$ est un espace vectoriel.

On peut employer les théorèmes 8 et 9 de la façon suivante : soit F un Banach ; si on trouve un prédual de E l. u. c., ou ayant la propriété de Radon-Nikodym, ce sera nécessairement l'unique prédual.

Poursuivons par un énoncé plus géométrique.

PROPOSITION 10. - <u>Soit</u> E <u>un espace de Banach ayant la propriété de Radon-Nikodym, ou ayant un dual séparable ne contenant pas</u> $\ell^1(\underset{\sim}{N})$. <u>Soit</u> K <u>un tonneau</u> $\sigma(E', E)$-<u>compact de</u> E'. <u>Alors, pour toute topologie</u> $\mathcal{T}$ <u>d'e. l. c. s. sur</u> E' <u>telle que</u> $(K, \mathcal{T})$ <u>soit compact, on a</u> $\mathcal{T}_{|K} = \sigma(E', E)_{|K}$.

<u>Démonstration</u>. - Soit $\mathcal{T}$ une topologie d'e. l. c. s. sur E' telle que $(K, \mathcal{T})$ soit compact. L'hypothèse faite sur K montre qu'il existe une norme N sur E, équivalente à la norme initiale, telle que K soit la boule unité de $(E, N)'$.

Soit $\mathcal{A}_0^{\mathcal{T}}(K)$ l'espace des fonctions affines sur K, nulles en 0, et $\mathcal{T}$-continues. L'espace $\mathcal{A}_0^{\mathcal{T}}(K)$ est isométrique à (E, N), et ces deux espaces ont même position dans $(E', j_K)'$, où j_K désigne la jauge sur E' associée à K. Or, la topologie $\mathcal{T}_{|K}$ s'identifie à la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{A}_0^{\mathcal{T}}(K)$; et donc, sur K, les topologies $\mathcal{T}$ et $\sigma(E', E)$ coïncident.

C. Q. F. D.

<u>Exemple</u>. - Sur tout tonneau $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$-compact de $\ell^\infty(\underset{\sim}{N})$, il existe une seule topologie de compact induite par une topologie d'espace localement convexe sur $\ell^\infty(\underset{\sim}{N})$.

<u>Exemples de non-unicité du prédual</u>.

1° $\ell^1(\underset{\sim}{N})$ admet pour préduaux :

(i) tous les espaces $\mathcal{C}(K)$, où K est un compact dénombrable,

(ii) un espace qui n'est pas un $\mathcal{C}(K)$.

2° $\mathcal{M}([0, 1])$ admet pour préduaux tous les espaces $\mathcal{C}(K)$, où K est un compact métrisable non dénombrable.

Ainsi, sur $B_1(\mathcal{M}([0, 1]))$, il existe, pour tout compact métrisable non dénombrable K, une topologie "localement convexe" $\mathcal{T}_K$ telle que $\mathcal{E}(B_1(\mathcal{M}([0, 1]))) \simeq K$. On voit que, dans ce cas, il n'y a aucune topologie de compact "canonique".

Terminons par deux démonstrations complémentaires des résultats précédents.

(A) $\ell^1(\Gamma)$ <u>est l'unique prédual de</u> $\ell^\infty(\Gamma)$. - Vérifions la propriété (iii) du lemme 4. Soit $\varphi \in \ell^\infty(\Gamma)''$ telle que $\operatorname{Ker} \varphi \cap B_1(\ell^\infty(\Gamma)')$ soit $\sigma(\ell^\infty(\Gamma)', \ell^\infty(\Gamma))$-dense dans $B_1(\ell^\infty(\Gamma)')$. φ est-elle nulle sur $\ell^1(\Gamma)$?

Identifions $\ell^\infty(\Gamma)'$ à $\mathcal{M}(\beta\Gamma)$. Soit x isolé dans $\beta\Gamma$. On voit aisément qu'on a le lemme suivant.

LEMME. - <u>Soit</u> K <u>compact,</u> x <u>isolé dans</u> K. <u>Soit</u> $\mu_\alpha \in B_1(\mathcal{M}(K))$ <u>telles que</u> $\mu_\alpha \longrightarrow \varepsilon_x$ <u>vaguement.</u> <u>Alors</u> $\|\mu_\alpha - \varepsilon_x\| \longrightarrow 0$.

Soient alors $\mu_\alpha \in B_1(\mathcal{M}(\beta\Gamma)) \cap \operatorname{Ker} \varphi$ telles que $\mu_\alpha \longrightarrow \varepsilon_x$ vaguement ; on a $\|\mu_\alpha - \varepsilon_x\| \longrightarrow 0$, d'où $\varphi(\varepsilon_x) = 0$. Ceci étant vrai pour tout x isolé dans $\beta\Gamma$, on a $\varphi \equiv 0$ sur $\ell^1(\Gamma)$.

(B) <u>Si</u> E'' <u>est séparable,</u> E <u>est l'unique prédual de</u> E'. - Soit $\mathfrak{F}(E'')$ l'ensemble des s. e. v. fortement fermés de E''. Soit

$$\mathcal{Q} = \{V \in \mathfrak{F}(E''), \ V \cap B_1(E'') \text{ soit } \sigma(E'', E')\text{-dense dans } B_1(E'')\} .$$

Sans hypothèses particulières sur E'', tout prédual de E appartient à $\mathcal{Q}$, et est minimal dans $\mathcal{Q}$. De plus, les conditions (i), (ii) et (iii) du lemme 6 sont encore équivalentes à la condition suivante :

(IV) $\qquad$ (E) est le plus petit élément de $\mathcal{Q}$.

Dans le cas où E'' est séparable, on voit aisément que $\mathcal{Q}$ est inductif ; il existe donc un élément minimal, ce qui explique le théorème 5. Cet élément minimal est unique, car $\mathcal{Q}$ est stable par intersection. En effet, si E'' est séparable, tout $V \in \mathfrak{F}(E'')$ est $\sigma(E'', E')$-$\mathcal{G}_\delta$. On a donc immédiatement l'unicité du prédual.

(Texte reçu le 5 mars 1977)

Gilles GODEFROY
18 villa du Danube
75019 PARIS